Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 12

EXANA0120 – EXANA129

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Décembre 04

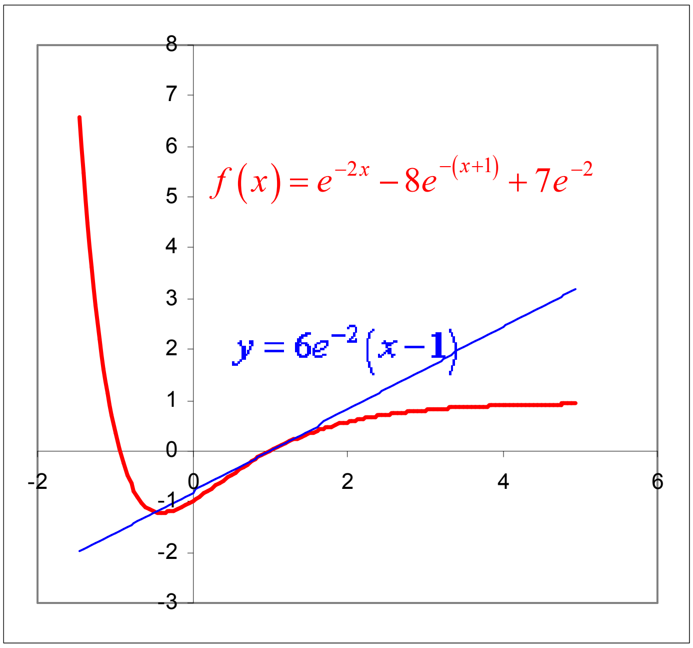
EXANA120 – Bruxelles, septembre 2004.

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^{-2x} - 8e^{-(x+1)} + 7e^{-2}$$

Et C la courbe d'équation $y = f(x)$ (C est le graphe de f)

1. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$
2. Déterminer une équation cartésienne
   a. De la tangente à C au point d'abscisse 1
   b. Des asymptotes (éventuelles) de C.
3. Etablir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant
   a. Les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières calculer avec une décimale, utiliser ln 2 ≈ 0,7 et ln 7 ≈ 1,9)
   b. Les signes de $f'(x)$ et $f''(x)$
   c. Les extrema de f, les domaines de croissance et de décroissance de f.
   d. Les points d'inflexion de C et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C
4. Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du c)



$a)\ f'(x) = -2e^{-2x} + 8e^{-(x+1)}$

$f''(x) = 4e^{-2x} - 8e^{-(x+1)}$

$b)\ f(1) = 0 \qquad f'(1) = 6e^{-2} \quad \rightarrow \quad y = 6e^{-2}(x-1)$

Il y a une asymptote horizontale.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 7e^{-2} \quad \rightarrow \quad AH \equiv y = 7e^{-2}$

$c)$ Racines

$$f(x) = 0 \ \rightarrow \ e^{-2x} - 8e^{-(x+1)} + 7e^{-2} = 0 \rightarrow e^{-2x} - 8e^{-1}e^{-x} + 7e^{-2} = 0$$

$$\rightarrow e^{-x} = 4e^{-x} \pm \sqrt{16e^{-2} - 7e^{-2}} \rightarrow \begin{cases} e^{-x} = e^{-1} \rightarrow x = 1 \\ e^{-x} = 7e^{-1} \rightarrow x = 1 - \ln 7 \simeq 0,945 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \ \rightarrow \ -2e^{-2x} + 8e^{-(x+1)} = 0 \rightarrow e^{-2x} = 4e^{-(x+1)} \rightarrow e^{-2x} = e^{-(x+1)+\ln 4}$$

$$\rightarrow \ -2x = -(x+1) + \ln 4 \ \rightarrow \ x = 1 - 2\ln 2 \simeq -0,386$$

On a $\begin{cases} x < 1 - 2\ln 2 \rightarrow f'(x) < 0 \\ x > 1 - 2\ln 2 \rightarrow f''(x) > 0 \end{cases} \rightarrow$ C'est un minimum: $\min(-0,386; -1,218)$

$$f''(x) = 0 \rightarrow 4e^{-2x} - 8e^{-(x+1)} = 0 \rightarrow e^{-2x} = e^{-(x+1)+\ln 2}$$

$$\rightarrow \ -2x = -(x+1) + \ln 2 \rightarrow x = 1 - \ln 2 \simeq 0,307$$

C'est un point d'inflexion : $I : (0,307; -0,63)$

Tableau

	$-\infty$		-1		$-0,4$		$0,3$		1		$+\infty$
f'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	
f''		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f		$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	
Concavité				$\cup$			I		$\cap$		

Résolu le 17 août 04

EXANA121 – Bruxelles, septembre 2004.

Soient les deux intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \, dx}{\sin x + \cos x}, \qquad J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x \, dx}{\sin x + \cos x}$$

Sans calculer I et J, calculer $I + J$ et $I - J$ en déduire I et J.

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx = \left[x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

$$I - I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\left(\sin x + \cos x\right)}{\sin x + \cos x}$$

$$= -\left[\ln\left(\sin x + \cos x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{\ln 2}{2}$$

$$\begin{cases} I + J = \dfrac{\pi}{4} \\ I - J = -\dfrac{\ln 2}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{I = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \ln 2\right) \qquad J = \frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2} + \ln 2\right)}$$

Résolu le 17 août 04

EXANA122 – Bruxelles, septembre 2004.

Calculer

a. $$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\sqrt{x^4+1}}}{x}$$

b. $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x^2+|x|}$$

$$a)\ \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\sqrt{x^4+1}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{\sqrt{x^4}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=-1$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2+2|x|}{x^2+|x|}$$

$$b.1)\ \lim_{x\xrightarrow{>0}0}\frac{x^2+2|x|}{x^2+|x|}=\lim_{x\xrightarrow{>0}0}\frac{x^2+2x}{x^2+x}=\lim_{x\xrightarrow{>0}0}\frac{x+2}{x+1}=2$$

$$b.2)\ \lim_{x\xrightarrow{<0}0}\frac{x^2+2|x|}{x^2+|x|}=\lim_{x\xrightarrow{<0}0}\frac{x^2-2x}{x^2-x}=\lim_{x\xrightarrow{>0}0}\frac{x-2}{x-1}=2$$

Résolu le 17 août 04. Modifié le 1 août 2005 (Steve Tumson)

EXANA123 – Louvain, juillet 2004, série 1.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \left| x^3 - x^2 \right|$$

- Donnez le domaine de f
- Etudiez la dérivabilité de f
- Situez les extrema avec précision (abscisses et ordonnées)
- Donnez le graphe de f

---

a) $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

b) Dérivabilité de $f(x)$

Etudions le signe de $g(x) = x^3 - x^2$:

		0		1	
$g(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x) = \lvert g(x) \rvert$	$+$	0	$+$	0	$+$

<u>soit $x < 1$</u>

$f(x) = -x^3 + x^2 \rightarrow f'(x) = -3x^2 + 2x.$ On a : $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 1} f'(x) = -1$

<u>soit $x > 1$</u>

$f(x) = x^3 - x^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2x.$ On a : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 1} f'(x) = 1$

Conclusion : $f(x)$ n'est pas dérivable en $x = 1$

c) Extrema

<u>soit $x < 1$</u>

$$f'(x) = -3x^2 + 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

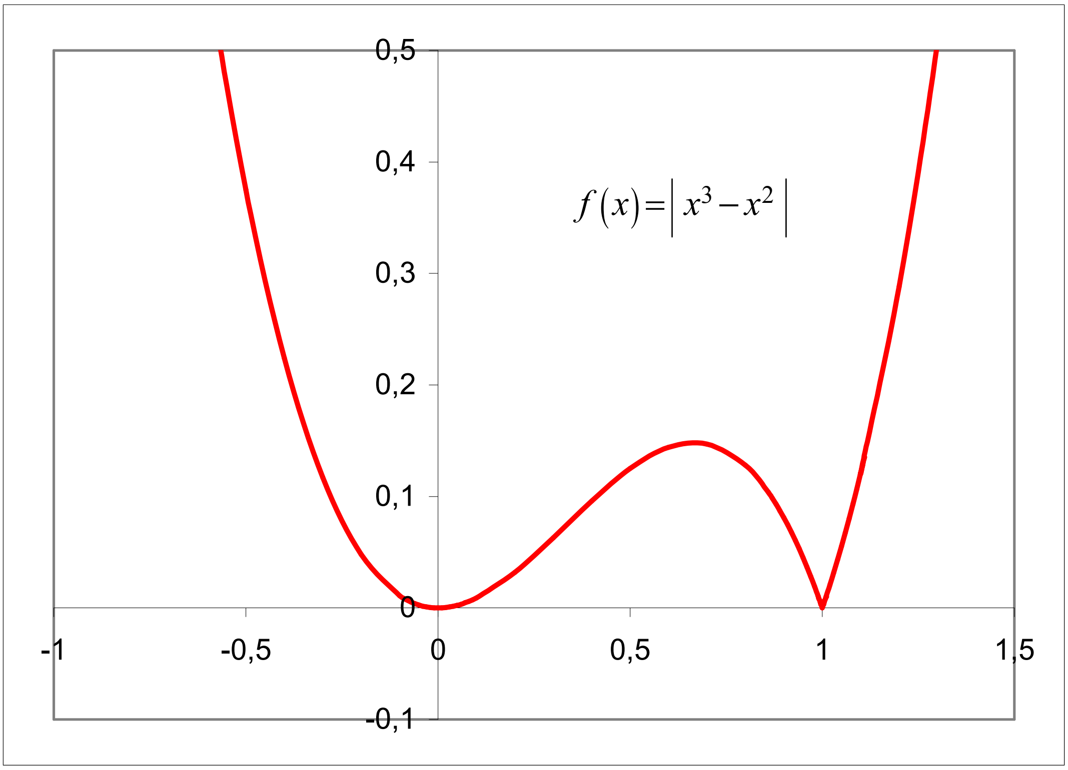
<u>soit $x > 1$</u>

$$f'(x) = 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$ Ces deux valeurs sont à rejeter car $x > 1$

Tableau de signes :

		0		$\frac{2}{3}$		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-1 / +1$	$+$
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$	M	$\searrow$	0	$\nearrow$

On a donc un minimum en $(0, 0)$ et un maximum et $\left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{27}\right)$



Résolu le 5 mars 2005

EXANA124 – Louvain, juillet 2004, série 1.

a) Appliquez la méthode de substitution pour évaluer l'intégrale :

$$I = \int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)+1}\,dx$$

où $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable telle que $\varphi(a) = -1$ et $\varphi(b) = 1$

b) Calculer

$$I = \int_0^2 \frac{x}{x^2+4}\,dx$$

c) Calculer la limite en 0 de la fonction :

$$\frac{\cos x - 1}{x^2}$$

d) Montrez que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\,|\,x\,|$ est dérivable en 0 et donnez $f'(0)$

---

a) $I = \int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)+1}\,dx = \int_a^b \frac{d\varphi(x)}{\varphi^2(x)+1}$

Soit $t = \varphi(x)$: $\begin{cases} x = a \to \varphi(a) = -1 \to t = -1 \\ x = b \to \varphi(b) = 1 \quad \to t = 1 \end{cases}$

$\to I = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{t^2+1} = [\arctan t]_{-1}^{1} = \left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$

b) $I = \int_0^2 \frac{x}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4} = \frac{1}{2}\left[\ln\left(x^2+4\right)\right]_0^2 = \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4) = \frac{1}{2}\ln 2$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \overset{Hospital}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\sin x}{2x} \overset{Hospital}{=} \lim\limits_{x\to 0} \frac{-\cos x}{2} = -\frac{1}{2}$

d) 1) si $x > 0 \to f(x) = x^2 \quad \to f'(x) = 2x$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} 2x = 0$

2) si $x < 0 \to f(x) = -x^2 \to f'(x) = -2x$ et $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} 0} -2x = 0$

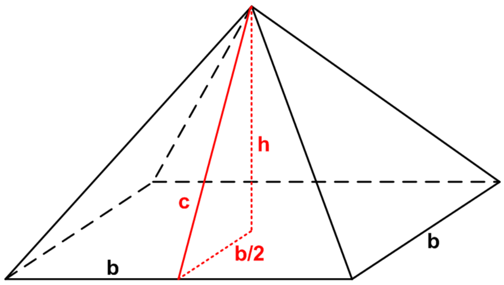
Donc en $x = 0$, la dérivée à droite égale la dérivée à gauche.

La fonction $f(x)$ est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$

Résolu le 3 mars 2005. Modifié le 1 août 2005 (Steve Tumson). Modifié le 6 juillet 2006 (Benoît Baudelet)

EXANA125 – Louvain, juillet 2004, série 1.

A l'époque de sa construction la 4ème dynastie (c. 2575 – c. 2465 avant J.C.) La Grande Pyramide de Khufu (Chéops) en Egypte avait une base de 230 mètres et une hauteur de 147 mètres. Calculez son volume en mètres cubes. Pour toutes les pyramides du même volume quelles sont la base et la hauteur (approximativement) de celle avec la surface extérieure minimale ? Ne comptez pas la surface du carrée sur laquelle la pyramide repose dans vos calculs.
Vous pouvez supposer que la surface de la pyramide est lisse. Nous vous conseillons d'utiliser des variables *b* et *h* dans vos calculs jusqu'à la dernière étape. Une dernière question : est-ce que les architectes de la Grande Pyramide ont utilisé le critère de surface minimale pour calculer ses dimensions ?



a) $V = \frac{b^2h}{3} = \frac{230 \times 147}{3} = 2592100\ m^3$

b) $V = \frac{b^2h}{3} \to h = \frac{3V}{b^2}$.

D'autre part par Pythagore : $c = \sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}}$

$\to$ la surafce extérieures : $S = 4.\frac{bc}{2} = 2b\sqrt{h^2 + \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{36V^2 + b^6}}{b}$

S sera minimale si la dérivée est nulle

$$\to S' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{36V^2+b^6}}.6b^5.b - \sqrt{36V^2+b^6}}{b^2} = \frac{6b^6 - 2\left(36V^2+b^6\right)}{2b^2\sqrt{36V^2+b^6}}$$

$\to 6b^6 - 2\left(36V^2 + b^6\right) = 0 \to b = \sqrt[6]{18V^2}$

On vérifie que ce point est bien un minimum.

c) En ce qui concerne la Grande Pyramide, on a : $b = \sqrt[6]{18 \times 2592100^2} = 222.4\ m$

Ce qui est une appromiximation tout à fait remarquable de 230 m.

Résolu le 7 mars 2005

EXANA126 – Louvain, juillet 2004, série 2.

Soit C Le graphe de la fonction *f* définie par

$$f(x) = 4x - 1 - \frac{1}{x+1}$$

- Donnez le domaine, les extrema, les asymptotes et le tableau de variations de *f*.
- Déterminez les coordonnées du point A commun aux asymptotes de C
- Montrez que A est le centre de symétrie de C.
- Tracez une représentation graphique de C

---

1) dom $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

2) $f'(x) = 4 - \frac{1}{(x+1)^2}$ et $f''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3}$

Tableau des variations :

		-1	
$f'(x)$	$+$	$\backslash$	$+$
$f''(x)$	$+$	$\backslash$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	$\backslash$	$\nearrow$
	$\cup$		$\cap$

3) AV: $x = -1$ et AO : $y = 4x - 1$

Coordonnées de A : $\begin{cases} x = -1 \\ y = 4x - 1 \end{cases} \rightarrow A : (-1, -5)$

4) Si A est un centre symétrie, posons $\begin{cases} x = x' - 1 \\ y = y' - 5 \end{cases}$

$\rightarrow$ dans ce nouveau repère la courbe devient : $4x'^2 - x'y' + 1 = 0$

ce qui est l'équation d'une hyperbole. Or on sait que les asymptotes d'une hyperbole se coupent ou centre de la conique qui est un centre de symétrie

$\rightarrow$ A est un centre de symétrie

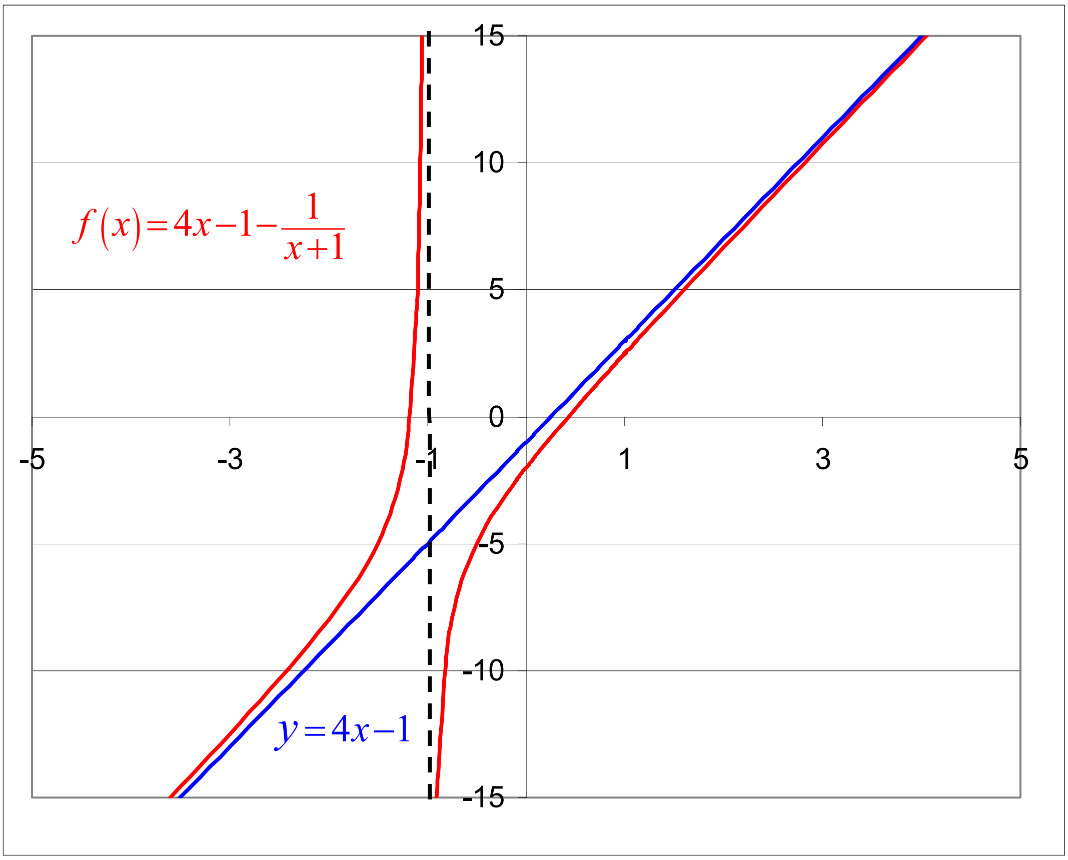
On peut procéder aussi de la façon suivante : Soit une droite variable passant par A.

$y = mx + m - 5$. Cette droite coupe C en $\begin{cases} y = mx + m - 5 \\ y = 4x - 1 - \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$

On élimine y et on obtient avec $m < 4$: $\begin{cases} x_1 = \sqrt{\dfrac{1}{4-m}} - 1 \\ x_2 = -\sqrt{\dfrac{1}{4-m}} - 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 = m\sqrt{\dfrac{1}{4-m}} - 5 \\ y_2 = -m\sqrt{\dfrac{1}{4-m}} - 5 \end{cases}$

x_1 et x_2 sont bien symétriques par rapport à -1 et y_1 et y_2 symétriques par rapport à -5

On vérifie aussi $\begin{cases} x_A = \dfrac{x_1 + x_2}{2} = -1 \\ y_A = \dfrac{y_1 + y_2}{2} = -5 \end{cases}$



Résolu le 6 mars 2005

EXANA127 – Louvain, juillet 2004, série 2.

a) Calculez

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 4}\, dx$$

b) Résolvez dans R^2 le système suivant

$$\begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ x^{2(x+y)} = 36 \end{cases}$$

c) Calculez la limite en π/2 de la fonction :

$$\frac{\sqrt{1+\cos x} - 1}{x - \frac{\pi}{2}}$$

d) Soit *f* la fonction définie sur R par :

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$

Démontrez que la fonction *f* est dérivable en 0 et donnez la valeur de *f'*(0)

---

a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin^2 x+4}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\sin x}{\sin^2 x+4}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\left(\frac{\sin x}{2}\right)}{\left(\frac{\sin x}{2}\right)^2+1}$

$$=\frac{1}{2}\left[\text{arc tan}\left(\frac{\sin x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}\left(\text{arc tan }\frac{1}{2}-\text{arc tan }0\right)=\frac{1}{2}\text{arc tan }\frac{1}{2}\simeq 0.2318$$

b) $\begin{cases}e^x+e^y=5\\ e^{2(x+y)}=36\end{cases}\rightarrow\begin{cases}e^x+e^y=5\\ e^{x+y}=6\end{cases}\rightarrow\begin{cases}e^x+e^y=5\\ e^xe^y=6\end{cases}$

$\rightarrow e^x$ et e^y sont solutions de l'équation : $X^2-5X+6=(X-3)(X-2)=0$

$\rightarrow\begin{cases}e^x=3\\ e^y=2\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x=\ln 3\\ y=\ln 2\end{cases}$ ou bien par symétrie $\begin{cases}x=\ln 2\\ y=\ln 3\end{cases}$

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+\cos x}-1}{x-\frac{\pi}{2}}\overset{Hospital}{=}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\sqrt{1+\cos x}}(-\sin x)=-\frac{1}{2}$

d) 1) si $x>0\rightarrow f(x)=\frac{x}{1+x}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{(1+x)^2}=1$

2) si $x<0\rightarrow f(x)=\frac{x}{1-x}\rightarrow f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}$ et $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\frac{1}{(1-x)^2}=1$

Donc en $x=0$, la dérivée à gauche est égale à la dérivée à droite.

$f(x)$ est donc dérivable en $x=0$ et $f'(0)=1$

Résolu le 17 juillet 2005 ; Modifié le 6 juillet 2006 (Benoît Baudelet)

EXANA128 – Louvain, juillet 2004, série 2.

Pour un arbre de hauteur h, supposez que la surface totale des feuilles est s_1 avec $s_1 = ah^3$ et que les rayons du soleil exposent une surface s_2 avec $s_2 = bh^2$. On suppose aussi que l'énergie venant des rayons du soleil est complètement utilisée pour la croissance de s_1. Dans une première approximation, supposez donc que la croissance de s_1 par unité de temps est égale à cs_2. Dans ces conditions, quelle est la hauteur de l'arbre en fonction du temps ?

NB : La théorie biologique sous-jacente est purement imaginaire.

$s_1 = ah^3$ et $s_2 = bh^2$

Si la croissance de s_1 par unité de temps est $cs_2 \rightarrow \frac{ds_1}{dt} = cs_2$

$\rightarrow \frac{ds_1}{dt} = cbh^2 \rightarrow \frac{d\left(ah^3\right)}{dt} = cbh^2 \rightarrow 3ah^2dh = cbh^2dt$

$\rightarrow dh = \frac{cb}{3a}dt$. On intégre : $\int_0^h dh = \frac{cb}{3a}\int_0^t dt$

$\rightarrow h = \frac{cb}{3a}t + C$

On détermine la constante d'intégration par les conditions initiales.

$t = 0 \rightarrow h = 0$ et donc $C = 0$

Conclusion : $h = \frac{cb}{3a}t$

Résolu le 7 mars 2005

EXANA129 – Louvain, septembre 2004.

Soit *f* la fonction définie par :

$$f(x)=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$$

- Donnez le domaine de définition de *f*
- Etablissez le tableau de variations de *f*
- Construisez sa courbe représentative.

---

a) Dom $f:[0,1[$ ou bien $0\le x<1$

b) Racine : $x=0$

c) Asymptote verticale : $x=1$

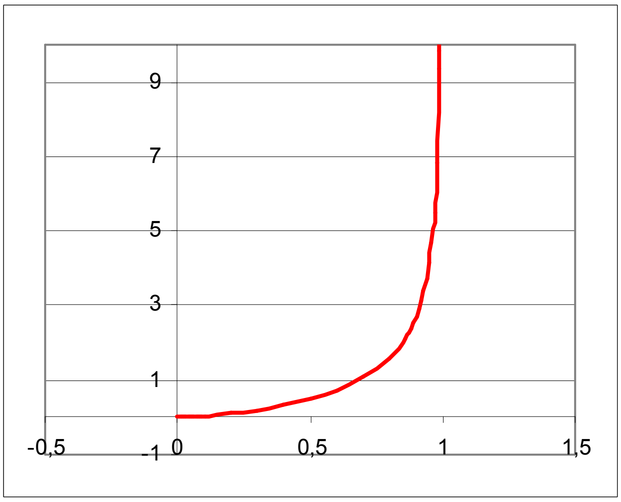
d) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}}\dfrac{3x^2(1-x)+x^3}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{3-2x}{1-x}\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$

$f'(x)$ est positif dans le domaine.

e) Tableau des variations

	0		1
$f'(x)$	0	+	+
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

f) Le graphe de la fonction est donné ci-dessous



Résolu le 4 mars 2005