Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 13

EXANA0130 – EXANA139

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Mars 2005

EXANA130 – Louvain, septembre 2004.

a) Calculez l'intégrale :

$$I=\int_{-3}^{0}\left|x^2-x-2\right|dx$$

b) Calculez l'intégrale :

$$I=\int_{0}^{\frac{3}{2}}\frac{5}{9x^2-6x+2}dx$$

c) Calculer la dérivée de la fonction

$$f(x)=x^{\ln x}$$

d) Sans utilisez la règle de l'Hospital, calculez la limite suivante :

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin a-\sin x}{a-x}$$

---

a) Remarquons que $f(x)=x^2-x-2=(x+1)(x-2)\to f(x)$ est négatif dans l'intervalle $]-1, 2[$. Par conséquent,

$$I=\int_{-3}^{0}\left|x^2-x-2\right|dx=\int_{-3}^{-1}\left(x^2-x-2\right)dx-\int_{-1}^{0}\left(x^2-x-2\right)dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-3}^{-1}-\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-1}^{0}=\frac{59}{6}$$

b) $I=\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{5dx}{9x^2-6x+2}=5\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{dx}{(3x-1)^2+1}=\frac{5}{3}\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{d(3x-1)}{(3x-1)^2+1}$

$$=\frac{5}{3}\left[\arctan(3x-1)\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}\left[\arctan\left(\frac{9}{2}-1\right)-\arctan(-1)\right]$$

$$=\frac{5}{3}\left(\arctan\frac{7}{2}+\frac{+\pi}{4}\right)\simeq 3.463$$

c) $f(x)=x^{\ln x}$ or $x=e^{\ln x}\to f(x)=e^{\ln^2 x}$

$$f'(x)=e^{\ln^2 x}.2\ln x.\frac{1}{x}=\frac{2\ln x.x^{\ln x}}{x}=2\ln x.x^{\ln x-1}$$

d) $L=\lim\limits_{x\to a}\frac{\sin a-\sin x}{a-x}$

Posons $h=a-x\to a=x+h$ et donc si $x\longrightarrow a, h\longrightarrow 0$

$\to L=\lim\limits_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ ce qui est la définition de la dérivée de $\sin x$

$\to L=\lim\limits_{x\to a}(\sin x)'=\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

Résolu le 7 mars 2005

EXANA131 – Louvain, septembre 2004.

Soit un morceau de charbon de forme parfaitement sphérique de rayon initial r_0 qui est en train de brûler dans un feu. Supposez que le volume de charbon consommé par unité de temps est proportionnel à la surface de charbon exposée à l'air. Pour simplifier les calculs, supposez que toute la surface du morceau est exposée à l'air.
Quelle est le rayon du morceau en fonction du temps ? Dans combien de temps le morceau sera-t-il entièrement consommé ?

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ et $s = 4\pi r^2$

Si le volume de la sphère consommé par unité de temps est proportionel à la surface exposée : $\frac{dV}{dt} = -kS \rightarrow \frac{4\pi}{3} dr^3 = -k4\pi r^2 dt \rightarrow dr = -kdt$

On intégre : $\int rdt = -k\int dt \rightarrow r = -kt + C$

La constante d'intégration est donnée par les conditions initiales :

$t = 0 \rightarrow r = r_0$ et donc $C = r_0$

Conclusion : $\boxed{r = r_0 - kt}$ et le morceau sera consummé en un temps : $\boxed{t = \frac{r_0}{k}}$

Résolu le 7 mars 2005

EXANA132 – Liège, juillet 2005.

On définit la seconde intégrale eulérienne $B\ (m,n\ )$ par

$$B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

quels que soient les réels m et n strictement positifs

1. Calculer $B\ (\ 1{,}2\ )$
2. Calculer $B\ (3/2,\ 1/2\ )$
3. Montrer que $B\ (m,\ n\ ) = B\ (\ m,\ n\ )$ en utilisant un changement adéquat de variable.

---

a) $B(1,2)=\int_0^1 x^0(1-x)^1\,dx=-\left[\frac{(1-x)^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

b) Première méthode

$$B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}\,dx$$

Posons $t^2=\frac{x}{1-x}\to x=\frac{t^2}{1-t^2}\to dx=\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2}$

Si $x=0, t=0$; si $x=1,\ t=+\infty\to B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,dx\qquad(1)$

Décomposons $\frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}=\frac{1}{1+t^2}+\frac{At^2+Bt+C}{\left(1+t^2\right)^2}$

On trouve après calculs : $A=1,B=0,C=-1\to B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dx+\int_0^{+\infty}\frac{t^2-1}{\left(1+t^2\right)^2}\,dx$

Le premier terme donne $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}\,dx=\left[\arctan t\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$

Le deuxième terme est beaucoup plus compliqué à calculer.

Essayons de simplifier le problème. Nous savons que la dérivée des formes du type $\left(\frac{u}{v}\right)$ sont de la forme $\frac{1}{v^2}$. Posons nous la question de voir si dans notre cas nous ne pourrions pas trouver une fonction u telle que $\left(\frac{u}{1+t^2}\right)'=\frac{t^2-1}{\left(1+t^2\right)^2}$

Supposons de plus que $u=at+b.$ Nous obtenons

$$\left(\frac{at+b}{1+t^2}\right)'=\frac{a\left(t^2-1\right)-(at+b)t^2}{\left(1+t^2\right)^2}=\frac{-at^2-2bt+a}{\left(1+t^2\right)^2}$$

Nous voyons que $a=-1$ et $b=0$ peuvent convenir.

$$\to\int_0^{+\infty}\frac{t^2-1}{\left(1+t^2\right)^2}\,dx=\int_0^{+\infty}d\frac{-t}{1+t^2}=\left[\frac{-t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}=0$$

Conclusion : $B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$

Deuxième méthode

On fait le même changement de variable et on repart de (1) : $B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^{+\infty}\frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,dx$

Effectuons une intégration par parties

$$f(t)=t \quad \to \quad f'(t)=1$$

$$g'(t)=\frac{2t}{\left(1+t^2\right)^2} \quad \to \quad g(t)=-\frac{1}{1+t^2}$$

$$\to B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\left[\frac{t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+t^2}\to B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\left[\arctan t\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

Troisième méthode

On a $B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^1\sqrt{\frac{x}{1-x}}dx$

Posons : $x=\sin^2\theta\to\theta=\arcsin\sqrt{x}\to\begin{cases}x=0\to\theta=0\\ x=1\to\theta=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ et $dx=2\sin\theta\cos\theta.d\theta$

$$\to B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta}}2\sin\theta\cos\theta d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos 2\theta\right)d\theta$$

$$=\left[\theta-\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

c) $B(m,n)=\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx$

Soit $y=1-x\to dx=-dy$ et $\begin{cases}x=1\to y=0\\ x=0\to y=1\end{cases}$

$$\to B(m,n)=-\int_1^0(1-y)^{m-1}y^{n-1}dy=\int_0^1 y^{n-1}(1-y)^{m-1}\,dy=B(n,m)$$

Résolu le 7 août 2005. Modifié le 16 novembre 05

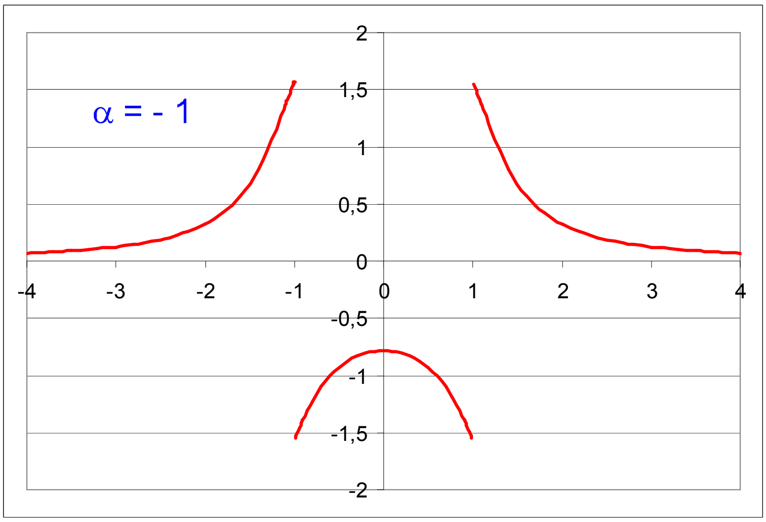
EXANA133 – Liège, juillet 2005.

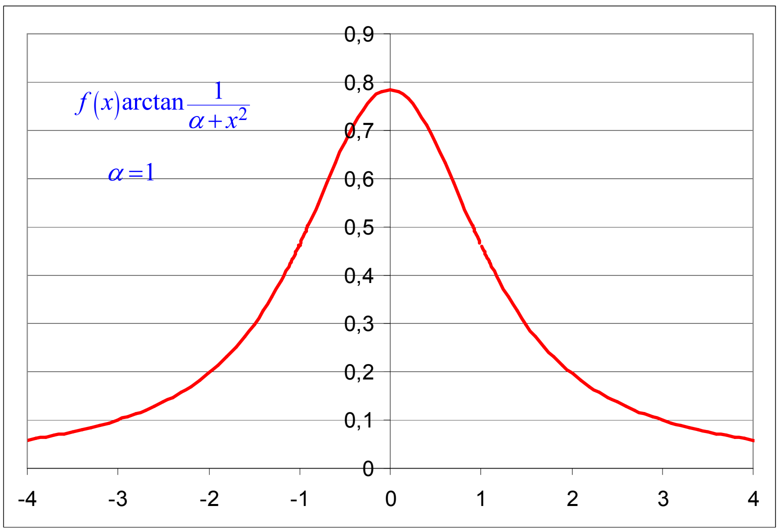
On considère la fonction

$$f(x) = \arctan \frac{1}{\alpha + x^2}$$

où α désigne un paramètre réel. En discutant s'il y a lieu de α,

a) Déterminer les domaines de définition, de continuité et de dérivabilité de f
b) Déterminer les asymptotes éventuelles
c) Rechercher les extrema éventuels et justifier leur nature
d) Montrez, sans localiser précisément les points d'inflexion que la concavité de f pour $|x|$ grand est opposée à la concavité de f au voisinage de $x = 0$
e) Esquissez le graphe.





a) Supposons $\alpha > 0$

- $dom\ f(x) = \mathbb{R}$.
- $f(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
- Il n'y a pas d'asymptote verticale.

  Il y a une asymptote horizontale car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \ \to AH \equiv y = 0$

  Il n'y a pas d'asymptote oblique (puisqu'il y a une AH)

- $f'(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{(\alpha+x^2)^2}} \dfrac{-2x}{(\alpha+x^2)^2} = \dfrac{-2x}{x^4+2\alpha x^2+\alpha^2+1}$

  Il y a un extrema en $x = 0$. C'est un maximum car $\begin{cases} x<0 \to f'(x)>0 \\ x>0 \to f'(x)<0 \end{cases}$

  Les coordonnées du maximum sont $\left(0, \arctan\dfrac{1}{\alpha}\right)$

- $f''(x) = \dfrac{2(3x^4+\alpha x^2-1-\alpha^2)}{(x^4+2\alpha x^2+1+\alpha^2)^2}$

  Donc : $f''(0) = \dfrac{-2(1+\alpha^2)}{(1+\alpha^2)^2} < 0$ et $f''(x >>>) \approx \dfrac{2.3x^4}{x^4} = 6 > 0$

  Les concavités sont opposées

b) Supposons $\alpha < 0$

- $dom\ f(x) = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{\alpha}, \sqrt{\alpha}\right\}$
- La fonction n'est pas dérivable ni continue en $x = -\sqrt{\alpha}$ et $x = \sqrt{\alpha}$ car

  $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to-\sqrt{\alpha} \\ <}} f(x) = \dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x\to-\sqrt{\alpha} \\ >}} f(x) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{\alpha} \\ <}} f(x) = -\dfrac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{\alpha} \\ >}} f(x) = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

- Il n'y a pas d'asymptote verticale (à cause de ce que l'on vient de voir).

Le reste est le même que dans le cas précédent.

Résolu le 7 août 2005

EXANA134 – Mons, juillet 2005.

Le coût de production d'acier résulte de la somme de 2 termes.

- Une partie reprenant les coûts de main d'œuvre et d'amortissement du matériel. Cette partie est directement proportionnelle au temps : $c_1 = 125 \times t$
- Une partie qui est fonction de la vitesse de production v (exprimée en tonnes/heure) : $c_2 = 5.(10)^{-6} \times v^3 \times t$.

Déterminez la vitesse optimale de production d'une quantité de 200 tonnes, au coût minimale. Donnez une valeur numérique approchée de la vitesse optimale.

Le temps de production est rélié à la vitesse par $t = \dfrac{q}{v}$ où q est la quantité produite.

Ici : $t = \dfrac{200}{v}$

Soit c le coût total : $c = c_1 + c_2 = 125.\dfrac{200}{v} + 510^{-6} v^3 \dfrac{200}{v} = \dfrac{25.10^3}{v} + 2.10^{-3} v^2$

Le coût sera minimal pour v annulant la dérivée de c par rapport à v

$\dfrac{dc}{dv} = -\dfrac{25.10^3}{v^2} + 2.10^{-3} v = 0 \rightarrow v = 232.1$ tonnes/h

Ce qui correspond à : $t = 0.862$ et $c = 161.64$

Résolu le 15 août 2005

EXANA135 –ERM, 2004.

a) Calculer :

$$\lim_{x\to 0^+} x(1-x)^2$$

b) Etudier la fonction (de la variable réelle x) :

$$f(x)=\frac{\ln x-2}{\ln x-1}$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique)

$$a)\ \lim_{x\to 0^+} x(\ln x-1)^2 = \lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln x-1)^2}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x\to 0^+}\frac{2(\ln x-1)\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{2(\ln x-1)}{\frac{1}{x}}$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x\to 0^+} -\frac{2\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0$$

b) 1) $\operatorname{dom} f(x)=\mathbb{R}_0^+\setminus\{e\}$

2) Racine : $\ln x-2=0 \to x=e^2 \simeq 7.4$

3) AO $\equiv x=e$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x-2}{\ln x+1}=1 \to \text{AH}\equiv y=1$$

Notons aussi que $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\ln x-2}{\ln x+1} \xrightarrow{\text{Hospital}} = \lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

4) $$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(\ln x-1)-(\ln x-2)\frac{1}{x}}{(\ln x-1)^2}=\frac{1}{x(\ln x-1)^2}$$

La dérivée est toujours positive dans le domaine et donc $f(x)$ est toujours croissante

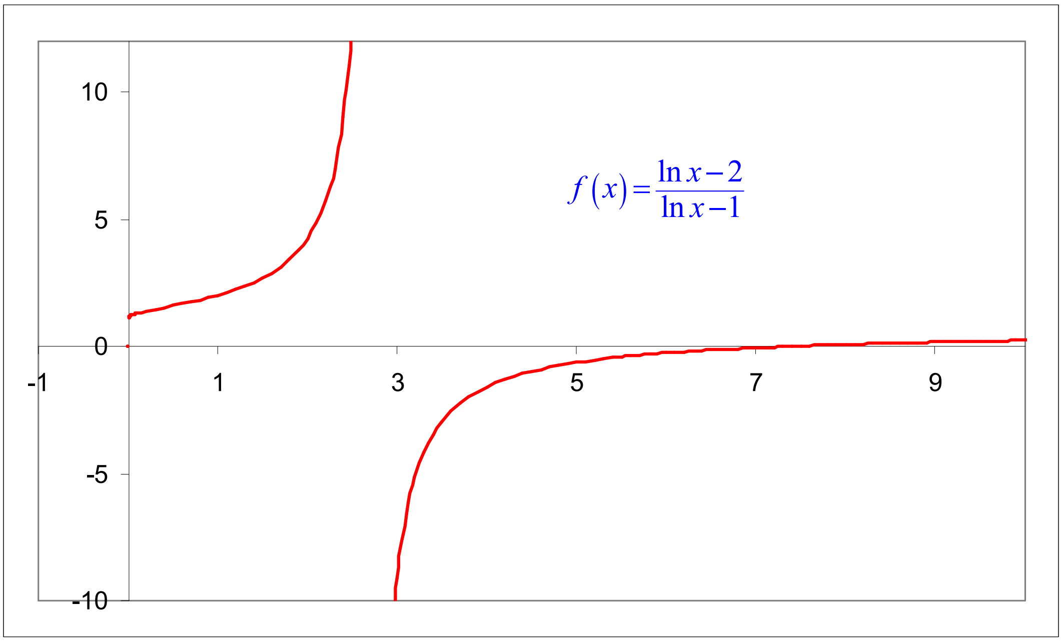
Donc, il n'y a pas d'extremums

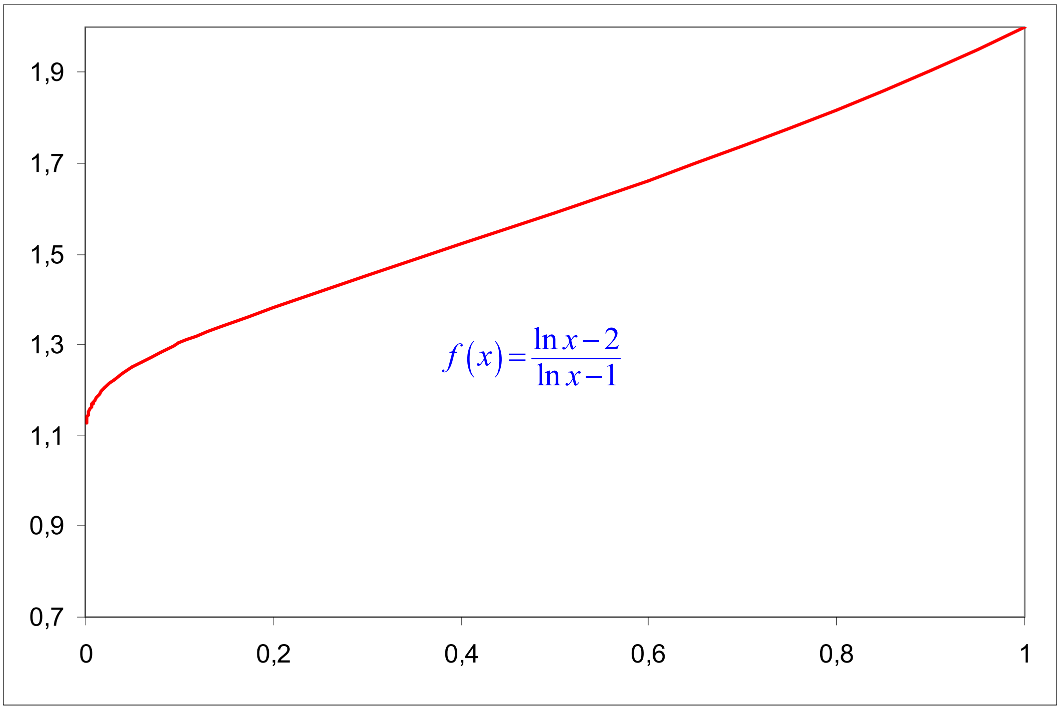
$$f''(x)=-\frac{1}{x^2(\ln x-1)^4}\left((\ln x-1)^2+x.2(\ln x-1)\frac{1}{x}\right)=-\frac{\ln x+1}{x^2(\ln x-1)^3}$$

	0		$\frac{1}{e}$		e	
$-(\ln x+1)$	/	$-$	0	+	+	+
$\ln x-1$	/	$-$	$-$	$-$	0	+
$f''(x)$	/	+	0	$-$	/	0

$\to$ un point d'inflexion $x=\frac{1}{e}\simeq 0.37$

Ce point d'inflexion est difficile à voir. La figure 2 donne un zoom pour le visualiser.





Résolu le 15 août 2005

EXANA136 – ERM, 2004.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a) } I_1=\int_{3\sqrt{3}}^{4\sqrt{2}}\frac{12}{x\sqrt{36-x^2}}dx$$

$$\text{b) } I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\left(1+\cos^2 x\right)dx$$

$$a)\ I_1=\int_{3\sqrt{3}}^{4\sqrt{2}}\frac{12}{x\sqrt{36-x^2}}dx$$

$$\text{Posons : } t^2=36-x^2\rightarrow\begin{cases}x=\sqrt{36-t^2}\rightarrow dx=-\dfrac{t}{\sqrt{36-t^2}}dt\\ \text{si } x=4\sqrt{2}\rightarrow t=2\\ \text{si } x=3\sqrt{3}\rightarrow t=3\end{cases}$$

$$\rightarrow I_1=-\int_3^2\frac{12}{36-t^2}dt=\int_2^3\frac{dt}{6-t}+\int_2^3\frac{dt}{6+t}=\left[\ln\left|\frac{6+t}{6-t}\right|\right]_2^3=\ln 3-\ln 2\simeq 0.4055$$

$$b)\ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\ln\left(1+\cos^2 x\right)dx$$

$$\text{Par parties : }\begin{cases}f'=\cos x & \rightarrow f=\sin x\\ g=\ln\left(1+\cos^2 x\right) & \rightarrow g'=-\dfrac{2\cos x\sin x}{1+\cos^2 x}\end{cases}$$

$$I_2=\left[\sin x\ln\left(1+\cos^2 x\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}dx$$

Le premier terme est nul.

$$\text{Posons : } t=\sin x\rightarrow\begin{cases}dt=\cos x dx\\ 1+\cos^2 x=2-t^2\\ \text{si } x=\dfrac{\pi}{2}\rightarrow t=1\\ \text{si } x=0\rightarrow t=0\end{cases}$$

$$\rightarrow I_2=\int_0^1\frac{2t^2}{2-t^2}dt=-2\int_0^1 dt+\int_0^1\frac{4}{2-t^2}dt=-2+\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-t}dt+\int_0^1\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+t}dt$$

$$=-2+\sqrt{2}\left[\ln\left|\frac{\sqrt{2}+t}{\sqrt{2}-t}\right|\right]_0^1=-2+\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\simeq 0.4929$$

Résolu le 15 août 2005

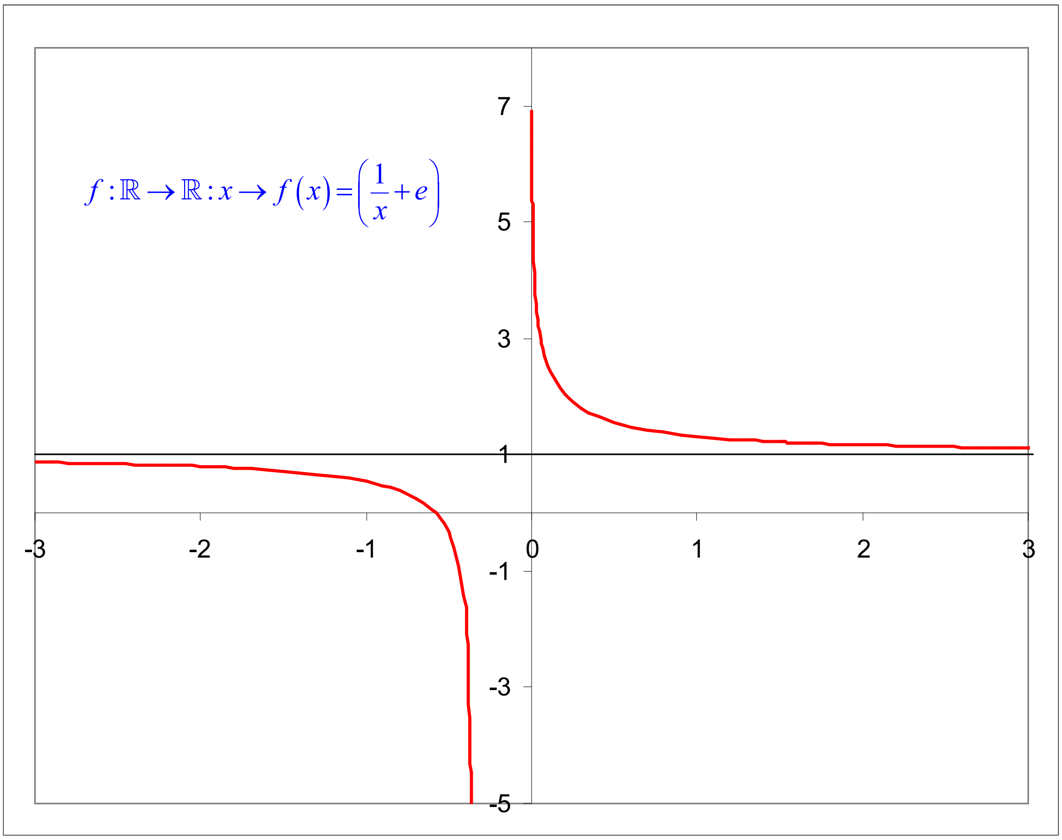
EXANA137 – ERM, 2004.

Etudier la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to f(x) = \left(\frac{1}{x} + e\right)$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique)

Remarque : e ≃ 2.7



1) On doit avoir : $\dfrac{1}{x}+e>0 \to \dfrac{1}{x}>-e$

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \to x>-\dfrac{1}{e} \to x>0 \\ x<0 \to x<-\dfrac{1}{e} \to x<-\dfrac{1}{e} \end{array}\right\} \to \text{dom } f :]-\infty,-\frac{1}{e}[\cup]0,+\infty[$$

2) Racine : $\ln\left(\dfrac{1}{x}+e\right)=0 \to \dfrac{1}{x}+e=1 \to x=\dfrac{1}{1-e} \simeq -0.582$

3) $\lim\limits_{x \xrightarrow{<} -\frac{1}{e}} f(x)=-\infty \to \text{AO} \equiv x=-\dfrac{1}{e}$

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)=+\infty \to \text{AO} \equiv x=0$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e=1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e=1 \end{array}\right\} \to \text{AH} \equiv y=1$$

4) $$f'(x)=\frac{1}{\frac{1}{x}+e}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x(1+ex)} \to \begin{cases} x>0 \quad \to f'(x)<0 : f(x) \text{ décroissante} \\ x>-\frac{1}{e} \to f'(x)<0 : f(x) \text{ décroissante} \end{cases}$$

Il n'y a pas d'extremums

5) $$f''(x)=\frac{1}{x^2(1+ex)^2}(1+ex+ex)=\frac{1+2ex}{x^2(1+ex)^2}$$

$f''(x)=0$ si $1+2ex=0 \to x=-\dfrac{1}{2e}$ qui est hors du domaine

$x>0 \quad \to f''(x)>0 \to f(x)$ a une concavité positive

$x<-\dfrac{1}{e} \to f''(x)<0 \to f(x)$ a une concavité négative

Résolu le 15 août 2005

EXANA138 – ERM, 2004.

Calculer les intégrales suivantes :

$$\text{a)}\quad I_1 = 18\int_0^{\ln 2} e^{3x}\ln\left(1+e^x\right)dx$$

$$\text{b)}\quad I_2 = \int_0^{2} \frac{5t^2}{\left(1+t\right)\left(4+t^2\right)}dt$$

$$a)\ I_1 = 18\int_0^{\ln 2} e^{3x}\ln\left(1+e^x\right)$$

$$\text{Par parties : }\begin{cases} f' = e^{3x} & \rightarrow f = \dfrac{e^x}{3} \\ g = \ln\left(1+e^x\right) & \rightarrow g' = \dfrac{e^x}{1+e^x} \end{cases}$$

$$\rightarrow I_1 = 6\left\{\left[e^{3x}\ln\left(1+e^x\right)\right]_0^{\ln 2} - \int_0^{\ln 2}\frac{e^{4x}}{1+e^x}dx\right\}$$

Soit A le premier terme de la parenthèse: $A = e^{\ln 2^3}\ln\left(1+e^{\ln 2}\right) - \ln 2 = 8\ln 3 - \ln 2$

Soit B le deuxième terme de la parenthèse :

$$B = \int_0^{\ln 2}\frac{e^{4x}}{1+e^x}dx = \int_0^{\ln 2}\frac{e^{3x}}{1+e^x}d\left(e^x\right)$$

$$\text{Posons } t = e^x \rightarrow \begin{cases} x = 0 & \rightarrow t = 1 \\ x = \ln 2 & \rightarrow t = 2 \end{cases} \rightarrow B = \int_1^2 \frac{t^3}{1+t}dt = \int_1^2\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$\rightarrow B = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln\left(1+t\right)\right]_1^2 = \frac{11}{6} + \ln 2 - \ln 3$$

$$\text{Finalement : } I_1 = 6\left(A-B\right) = 6\left(8\ln 3 - \ln 2 - \frac{11}{6} - \ln 2 + \ln 3\right) = 54\ln 3 - 12\ln 2 - 11 \simeq 40$$

$b)\ I_2=\int_0^2 \frac{5t^2}{(1+t)(4+t^2)}\,dt$

Décomposons en fractions rationnelles : $\frac{5t^2}{(1+t)(4+t^2)}=\frac{a}{1+t}+\frac{bt+c}{4+t^2}$

Après identification, nous obtenons $\begin{cases} a+b=5 \\ b+c=0 \\ 4a+c=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=4 \\ c=-4 \end{cases}$

$$\rightarrow I_2=\int_0^2\left(\frac{1}{1+t}+\frac{4t}{4+t^2}-\frac{4}{4+t^2}\right)dt=\left[\ln(1+t)\right]_0^2+\int_0^2\frac{2d\left(t^2+4\right)}{4+t^2}+2\int_0^2\frac{1}{1+\left(\frac{t}{2}\right)^2}d\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$=\left[\ln(1+t)+2\ln\left(4+t^2\right)-2\arctan\frac{t}{2}\right]_0^2=\ln 3+2\ln 2-\frac{\pi}{2}\simeq 0.9141$$

Résolu le 15 août 2005

EXANA139 – ERM, 2003.

Calculer :

$$I=\frac{1}{\sqrt{3}}\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{96}{x^4\sqrt{4-x^2}}dx$$

Soit: $x=2\sin t\rightarrow\begin{cases}dx=2\cos t dt\\ x=\sqrt{3}\rightarrow\sin t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\rightarrow t=\dfrac{\pi}{3}\\ x=1\quad\rightarrow\sin t=\dfrac{1}{2}\quad\rightarrow t=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$

$$\rightarrow I=\frac{96}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{2\cos t}{2^4\sin^4 t.2\cos t}dt=\frac{6}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^4 t}dt=\frac{6}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\sin^4 t}dt$$

$$=\frac{6}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2 t}dt+\frac{6}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 t}{\sin^4 t}dt=\frac{6}{\sqrt{3}}\left[-\cot t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}+\frac{6}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^4 t}{\sin^4 t}.\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$=\frac{6}{\sqrt{3}}\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{3}\right]+\frac{6}{\sqrt{3}}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^4 t}.d\tan t\qquad \text{car } d\tan t=\frac{1}{\cos^2 t}dt$$

$$=4+\frac{6}{\sqrt{3}}\left[-\frac{1}{3}\cot^3 t\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=4+\frac{6}{\sqrt{3}}\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\sqrt{3}\right)^3\right]$$

$$=4+6\left(-\frac{1}{27}+1\right)=4+\frac{52}{9}=\frac{88}{9}$$

Résolu le 27 juillet 2005