**Exercices résolus de mathématiques.**

# Analyse

# ANA 18

EXANA0180 – EXANA189

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

# EXANA180 – Liège, juillet 2007.

Soit la fonction

$$f(x) = \alpha x e^{-\beta x} + \gamma x$$

Où $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ sont des paramètres strictement positifs.

1. Déterminez le domaine de définition de *f* en fonction des paramètres $\alpha$,$\beta$ et $\gamma$.
2. Déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de *f*.
3. Déterminez les valeurs $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ pour que $f(x)$ présente un point d'inflexion à tangente horizontale en $x = 1$ et la tangente en $x = 0$ soit donnée par $g(x) = 2x$
4. Montrez que la dérivée de *f* ne s'annule qu'une seule fois sur le domaine de définition si on utilise les valeurs des paramètres déterminées ci-dessus.
5. Esquissez le graphe de *f* avec les valeurs des paramètres déterminées au point 3)

---

1. La fonction est une exponentielle standard ajoutée à une droite. Il n'y a donc aucune restriction sur le domaine : $\text{dom} f = \mathbb{R} \quad \forall\, \alpha, \beta, \gamma$

2. N'ayant aucune restriction sur le domaine, il n'y a pas d'asymptote verticale envisageable. Etudions donc les éventuelles asymptotes obliques ou horizontales par la méthode de Cauchy (asymptote $\equiv y = kx + t$) :

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\alpha e^{-\beta x} + \gamma\right) = \begin{cases} \text{Limite vers } -\infty : \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\alpha e^{-\beta x} + \gamma\right) = +\infty : \text{Donc pas d'asymptote} \\ \text{Limite vers } +\infty : \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\alpha e^{-\beta x} + \gamma\right) = \gamma \end{cases}$$

$$t = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - kx\right) = \lim_{x\to+\infty} \alpha x e^{-\beta x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x}{e^{\beta x}} \xrightarrow{HOSPITAL} \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha}{\beta e^{\beta x}} = 0$$

Pour $x \longrightarrow +\infty$, la fonction admet donc une asymptote oblique d'équation : $y = \gamma x$

3. Remettons les conditions sous forme mathématique :
   - Point d'inflexion en zéro : $f''(1)=0$
   - Tangente horizontale au point d'inflexion : $f'(1)=0$
   - Tangente en $x = 0$ donnée par $y = 2x$ : $f'(0)=2$ et $f(0)=g(0)=0$

Notons que la dernière condition est toujours satisfaite.
Nous avons donc trois équations à 3 inconnues .....c'est parti :

Calculons la dérivée première et seconde :

$$f'(x)=-\beta\alpha xe^{-\beta x}+\alpha e^{-\beta x}+\gamma$$
$$f''(x)=-2\beta\alpha e^{-\beta x}+\beta^2\alpha xe^{-\beta x}$$

En utilisant les conditions :

$$f''(x)=-2\beta\alpha e^{-\beta x}+\beta^2\alpha xe^{-\beta x}\Rightarrow\boxed{\beta=2}$$

$$\begin{cases} f'(1)=0\Leftrightarrow-\beta\alpha e^{-\beta}+\alpha e^{-\beta}+\gamma=0\Leftrightarrow-\alpha e^{-2}+\gamma=0 \\ f'(0)=2\Leftrightarrow\alpha+\gamma=2\end{cases}\Rightarrow\boxed{\begin{array}{l}\alpha\approx1{,}762\\ \gamma\approx0{,}238\end{array}}$$

4. Nous travaillons donc maintenant avec notre fonction connue et les valeurs précises de nos 3 paramètres :

$$\alpha=\frac{2}{e^{-2}+1}$$
$$\beta=2$$
$$\gamma=2-\alpha$$

Il faut prouver que $f'(x)$ ne s'annule qu'une seule fois. Il faut donc :

$$f'(x)=-2\alpha xe^{-2x}+\alpha e^{-2x}+\gamma=e^{-2x}\left(-2\alpha x+\alpha+\gamma e^{2x}\right)=0$$

Ou encore, comme une exponentielle n'est jamais nulle :

$$-2\alpha x+\alpha+\gamma e^{2x}=0\Leftrightarrow\gamma e^{2x}=2\alpha x-\alpha$$

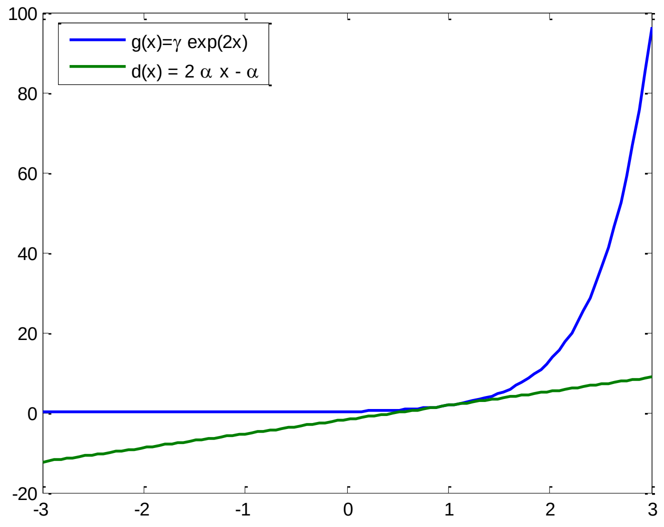
Cela revient géométriquement à trouver l'intersection entre une exponentielle standard et une droite croissante ne passant pas par l'origine.
Trois possibilités s'offrent à nous :

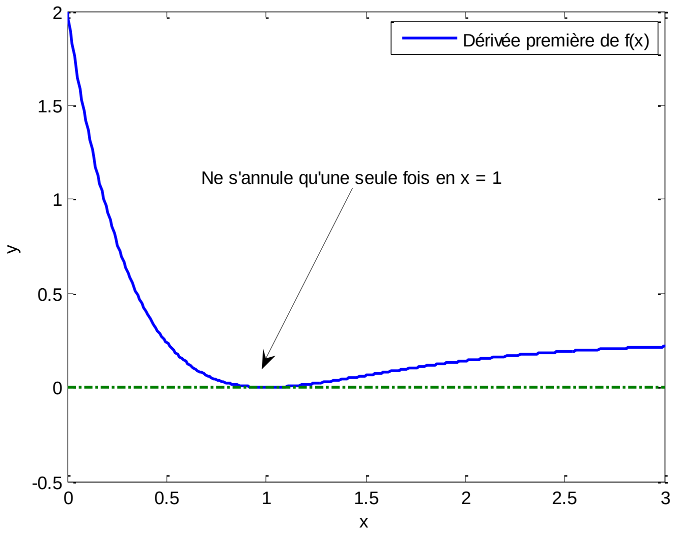
- La droite n'a aucune intersection avec l'exponentielle : cette situation n'est pas envisageable car nous avons calculé les paramètres de telle sorte à ce que la dérivée s'annule en $x = 1$ et donc il y a au moins une intersection entre nos deux courbes.
- La droite n'étant pas horizontale, la seule façon de n'avoir qu'une seule intersection entre les deux courbes est la tangence de la droite à l'exponentielle.
- Dans les autres cas, il y a deux intersections.

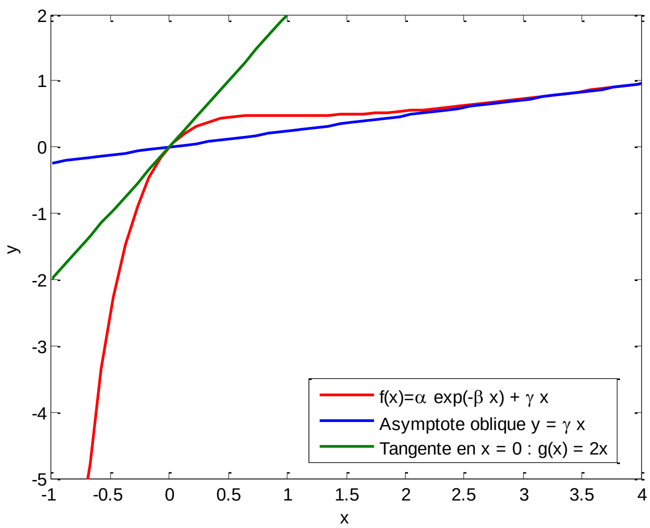
Bref, pour montrer que la dérivée ne s'annule qu'une seule fois, il suffit de vérifier que la droite $d(x)=2\alpha x-\alpha$ est tangente à la courbe $g(x)=\gamma e^{2x}$ en tenant compte que si elle est tangente, cela ne peut être qu'en $x = 1$.

En effet, on vérifie bien que :

$$g(1)=d(1)\approx1{,}762 \qquad \text{et} \qquad g'(1)=2\alpha\approx3{,}523$$




Le 7 juillet 2007. Modifié le 8 juillet 09 (Carmelo DI NOLFO)

## EXANA181 – Liège, juillet 2007.

On dit que deux fonctions réelles $f$ et $g$ sont orthogonales sur un intervalle $[a,b]$ lorsque

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

1. Pour quelles valeurs strictement positives $m$ et $n$ les fonctions $\varphi_n(x) = \sin nx$ et $\varphi_m(x) = \sin mx$ sont-elles orthogonales sur $[-\pi,\pi]$ ?
2. On définit les polynômes de Legendre par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n.n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n, \qquad n = 0,1,2,......$$

Ces polynômes vérifient

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_n(x)\right] = -n(n+1)P_n(x)$$

a) Déterminez $P_1$ et $P_2$ et montrez que ceux-ci sont orthogonaux sur $[-1,1]$
b) Etudiez la parité de $P_n$ pour tout entier $n > 0$
c) Calculer $\int_{-1}^{1} P_n(x)dx$ pour tout $n > 0$
d) Montrez que $\forall\ m, n \in \mathbb{N}$

$$\int_{-1}^{1} n(n+1)P_n(x)P_m(x)dx = \int_{-1}^{1} m(m+1)P_n(x)P_m(x)dx$$

Et déduisez-en les valeurs entières de $m$ et de $n$ pour lesquelles $P_m(x)$ et $P_n(x)$ sont orthogonaux sur $[-1,1]$

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

1. Commençons par calculer l'intégrale demandée :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos\left((n-m)x\right) - \cos\left((n+m)x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\left((n-m)x\right)}{n-m} - \frac{\sin\left((n+m)x\right)}{n+m}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{\sin\left((n-m)\pi\right)}{n-m} - \frac{\sin\left((n+m)\pi\right)}{n+m}$$

Pour que les deux fonctions soient orthogonales, il faut donc :

$$\frac{\sin\left((n-m)\pi\right)}{n-m} = \frac{\sin\left((n+m)\pi\right)}{n+m}$$

Il est évident que cette équation est vérifiée pour tous les m et n naturels qui offriront à chaque fois un multiple entier de $\pi$ dans l'argument des deux sinus qui vaudront alors tous les deux zéro.

$$\Rightarrow \varphi_n(x) \text{ et } \varphi_m(x) \text{ orthogonales } \forall\ n, m \in \mathbb{N}$$

2. On a donc $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left(x^2-1\right)^n$ qui vérifie $\dfrac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\dfrac{d}{dx}P_n(x)\right]=-n(n+1)P_n(x)$

(a)
$$P_1(x)=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2-1\right)=x$$
$$P_2(x)=\frac{1}{8}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2-1\right)^2=\frac{1}{2}\left(3x^2-1\right)$$

(b) Le produit est impair, si l'on intègre dans un intervalle symétrique à 0,
le résultat sera nul et donc sans calculer :

$$\int_{-1}^{1}P_1(x)P_2(x)dx=0 \;\Rightarrow\; P_1\left(x\right) \text{ et } P_2\left(x\right) \text{ sont bien orthogonaux}$$

En calculant $P_3\left(x\right)$, on commence à se rendre compte du mécanisme de calcul des dérivées successives des polynômes de Legendre et on constate que :

- $P_n\left(x\right)$impair $\forall\, n\in\mathbb{N}$ impair
- $P_n\left(x\right)$pair $\forall\, n\in\mathbb{N}$ pair

(c) On peut donc en déduire que :

- $\int_{-1}^{1}P_n(x)dx=0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}$ impair car intervalle symétrique par rapport à zéro.
- $\int_{-1}^{1}P_n(x)dx=2\int_{0}^{1}P_n(x)dx=0 \quad \forall\, n\in\mathbb{N}_0$ pair
- $\int_{-1}^{1}P_n(x)dx=2\int_{0}^{1}P_n(x)dx=2 \quad n=0$

Les deux dernières intégrales demandent un peu plus de réflexion.
Il faut remarquer que tous les polynômes de Legendre pairs ont un terme indépendant et donc leur primitive en zéro vaudra toujours zéro.

L'intégrale recherchée est donc en fait, en vertu du théorème fondamental des intégrales, la primitive du polynôme en $x = 1$.

Or il est donné dans l'énoncé que ces polynômes vérifient l'égalité suivante :

$$\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_n(x)\right]=-n(n+1)P_n(x)$$

En intégrant une fois on a :

$$\int P_n(x)dx=-\frac{\left(1-x^2\right)}{n(n+1)}\left(\frac{d}{dx}P_n(x)\right)+C$$

La primitive des polynômes sont donc proportionnelles à $\left(1-x^2\right)$ et donc valent une constante $C$ en $x=1$.

Il reste à déterminer cette constante. Notre relation est valable $\forall n\in\mathbb{N}_0$ pair (fraction en $1/n$ ) et donc si on trouve une valeur de $C$ pour $n = 2$, cette valeur sera valable $\forall n\in\mathbb{N}_0$ pair.

Pour $P_2\left(x\right)$ on a :

$$C=2\int_0^1 P_2(x)dx=\int_0^1\left(3x^2-1\right)dx=\left[x^3-x\right]_0^1=0 \qquad \forall n\in\mathbb{N}_0 \text{ pair.}$$

En ce qui concerne le cas $n=0$, il suffit de se placer dans le cas particulier et de calculer.

(d) Calculons d'abord le terme de gauche à l'aide de la propriété de l'énoncé :

$$I_1=\int_{-1}^{1}\left[n(n+1)P_n(x)\right]P_m(x)dx=\int_{-1}^{1}\left[-\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_n(x)\right]\right]P_m(x)dx$$

par parties:
$$\begin{cases} u=\left[-\frac{d}{dx}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_n(x)\right]\right]\to du=\left[-\frac{d^2}{dx^2}\left[\left(1-x^2\right)\frac{d}{dx}P_n(x)\right]\right]dx \\ dv=P_m(x)dx\to v=\int_{-1}^{1}P_n(x)dx=0 \end{cases}$$

Il en va de même pour le terme de droite.

Nous avons donc $\forall n,m,n\neq m\in\mathbb{N}_0$ (voir point sous question précédente pour $n=0$ )

$$\int_{-1}^{1}n(n+1)P_n(x)P_m(x)dx=\int_{-1}^{1}m(m+1)P_n(x)P_m(x)dx=0$$

Pour le cas particulier $n=0$ (ou $m$), la relation devient

$$0=\int_{-1}^{1}m(m+1)P_0(x)P_m(x)dx\Leftrightarrow 0=\int_{-1}^{1}P_m(x)dx \quad \text{relation valable pour } m\neq 0 \text{ donc } m\neq n$$

On en conclut que $P_n\left(x\right)$ et $P_m\left(x\right)$sont orthogonales $\forall n,m\in\mathbb{N}$ avec $m\neq n$

Le 7 juillet 2007

# EXANA182 – ERM, juillet 2003.

a) Calculer : $\int \frac{2+3t}{t}\ dt$

b) Calculer : $\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$ .

c) Calculer : $\int \tan^2 x\ \ dx$ .

---

**Solution proposée par Benoit Baudelet**

$a)\quad \int \frac{2+3t}{t}\ dt = \int \left(\frac{2}{t}+3\right)dt = \boxed{2\ln|t|+3t+k}.$

$b)$ On a très rapidement grâce à la règle de l'Hospital :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{x^4-81}{2x^2-5x-3} &= \left(\frac{0}{0}\right)\\ &\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 3} \frac{4x^3}{4x-5}\\ &= \frac{4.3^3}{4.3-5}\\ &= \boxed{\frac{108}{7}}\end{aligned}$$

$c) \int \tan^2 x\ \ dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\ dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\ dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \boxed{\tan x - x + k}.$

---

Le 7 juillet 2007. Relu par Steve Tumson

## EXANA183 – ERM, juillet 2003.

On donne la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to\dfrac{3x^3+4x^2-5x-2}{2x^2+3x-2}$.

Déterminer les équations des asymptotes

---

**Solution proposée par Benoit Baudelet**

Après quelques calculs de factorisation, on obtient $\dfrac{(3x+1)(x-1)(x+2)}{(2x-1)(x+2)}$

- $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}\setminus\left\{-2;\dfrac{1}{2}\right\}$.
- Asymptotes verticales :

  a) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{(3x+1)(x-1)(x+2)}{(2x-1)(x+2)}=\pm\infty\to\Rightarrow\boxed{A.V.\equiv x=\dfrac{1}{2}}$

  b) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(3x+1)(x-1)\cancel{(x+2)}}{(2x-1)\cancel{(x+2)}}=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{(3x+1)(x-1)}{(2x-1)}=-3\Rightarrow$ pas d'A.V.

- Asymptotes horizontales : Aucune car $d°(N)>d°(D)$.

- Asymptotes obliques :

  o $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(x-1)(x+2)(3x+1)}{x(2x-1)(x+2)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^2}{2x^2}=\boxed{\dfrac{3}{2}}$

  o $p=\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{(x-1)(x+2)(3x+1)}{(2x-1)(x+2)}-\dfrac{3x}{2}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-x}{4x}=\boxed{\dfrac{-1}{4}}$

  D'où $\boxed{A.O.\equiv y=\dfrac{3}{2}x-\dfrac{1}{4}}$.

---

Le 7 juillet 2007. Relu par Steve Tumson

# EXANA184 – ERM, juillet 2003.

On donne la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\dfrac{4x}{x^2+1}$. On demander de chercher les abscisses des minima.

---

**Solution proposée par Benoit Baudelet**

- dom $f=\mathbb{R}$
- $f'(x)=\left(\dfrac{4x}{x^2+1}\right)'=\dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ et $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ ou $x=1$.
- <u>Tableau de signes</u> :

| $x$ | | $-1$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)=\dfrac{4(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | *Min* | $\nearrow$ | *Max* | $\searrow$ |

Conclusion : la fonction atteint son minimum lorsque $x=-1$
et son maximum lorsque $x=1$.

---

Le 17 juillet 2007. Relu par Steve Tumson

# EXANA185 – Bruxelles, septembre 1997.

Calculer $\int x.\arctan x \; dx$ .

---

**Solution proposée par Benoit Baudelet**

On utilise la formule d'intégration par parties avec

$$u(x) = \arctan x \qquad u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$v(x) = \frac{x^2}{2} \qquad v'(x) = x$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int x.\arctan x \; dx &= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\arctan x + k \\
&= \boxed{\frac{x^2+1}{2}\arctan x - \frac{x}{2} + k}
\end{aligned}$$

---

Le 17 juillet 2007. Relu par Steve Tumson

## EXANA186 – Bruxelles, septembre 1997.

Calculer $\int_1^{e^5} \frac{\lfloor \ln x \rfloor}{x}\,dx$

---

**Solution proposée par Benoit Baudelet**

Bien que compliquée en apparence, cette intégrale se traite en deux coups de cuiller à pot lorsqu'on regarde le numérateur attentivement sur le domaine $\left[1;e^5\right]$ :

$$\lfloor \ln x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{sur } [1;e] \\ 1 & \text{sur } ]e;e^2] \\ 2 & \text{sur } ]e^2;e^3] \\ 3 & \text{sur } ]e^3;e^4] \\ 4 & \text{sur } ]e^4;e^5] \end{cases}$$

Donc l'intégrale de départ peut se réécrire

$$\begin{aligned} \int_1^{e^5} \frac{\lfloor \ln x \rfloor}{x}\,dx &= \int_1^{e} 0\,dx + \int_e^{e^2} \frac{1}{x}\,dx + \int_{e^2}^{e^3} \frac{2}{x}\,dx + \int_{e^3}^{e^4} \frac{3}{x}\,dx + \int_{e^4}^{e^5} \frac{4}{x}\,dx \\ &= [\ln x]_e^{e^2} + 2[\ln x]_{e^2}^{e^3} + 3[\ln x]_{e^3}^{e^4} + 4[\ln x]_{e^4}^{e^5} \\ &= (2-1) + 2.(3-2) + 3.(4-3) + 4.(5-4) = \boxed{10} \end{aligned}$$

---

Le 17 juillet 2007. Relu par Steve Tumson

## EXANA187 – Bruxelles, septembre 1999.

Calculer $\int_0^{13} \lfloor \sqrt{x} \rfloor \, dx$

---

**Solution proposée par Benoit Baudelet**

Bien que compliquée en apparence, cette intégrale se traite en deux coups de cuiller à pot lorsqu'on regarde attentivement le comportement de la fonction $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ sur le domaine $[0;13]$ :

$$\lfloor \sqrt{x} \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{sur } [0;1[ \\ 1 & \text{sur } [1;4[ \\ 2 & \text{sur } [4;9[ \\ 3 & \text{sur } [9;13[ \end{cases}$$

Donc l'intégrale de départ peut se réécrire

$$\begin{aligned} \int_0^{13} \lfloor \sqrt{x} \rfloor dx &= \int_0^1 0 \, dx + \int_1^4 1 \, dx + \int_4^9 2 \, dx + \int_9^{13} 3 \, dx \\ &= 0 + 1.(4-1) + 2.(9-4) + 3.(13-9) = \boxed{25} \end{aligned}$$

---

Le 17 juillet 2007. Relu par Steve Tumson

# EXANA188 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 1995.

Si $p$ et $q$ sont deux nombres entiers, calculer

$$I(p,q)=\int_0^{\pi}\sin(px).\cos(qx)\,dx.$$

---

**Solution proposée par Benoit Baudelet**

- Calculons d'abord la primitive associée : $\int \sin(px).\cos(qx)\,dx$ .

  Grâce aux formules de Simpson, on a

$$\begin{aligned}\int \sin(px).\cos(qx)\,dx &= \frac{1}{2}\int\left(\sin(p-q)x+\sin(p+q)x\right)dx\\ &=\begin{cases}\dfrac{-1}{2}\cdot\left(\dfrac{\cos(p-q)x}{p-q}+\dfrac{\cos(p+q)x}{p+q}\right)+k & si\ |p|\neq|q|\\ \dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{\cos(p+q)x}{p+q}+k & si\ \ p=q\\ \dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{\cos(p-q)x}{p-q}+k & si\ \ p=-q\end{cases}\end{aligned}$$

- Calcul de l'intégrale :

$\boxed{\text{1e cas : } p=q}$

Dans ce cas, $I(p,q)=\left[\dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{\cos(p+q)x}{p+q}\right]_0^{\pi}=\dfrac{-1}{2}\left[\dfrac{\cos 2px}{2p}\right]_0^{\pi}=\dfrac{-1}{4p}\left(\underbrace{\cos 2p\pi}_{=1}-\underbrace{\cos 0}_{=1}\right)=\boxed{0}$

$\boxed{\text{2e cas : } p=-q}$

Dans ce cas $I(p,q)=\left[\dfrac{-1}{2}\cdot\dfrac{\cos(p-q)x}{p-q}\right]_0^{\pi}=\dfrac{-1}{2}\left[\dfrac{\cos 2px}{2p}\right]_0^{\pi}=\dfrac{-1}{4p}\left(\underbrace{\cos 2p\pi}_{=1}-\underbrace{\cos 0}_{=1}\right)=\boxed{0}$

$\boxed{\text{3e cas : } |p| \neq |q|}$

a) Si $p$ et $q$ sont de même parité (alors $p+q$ et $p-q$ sont pairs), alors

$$\begin{aligned}
I &= \frac{-1}{2}\left[\frac{\cos(p-q)x}{p-q}+\frac{\cos(p+q)x}{p+q}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{-1}{2}\left[\left(\frac{\overbrace{\cos(p-q)\pi}^{=1 \text{ car } p-q \text{ est pair}}}{p-q}+\frac{\overbrace{\cos(p+q)\pi}^{=1 \text{ car } p+q \text{ est pair}}}{p+q}\right)-\left(\frac{\overbrace{\cos(p-q)0}^{=1}}{p-q}+\frac{\overbrace{\cos(p+q)0}^{=1}}{p+q}\right)\right] \\
&= \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{p-q}+\frac{1}{p+q}-\frac{1}{p-q}-\frac{1}{p+q}\right) \\
&= \boxed{0}
\end{aligned}$$

b) Si $p$ et $q$ sont de parité différente (alors $p+q$ et $p-q$ sont impairs), alors

$$\begin{aligned}
I &= \frac{-1}{2}\left[\frac{\cos(p-q)x}{p-q}+\frac{\cos(p+q)x}{p+q}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{-1}{2}\left[\left(\frac{\overbrace{\cos(p-q)\pi}^{=-1 \text{ car } p-q \text{ est impair}}}{p-q}+\frac{\overbrace{\cos(p+q)\pi}^{=-1 \text{ car } p+q \text{ est impair}}}{p+q}\right)-\left(\frac{\overbrace{\cos(p-q)0}^{=1}}{p-q}+\frac{\overbrace{\cos(p+q)0}^{=1}}{p+q}\right)\right] \\
&= \frac{-1}{2}\left(\frac{-1}{p-q}+\frac{-1}{p+q}-\frac{1}{p-q}-\frac{1}{p+q}\right) \\
&= \boxed{\frac{2p}{p^2-q^2}}
\end{aligned}$$

Le 17 juillet 2007. Relu par Steve Tumson

# EXANA189 – FPMS – Mons, juillet 2003.

Etudier la fonction suivante :

$$y = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$$

La dérivée seconde est à calculer.

---

**Solution proposée par Steve Tumson**

1. Domaine : $\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty,-1\right[ \cup \left[1,+\infty\right[$

2. Asymptotes :
   - Verticales : envisageable en $x=-1$

$$\lim_{x\to -1^-} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = -1\sqrt{\frac{-2}{0^-}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \text{ n'a aucun sens au vu du domaine}$$

   - Oblique : règle de Cauchy ( forme $y = kx + t$ )

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = 1$$

$$t = \lim_{x\to\infty} f(x) - kx = \lim_{x\to\infty}\left( x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - x \right) = \lim_{x\to\infty}\left( \frac{x\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left( \frac{x\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x+1}} \frac{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)}{\left(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1}\right)} \right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-1}+x+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x}{|x|\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}\right)} = -1$$

La fonction admet donc

une asymptote verticale $x=-1$ et une oblique $y = x-1$

3 Variation : l'étude de la variation nécessite le calcul de la dérivée première

$$f'(x)=\frac{df}{dx}=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}+x\frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}$$

$$=\frac{\frac{x-1}{\cancel{x+1}}(x+1)^{\cancel{2}}+x}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}=\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

Concavité : l'étude de la concavité nécessite le calcul de la dérivée seconde :

$$f''(x)=\frac{d^2f}{dx^2}=\left(\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right)'=\left(\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}.\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right)'$$

$$=\frac{(2x+1)\cancel{(x+1)}-(x^2+x-1).2.\cancel{(x+1)}}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}}.\frac{1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$+\frac{x^2+x-1}{(x+1)^2}.\left(-\frac{1}{\cancel{2}}.\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3}}.\frac{\cancel{2}}{(x+1)^2}\right)$$

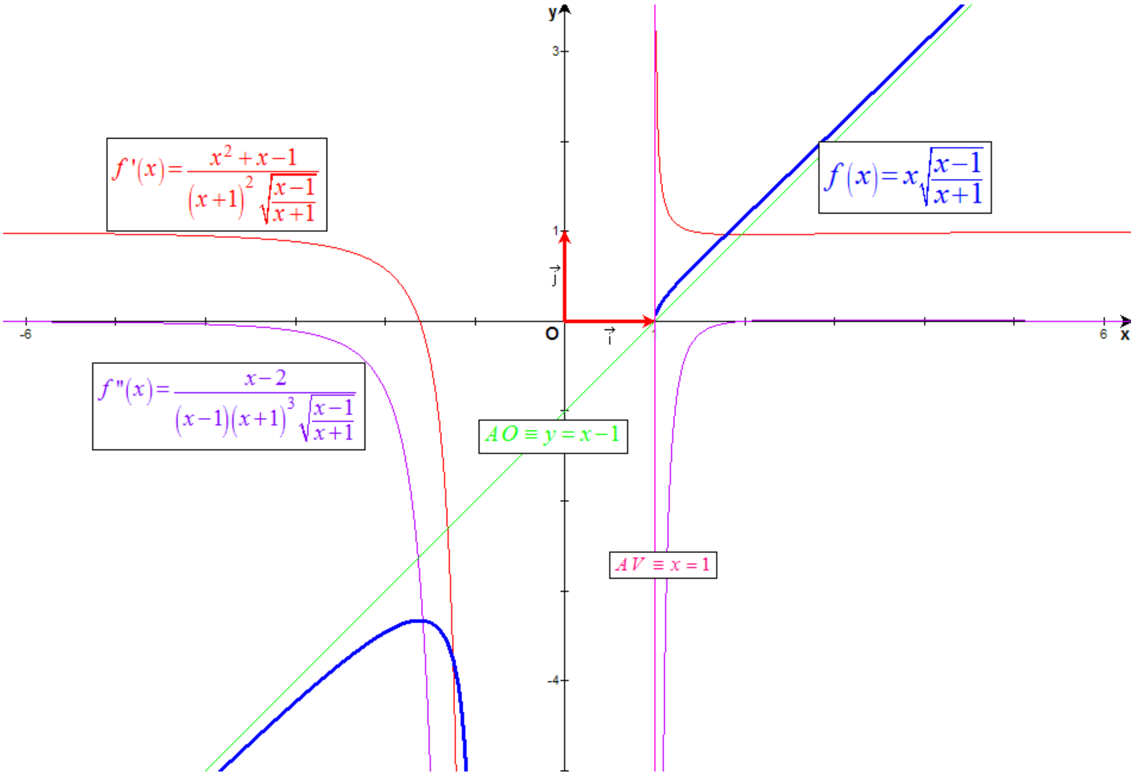
$$=\frac{x+3}{(x+1)^3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}-\frac{x^2+x-1}{(x+1)^{\cancel{4}\,3}\frac{x-1}{\cancel{x+1}}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

$$=\frac{1}{(x-1)(x+1)^3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\left((x+3)(x-1)-(x^2+x-1)\right)$$

$$=\frac{x-2}{(x-1)(x+1)^3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}$$

Tableau des variations

| | | $-1.6$ | | $-1$ | | $0.6$ | | $1$ | | $2$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+x+1$ | $+$ | $0$ | $-$ | $-$ | $-$ | $0$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f'(x)$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $+$ | $+$ | $+$ |
| $f''(x)$ | $-$ | $-$ | $-$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $\nexists$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $Max$ $\cap$ | $\searrow$ | $]--$ | $\notin \text{dom } f$ | $---$ | $--[$ | $0$ | $\nearrow$ $\cap$ | $I$ | $\nearrow$ $\cup$ |




Le 22 juillet 2007.