Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 20

EXANA200 – EXANA209

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Juillet 08

EXANA200 – **FPMS – Mons, Juillet 2004. (ANA05.04)**

Etudier la fonction

$$f(x) = -\frac{x}{3} + \frac{\ln x}{x^2}$$

Solution proposée par l'université

1. Domaine: $\mathbb{R}_0^+$, l'ensemble des nombres réels positifs.
2. Asymptotes
   - Verticale: $\lim_{x \to 0+} f(x) = -\infty$
     $f(x)$ admet une asymptote verticale en $x = 0^+$.
   - Horizontale: $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$; pas d'AH.
   - Oblique: $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(-\frac{1}{3} + \frac{\ln x}{x^3}\right) = -\frac{1}{3}$ et $\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{3}x\right) = 0.$
     $f(x)$ admet $y = -\frac{1}{3}x$ comme asymptote oblique pour $x \to +\infty$.
3. Dérivée première:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{3} + \frac{\frac{1}{x}x^2 - 2x\ \ln x}{x^4} \\ &= -\frac{1}{3} + \frac{1 - 2\ln x}{x^3} \\ &= \frac{1 - \frac{x^3}{3} - 2\ln x}{x^3} \end{aligned}$$

   On observe que $f'(1) = \frac{2}{3}$ et $f'(2) = \frac{-\frac{8}{3} - 2\ln 2}{8} < 0$, et que $f'(x)$ est continue sur l'intervalle $[1, 2]$. La dérivée première de $f(x)$ s'annule donc sur l'intervalle $[1, 2]$. On peut même réduire cet intervalle à $[1, \sqrt[3]{3}]$.

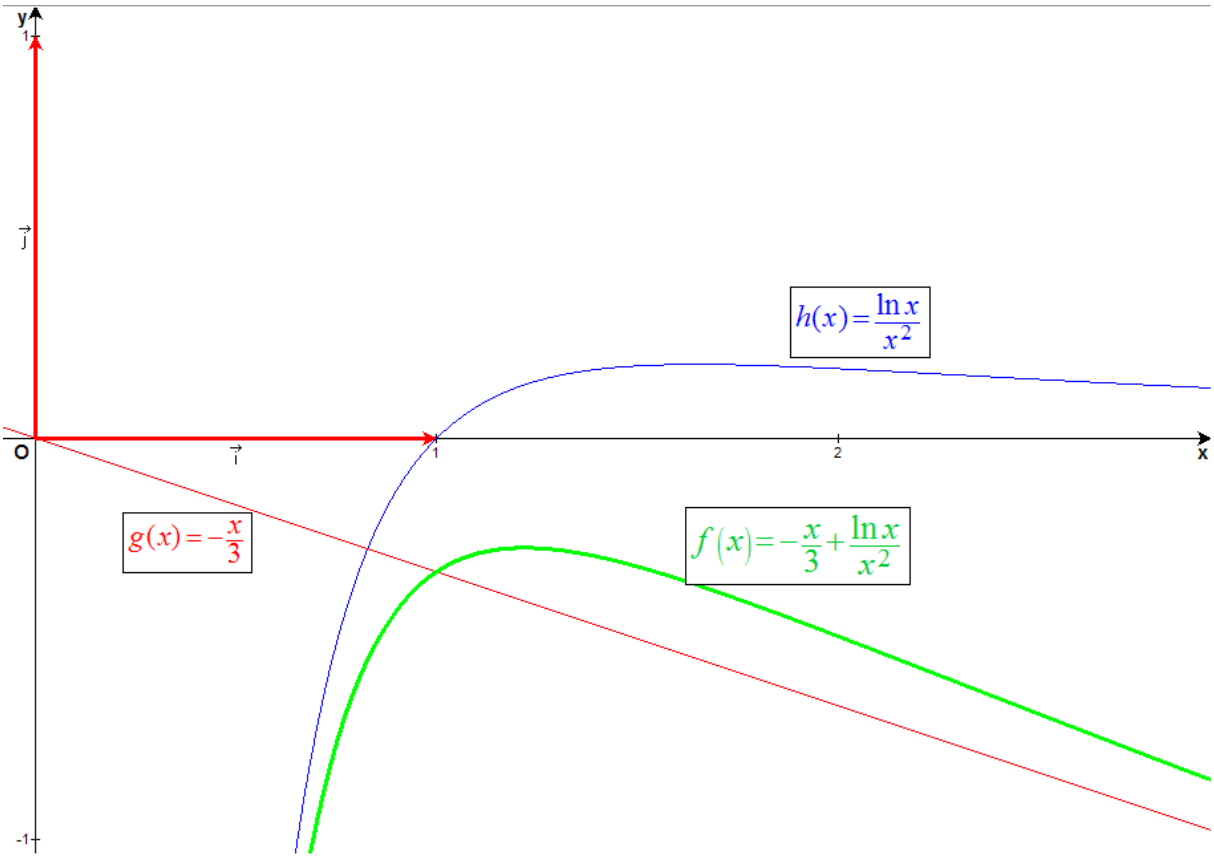
4. Dérivée seconde:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-\frac{2}{x}x^3 - (1 - 2\ln x)3x^2}{x^6} \\ &= \frac{-2 - (1 - 2\ln x)3}{x^4} \\ &= \frac{6\ln x - 5}{x^4} \end{aligned}$$

   qui ne s'annule qu'en $x = e^{\frac{5}{6}}$.

5. Tableau récapitulatif

	0		a		$e^{\frac{5}{6}}$		$+\infty$
f'	$+\infty$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-\frac{1}{3}$
f''	$-\infty$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0
f	AV		max		PI		AO



20 juillet 07.

EXANA201 – FPMS – Mons, Juillet 2005. (ANA05.011)

Etudier et représentez graphiquement la fonction

$$f(x) = \frac{1}{xe^x + 1}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$, sans utiliser la dérivée seconde

Solution proposée par l'université

Solution

1. Domaine: $\mathbb{R}$

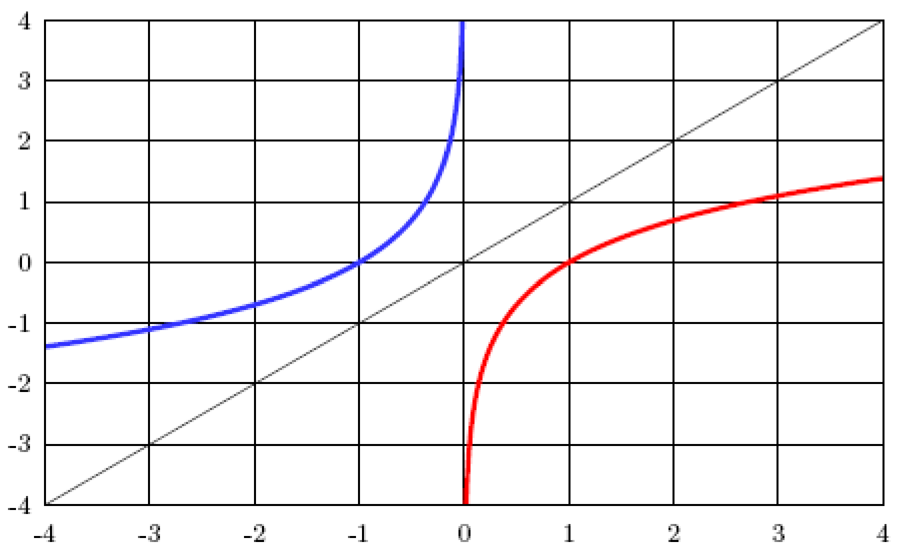
   En effet, pour les x positifs, le dénominateur est la somme de deux termes strictement positifs; il est donc strictement positif. Voyons si le dénominateur peut s'annuler pour des réels négatifs. Il faudrait alors qu'il existe $x < 0$ tel que

$$\begin{aligned} xe^x + 1 &= 0 \\ xe^x &= -1 \\ e^x &= -\frac{1}{x} \\ x &= \ln\left(-\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

   Puisque nous avons supposé que $x < 0$, alors $-x = |x|$, et l'on cherche $x < 0$ tel que

$$x = -\ln|x|$$

ce qui n'est manifestement pas possible, sur base du graphique suivant qui reprend $\ln x$ pour $x > 0$, $-\ln|x|$ pour $x < 0$ et la droite $y = x$. On n'observe aucune intersection entre cette droite et la courbe $-\ln|x|$ pour $x < 0$.



2. Asymptotes

   - Verticale: n'existe pas.
   - Horizontale:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \frac{1}{+\infty} = 0^+ \\ \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \frac{1}{-\infty.-0+1} \\ &= 1\end{aligned}$$

   car

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{-x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

   $f(x)$ admet donc deux asymptotes horizontales: $y = 1$ pour $x \to -\infty$ et $y = 0$ pour $x \to +\infty$.

   - Oblique: p.m.

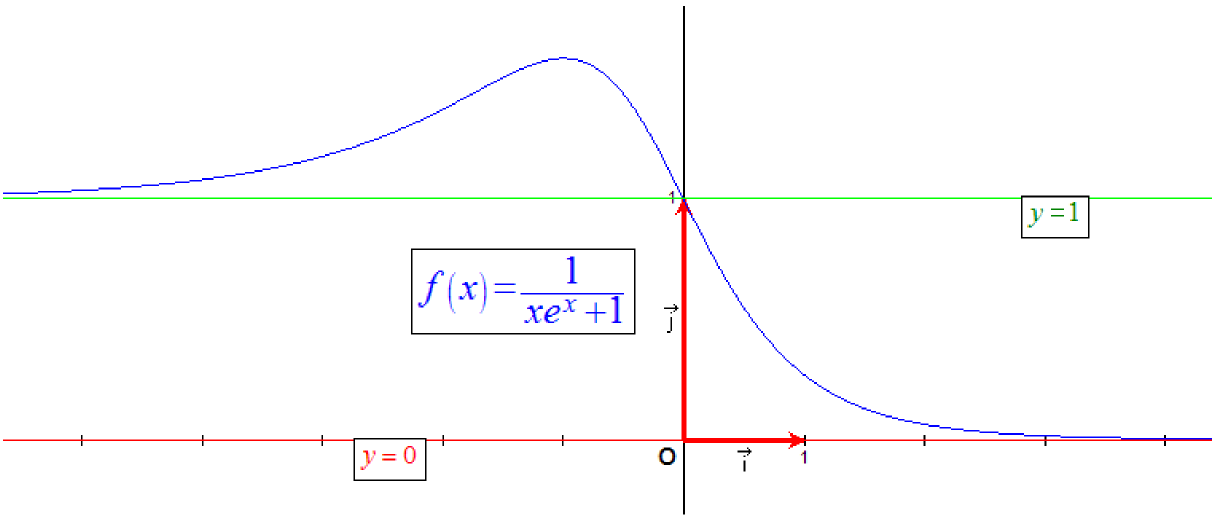
3. Dérivée première:

$$f'(x) = -\frac{xe^x + e^x}{(xe^x+1)^2}$$

$f'(x)$ tend vers 0 pour $x \to +\infty$ ou si $e^x(x+1) = 0$, c-à-d si $x \to -\infty$ ou si $x = -1$.

4. Tableau récapitulatif

	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
f'	0	+	0	−	−1	−	0
f	AH		max				AH
	1		~ 1.5		1		0



20 juillet 07.

EXANA202 – FPMS – Mons, Juillet 2005. (ANA05.10)

Etudier la fonction suivante

$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2+x+1}$$

Et faites en une représentation graphique soignée.
Calculez la dérivée seconde de *f* sans en chercher les zéros. Combine de points d'inflexion a-t-elle ? Justifier votre réponse en vous servant de l'expression de *f''* et du graphique de *f*.

Solution proposée par l'université

1. Domaine: le dénominateur ne s'annule pas. La fonction est donc définie sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$.
2. Zéros: Le numérateur ne s'annule pas. Donc $f(x)$ n'a pas de zéro. Elle est toujours positive.
3. Asymptote verticale : aucune
4. Asymptote horizontale:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\frac{1}{x}x}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = 1$$

Il existe une asymptote horizontale d'équation $y = 1$

5. Dérivée première:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+x+1)-(2x+1)(x^2+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+x+1)^2}$$

Les zéros du numérateur sont -1 et 1.

6. Dérivée seconde:

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+x+1)^2-(x^2-1)2(x^2+x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^4} = 2\frac{-x^3+3x+1}{(x^2+x+1)^3}$$

La dérivée seconde a au plus 3 zéros réels qui sont potentiellement des points d'inflexion à tangentes non horizontales (car les points où f' s'annule ne sont pas les points d'inflexion).

7. Tableau récapitulatif:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$	+	+	0	-	0	+	+
$f(x)$	A.H	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	A.H

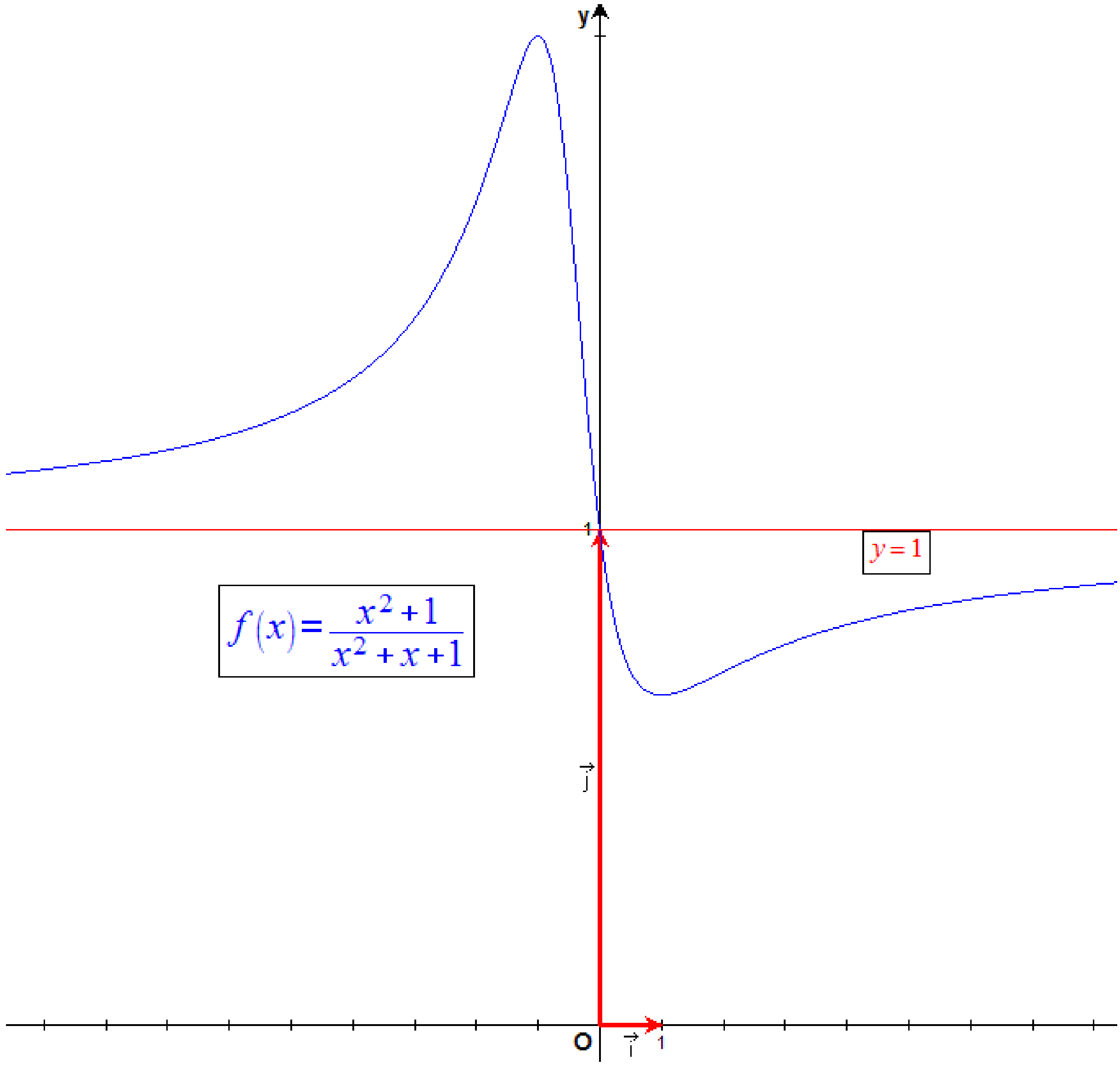
8. Valeurs de $f(x)$

$$\begin{aligned} f(x=-2) &= \frac{5}{3} \\ f(x=-1) &= 2 \\ f(x=0) &= 1 \\ f(x=1) &= \frac{2}{3} \\ f(x=2) &= \frac{5}{7} \end{aligned}$$

9. Localisation approximative des points d'inflexion : il suffit d'étudier le signe de f''

$$\begin{aligned} f''(x=-2) &> 0 \\ &\text{point d'inflexion dans }]-2,-1[\\ f''(x=-1) &< 0 \\ &\text{point d'inflexion dans }]-1,0[\\ f''(x=0) &> 0 \\ f''(x=1) &> 0 \\ &\text{point d'inflexion dans }]1,2[\\ f''(x=2) &< 0 \end{aligned}$$

10. Tracé de la fonction:



20 juillet 07.

EXANA203 – FPMS – Mons, Juillet 2005. (ANA05.09)

Soit la fonction

$$f(x)=\frac{x^2-x-1}{x^2+x}$$

- Etudier le signe de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
- Calculer l'aire comprise entre $f(x)$ et l'axe des x pour $x \in [1,2]$

Solution proposée par l'université

Solution

1. Signe de $f(x)$. Les racines du numérateur $x^2-x-1=0$ valent $x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Le numérateur est positif à l'extérieur de cet intervalle et négatif à l'intérieur. Les racines du dénominateur $x^2+x=0$ valent $x_1=-1$ et $x_2=0$. Le dénominateur est positif à l'extérieur de cet intervalle et négatif à l'intérieur.

2. Tableau récapitulatif:

x		-1		$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$		0		$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	
(x^2-x-1)	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
(x^2+x)	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	X	$-$	0	$+$	X	$-$	0	$+$

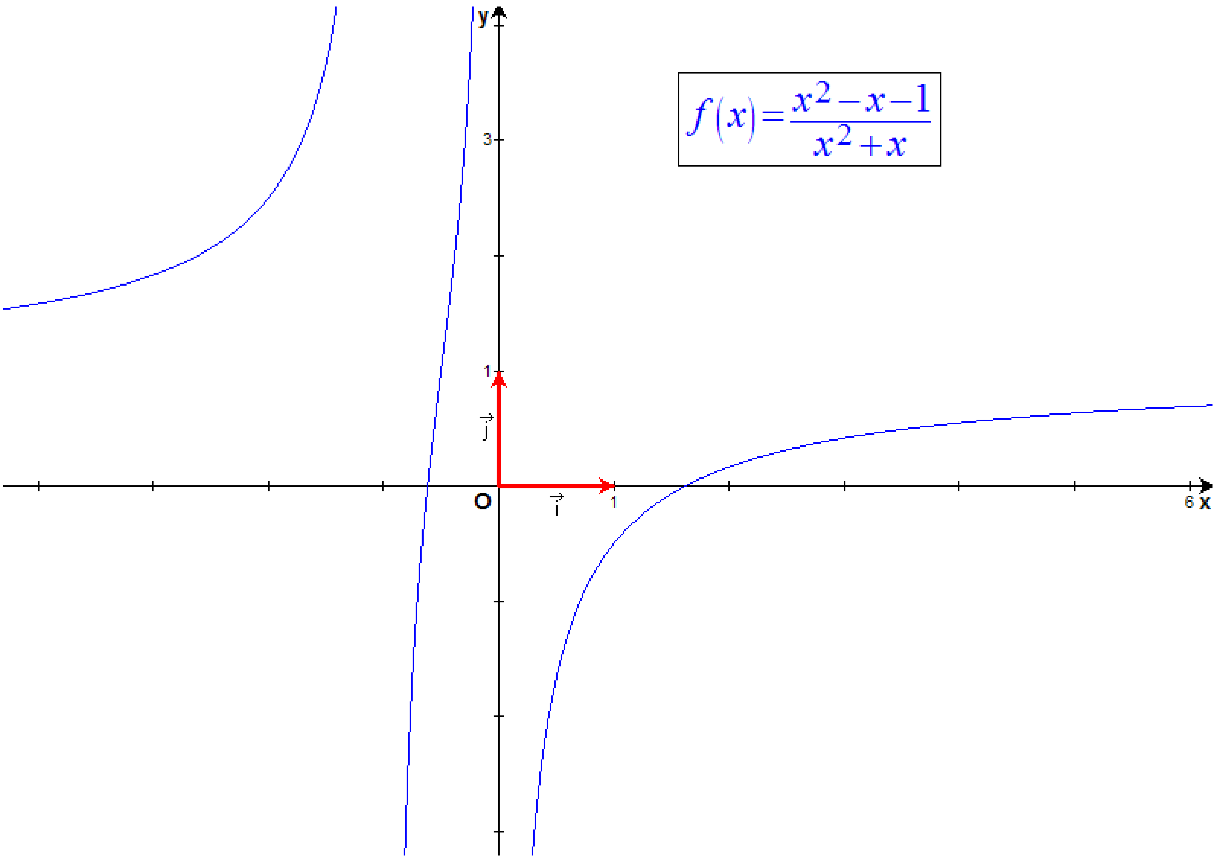
3. Calcul de l'aire. On doit tenir compte du signe de la fonction pour calculer l'aire sous-tendue, c'est-à-dire $A=-\int_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} f(x)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^2 f(x)\mathrm{d}x$.

   Calculons tout d'abord une primitive de $f(x)$

$$\begin{aligned}\int f(x)\mathrm{d}x &= \int \frac{x^2+x-2x-1}{x^2+x}\mathrm{d}x\\ &= \int 1\mathrm{d}x-\int\frac{2x+1}{x^2+x}\mathrm{d}x\\ &= x-\ln|x^2+x|\\ &= x-\ln|x|-\ln|x+1|\\ &= x-\ln x-\ln(x+1) \qquad \text{(pour } x \text{ dans l'intervalle considéré)}\end{aligned}$$

   L'aire est donc égale à

$$\begin{aligned}A &= [-x+\ln(x)+\ln(x+1)]_1^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}+[x-\ln(x)-\ln(x+1)]_{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}^2\\ &= 2-\sqrt{5}+2\left(\ln(1+\sqrt{5})+\ln(3+\sqrt{5})-3\ln 2\right)-\ln 3.\end{aligned}$$



20 juillet 07.

EXANA204 – FPMS – Mons, Juillet 2005. (ANA05.12)

Trouver le domaine de définition et la ou les asymptotes obliques de la fonction

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

Solution proposée par l'université

Solution La racine devant être positive ou nulle, le domaine est:

$$x \in \mathbb{R} \backslash]-1,1[\tag{10}$$

Pour trouver les asymptotes obliques d'équation $y = ax + b$, il faut calculer les limites suivantes:

$$a = \lim_{\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \tag{11}$$

$$b = \lim_{\pm\infty} (f(x) - ax) \tag{12}$$

ce qui donne ici:

$$a = \lim_{\pm\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^2} \right) = \frac{1}{2} - \lim_{\pm\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}} = \frac{1}{2} \tag{13}$$

$$b = \lim_{\pm\infty} \frac{-\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{\pm\infty} \frac{-|x|}{x} = \mp 1 \tag{14}$$

---

20 juillet 07.

EXANA205 – FPMS – Mons, Juillet 2005. (ANA05.07)

Calculer les intégrales suivantes :

$$\int_{-1}^{2} x|\,x\,|\,dx$$

$$\int x^2 \ln x\, dx$$

Solution proposée par l'université

Solution Pour la première intégrale, il faut calculer séparément pour les x positifs et négatifs:

$$x \geq 0 \quad \int_0^2 x|x|\,\mathrm{d}x = \int_0^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$x \leq 0 \quad \int_{-1}^0 x|x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 -x^2\,\mathrm{d}x = \left.\frac{-x^3}{3}\right|_{-1}^0 = \frac{-1}{3}$$

$$\int_{-1}^2 x|x|\,\mathrm{d}x = \frac{8}{3} + \frac{-1}{3} = \frac{7}{3}$$

Pour la deuxième intégrale, on intègre par parties en posant:

$$u = \ln x \quad \mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}v = x^2\mathrm{d}x \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + C$$

---

20 juillet 07.

EXANA206 – FPMS – Mons, Juillet 2005. (ANA05.13)

Etudiez la fonction suivante et faites en une représentation graphique soignée.

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{2x-1}$$

Indication : Ne calculez pas la dérivée seconde.

Solution proposée par l'université

• Domaine : $dom\ f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

• Pas de zéros

• AV: Une AV en $x = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{AV \equiv x = \frac{1}{2}}$

• AH

A droite : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{2x-1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|x|}{2x} = +\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{AH \equiv y = \frac{1}{2}}$

A gauche : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{2x-1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{|x|}{2x} = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{AH \equiv y = -\frac{1}{2}}$

• Ordonnée à l'origine : $\left(0, -\sqrt{3}\right)$

• Dérivée première

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+2x+3}}(2x+2)(2x-1) - \sqrt{x^2+2x+3}.2}{(2x-1)^2}$$

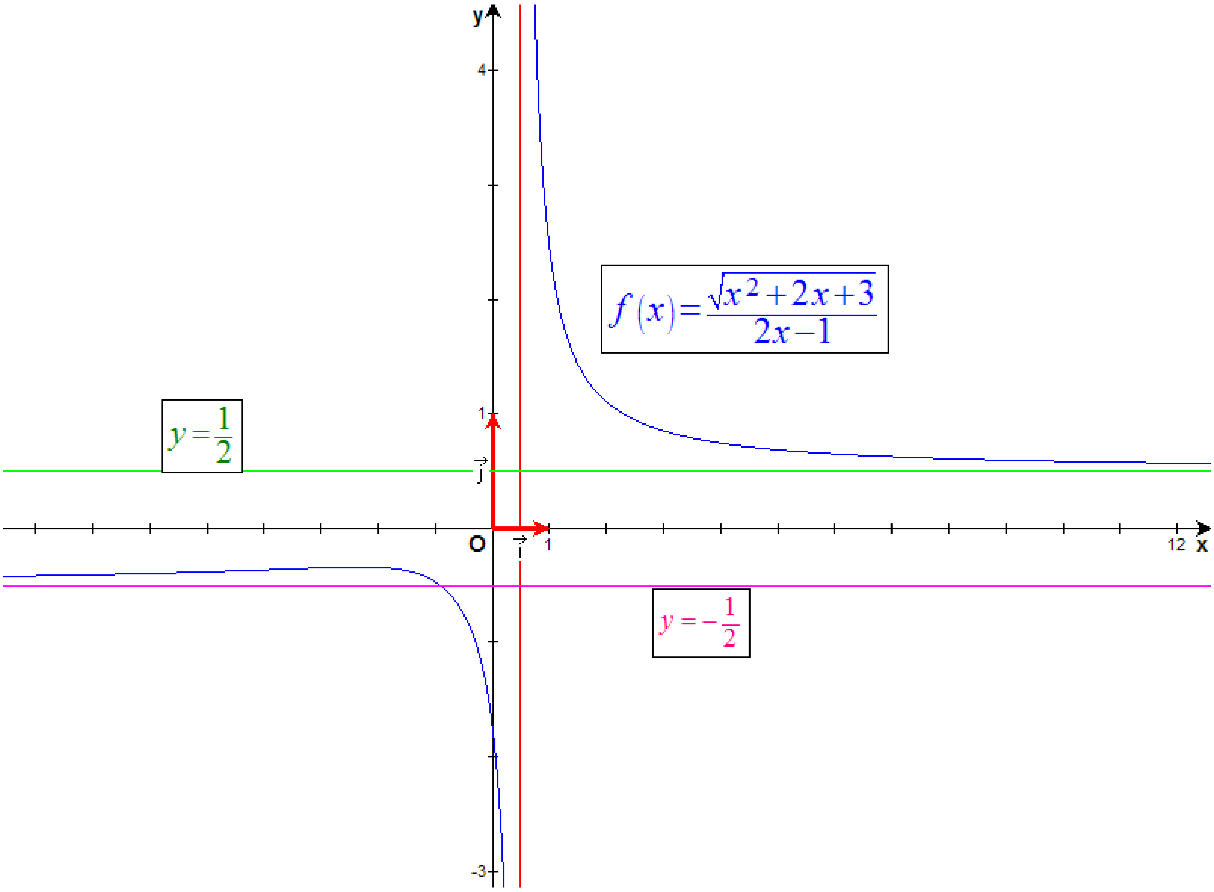
$$= \frac{(x+1)(2x-1) - 2\left(x^2+2x+3\right)}{(2x-1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} = -\frac{3x+7}{(2x-1)^2\sqrt{x^2+2x+2}}$$

La dérivée première s'annule pour : $x = -\frac{7}{3}$

• Tableau de variation

		$-\frac{7}{3}$		$\frac{1}{2}$	
$f'(x)$	+	0	−	/	−
$f(x)$	$\nearrow$	*Max* $\left(-\frac{7}{3}; -\sqrt{\frac{2}{17}}\right)$	$\searrow$	/	$\searrow$

Le graphique de la fonction est donné ci-dessous



Bien que ce ne soit pas dans la question, voici pour les courageux la dérivée seconde : $f''(x)=\frac{2}{(2x-1)^3}\frac{(6x^3+30x^2+42x+43)}{(x^2+2x+3)^{\frac{3}{2}}}$

Cette dérivée s'annule pour $x=-3.611$.

Ce qui correspond à un point d'inflexion en : $(-3.611;-0.362)$

20 juillet 07.

EXANA207 – FSA – Louvain – septembre 07

1. Calculer la primitive de la fonction suivante :

$$f(x)=\frac{e^x}{1+e^{2x}}$$

2. Calculez

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2-4}$$

3. Calculez la limite suivante

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$$

4. Soit la fonction

$$f(x)=x+e^x-2$$

Démontrez rigoureusement qu'il existe (au moins) un réel a compris entre 0 et 1 tel que $f(a)=0$.

Solution proposée Steve Tumson

1. $$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{1}{1+e^{2x}}d\left(e^x\right) \xrightarrow{y=e^x} \int \frac{1}{1+y^2}dy = \arctan y + C = \boxed{\arctan\left(e^x\right)+C}$$

2. $$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-2)(x+2)} = \int_{-1}^{1} \frac{A}{(x-2)}dx + \int_{-1}^{1} \frac{B}{(x+2)}dx$$

Or

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{(A+B)x+2A-2B}{(x-2)(x+2)}$$

Donc

$$\begin{cases} A+B=0 \\ 2A-2B=1 \end{cases} \Rightarrow \qquad A=\frac{1}{4} \qquad B=-\frac{1}{4}$$

Il vient finalement

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x-2)} - \frac{1}{4}\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x+2)}dx = \frac{1}{4}\Big[\ln|x-2| - \ln|x+2|\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}\left[\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\right]_{-1}^{1} = \boxed{-\frac{1}{4}\ln 9}$$

3. Il suffit de remarquer que $\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1+\cos(2x)\right) \Leftrightarrow 1+\cos X = 2\sin^2\left(\frac{X}{2}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}{\sin x} = \sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{\sin x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{HOSPITAL} \sqrt{2}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\left|\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right|}{\cos x} = \boxed{\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Voi figure ci-dessous de $f(x) = \frac{\sqrt{1-\cos x}}{\sin x}$

4. Aux limites de l'intervalle :

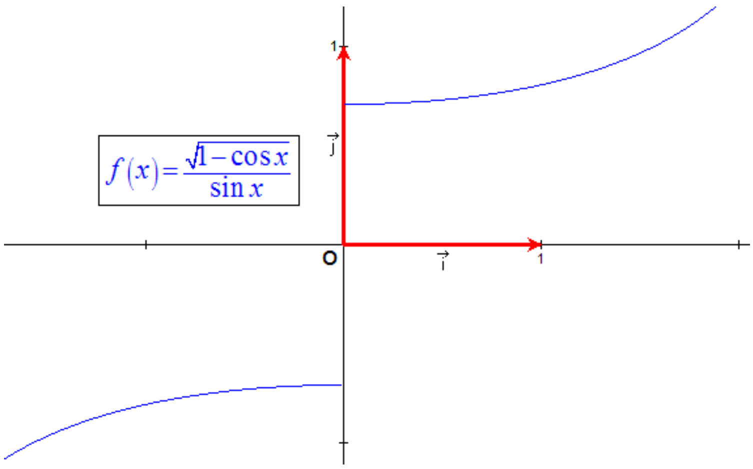
$$f(0) = -1 \qquad f(0) < 0$$
$$f(1) = -1+e \qquad f(1) > 0$$

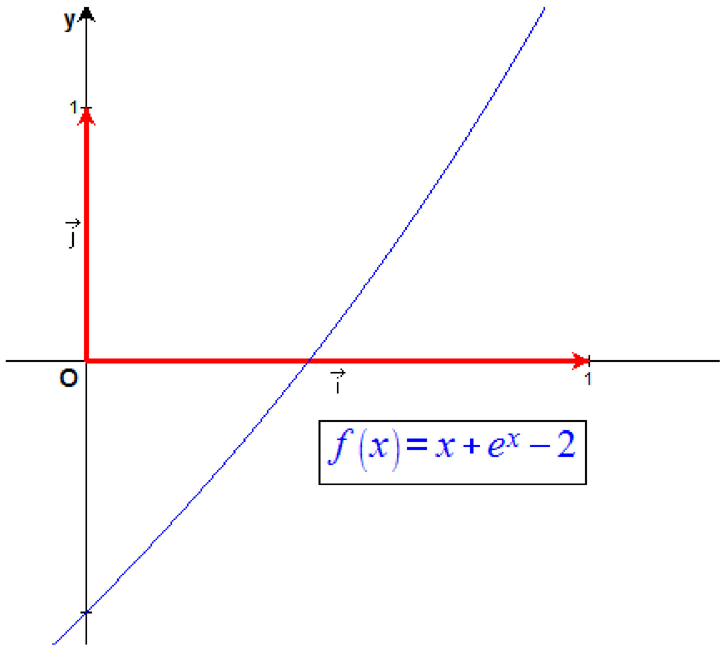
La dérivée est toujours positive :

$$\frac{df}{dx} = 1+e^x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{df}{dx} > 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Partant du début de l'intervalle négatif, il faut obligatoirement passer par zéro pour arriver à la fin de l'intervalle qui lui est positif.

Voir figure ci-dessous de $f(x) = x + e^x - 2$





15 sept. 07 . Modifié le 6 septembre 08 (Steve Tumson)

EXANA208 – FSA – Louvain – septembre 07

Soit f la fonction définie dans les réels par :

$$f(x)=e^{-x}\cos x$$

Le graphe de f est la courbe du plan définie par $y = f(x)$.

1. Calculez f' et f'' puis dressez un tableau de variation de f contenant successivement :

   a) les racines et le signe de f,
   b) les racines et le signe de f', les extrema et les domaines de croissance et de décroissance de f,
   c) les racines et le signe de f'', les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut/bas de f.

2. Ensuite, à l'aide du tableau obtenu précédemment, esquissez l'allure de ce graphe dans un repère orthonormé, en indiquant les éventuelles asymptotes (dont on précisera les équations), extrema (dont on précisera abscisses et ordonnées) et points d'inflexion (dont on précisera uniquement les abscisses).

3. Enfin, à l'aide des réponses obtenues plus haut, déterminez combien il existe de solutions à l'équation $\cos x = e^x$ comprise dans $[-2\pi, 2\pi]$

Solution proposée par Steve Tumson

Pour une analyse claire, il faut se rendre compte des le début que le cosinus de la fonction va engendrer une infinité de racine, d'extrema et de points d'inflexion, il sera donc impossible de donner exactement tous les renseignements.

Connaissant l'allure de l'exponentielle décroissante, on s'attend à avoir d'énormes fluctuations du cosinus dans les abscisses négatives et une atténuation très rapide pour les abscisses positives. On peut donc très rapidement avoir en tête une petite idée générale du graphe de $f\ (x)$ comme l'illustre la figure du bas.

Il est donc relativement intelligent d'opérer dans l'intervalle intéressant $\left[-2\pi, 2\pi\right]$

1.

a) D'abord l'étude de signe et les racines de f :

$$f(x) = e^{-x}\cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

L'exponentielle étant toujours positive, le signe de f est celui du cosinus.

b) Ensuite l'étude de la dérivée première

$$\frac{df}{dx} = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x = -e^{-x}\left(\cos x + \sin x\right)$$

Les racines et le signe :

$$-e^{-x}\left(\cos x + \sin x\right) = 0 \ \Leftrightarrow \ \cos x + \sin x = 0 \ \Leftrightarrow \ \cos x = \sin(-x) \ \Leftrightarrow \ \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

Les solutions sont donc :

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi + x \qquad\qquad \to \text{impossible}$$

$$x = -\frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \ \Leftrightarrow \ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Le tableau de variation pour l'intervalle $\left[-2\pi, 2\pi\right]$est donc :

		$\frac{-5\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
Variation	$\searrow$	*MIN*	$\nearrow$	*MAX*	$\searrow$	*MIN*	$\nearrow$

c) Enfin la dérivée seconde :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = e^{-x}\left(\cos x + \sin x\right) - e^{-x}\left(-\sin x + \cos x\right) = 2e^{-x}\sin x$$

Les racines sont celles de sinus : $x = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{R}$

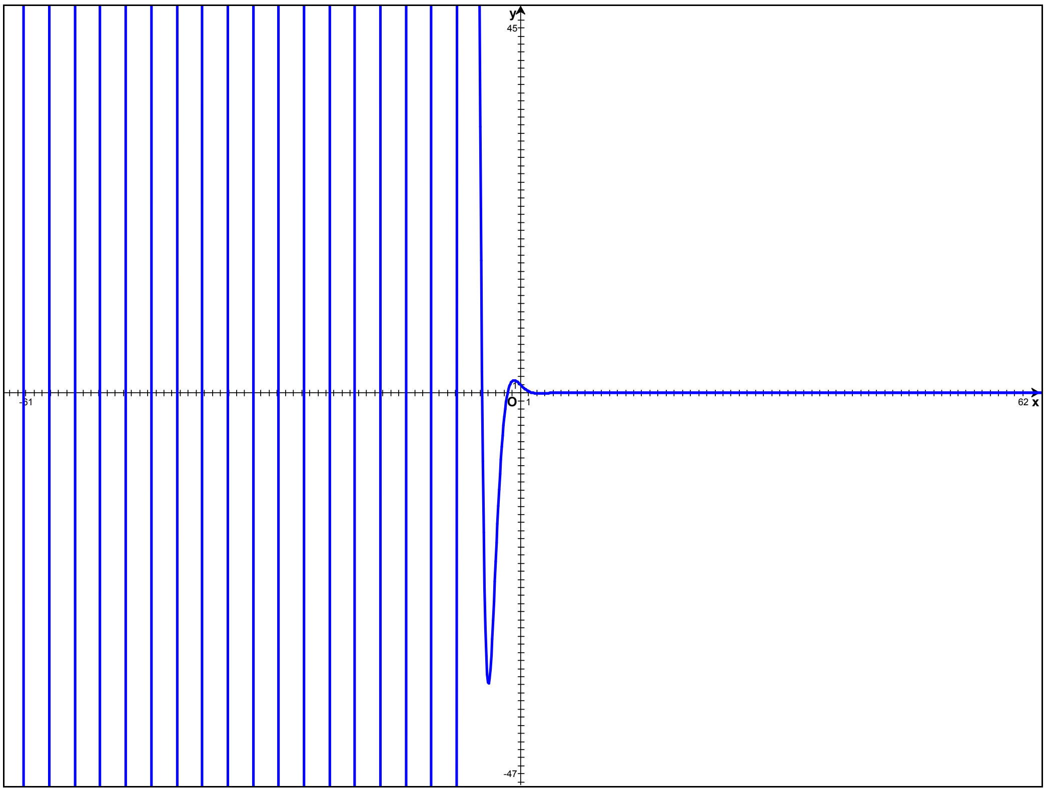
Le tableau de concavité pour l'intervalle $\left[-2\pi, 2\pi\right]$est donc :

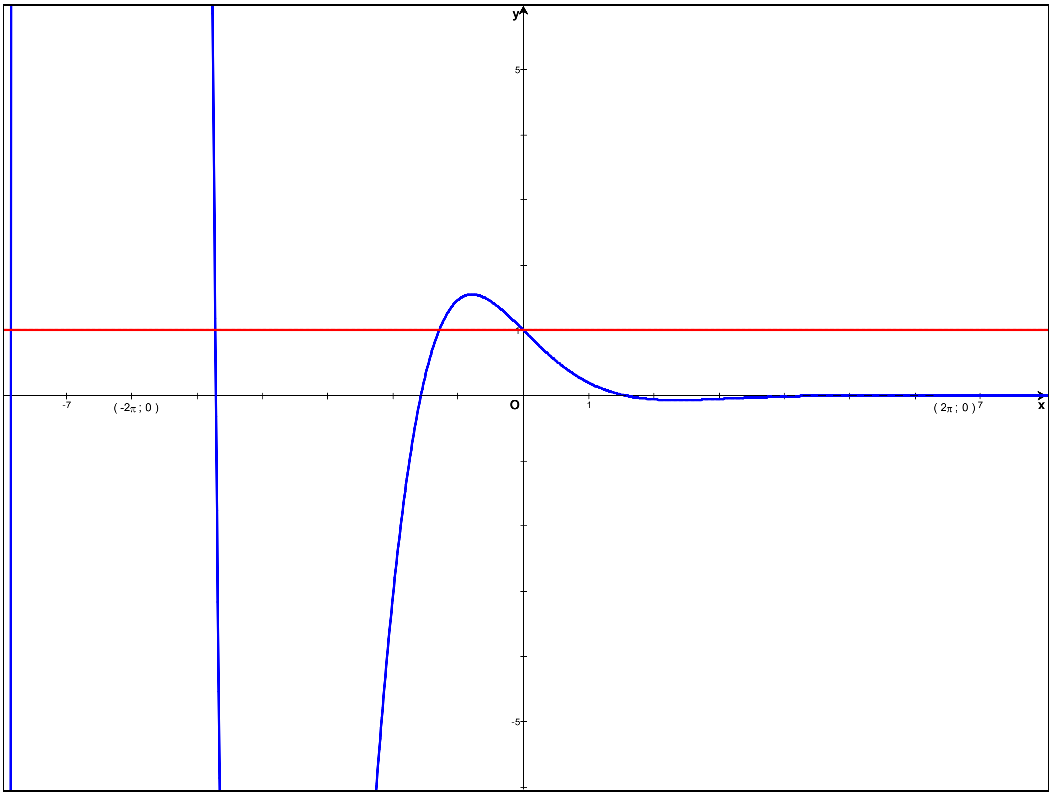
	-2π		$-\pi$		0		π		2π
$f''(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
Concavité	*PI*	$\cap$	*PI*	$\cup$	*PI*	$\cap$	*PI*	$\cup$	*PI*

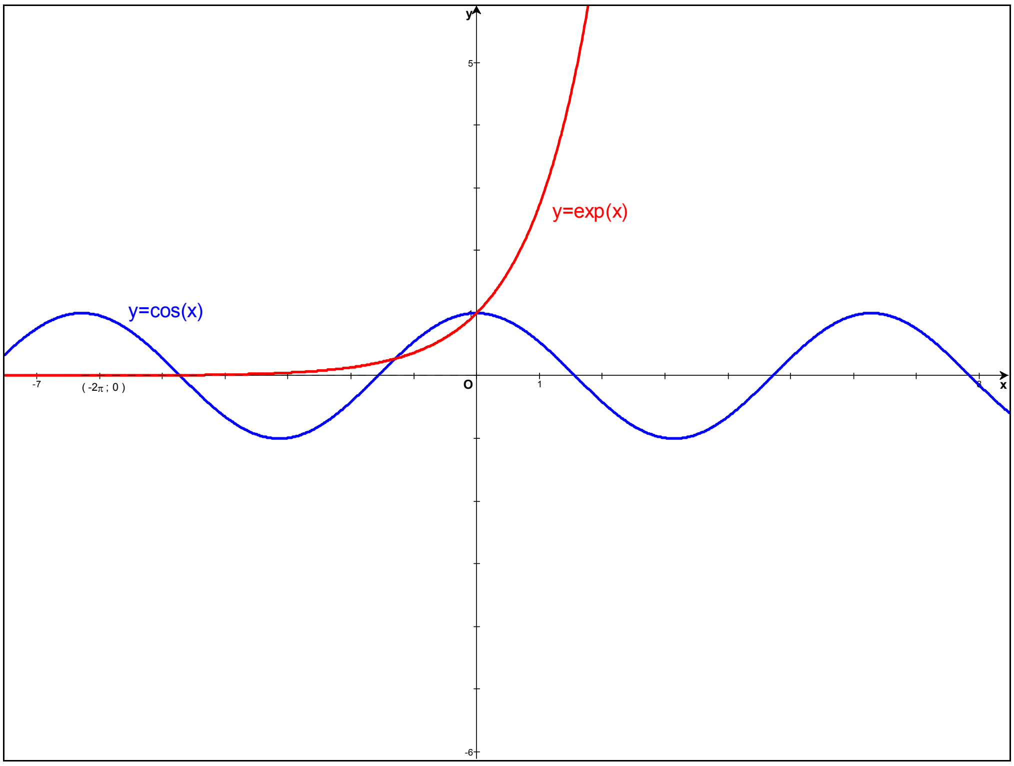
2. Il reste à déterminer les éventuelles asymptotes. Le domaine de f étant l'ensemble des réels, aucune asymptote verticale n'est envisageable. Par contre la limite infinie de f nous donne directement la valeur d'une asymptote horizontale : $AH \equiv y = 0$

3. Il suffit de remarquer que cette équation s'obtient quand l'image de f vaut 1. Le nombre de solutions de l'équation est donc le nombre d'intersections de f avec la droite y = 1.

En observant le graphe, on déduit que l'équation admet 3 solutions.


y
45
-51
O
1
62
x
-47


y
5
-7
(-2π ; 0)
O
1
(2π ; 0)
7
x
-5



Solution proposée par Jacques COLLOT

1) $f(x) = e^{-x}.\cos x$

Comme e^{-x} est toujours positif, les racines de $f(x)$ sont celles de $\cos x$

$\rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$

De même : $\cos x + \sin x = 0 \rightarrow \tan x = -1 \rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$

Les racines de $f'(x)$ sont les abscisses des extréma

Domaine de croissance : $f'(x) > 0 \rightarrow \cos x + \sin x < 0$

$$\rightarrow \frac{3\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{3\pi}{4} + (2k+1)\pi$$

Domaine de décroissance : $f'(x) < 0 \rightarrow \cos x + \sin x > 0$

$$\rightarrow \frac{3\pi}{4} + (2k-1)\pi < x < \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$f''(x) = 2e^{-x}\sin x$

Les racines sont celles de $\sin x \rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

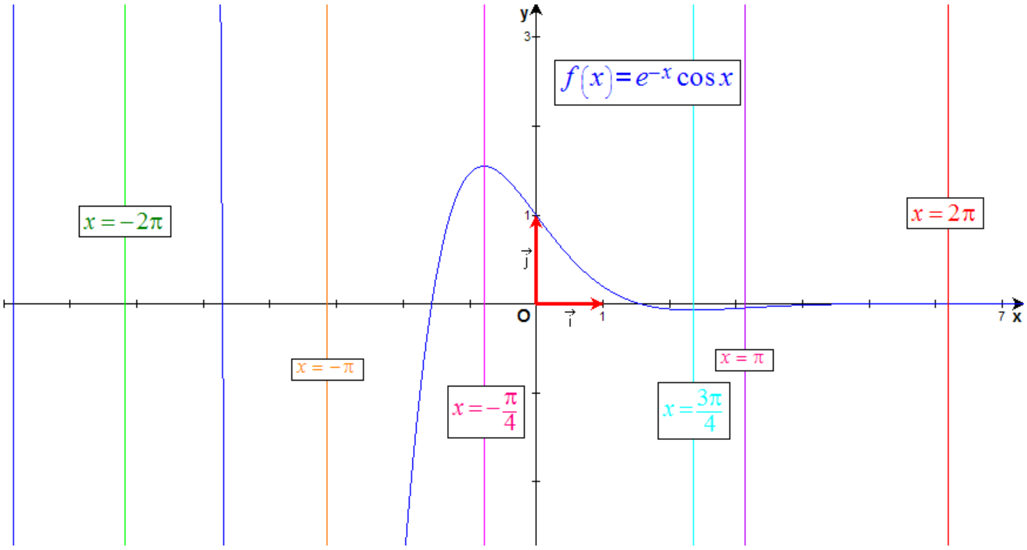
Ce sont les abscisses des points d'inflexion.

Domaine de concavité positive : $2k\pi < x < (2k+1)\pi$

Domaine de concavité négative : $(2k-1)\pi < x < 2k\pi$

<u>Tableau des variations</u> Pour $-2\pi \leq x \leq 2\pi$

x	$f'(x)$	$f''(x)$	$f(x)$	
	$-$	$-$	$\searrow$	$\cap$
-2π	$-$	0	$\searrow$	PI
	$-$	$+$	$\searrow$	
$-3\pi/2$	$-$	$+$	0	$\cup$
	$-$	$+$	$\searrow$	$\cup$
$-5\pi/4$	0	$+$	$Min(-5\pi/4;-35.89)$	$\cup$
	$+$	$+$	$\nearrow$	$\cup$
$-\pi$	$+$	0	$\nearrow$	PI
	$+$	$-$	$\nearrow$	$\cap$
$-\pi/2$	$+$	$-$	0	$\cap$
	$+$	$-$	$\nearrow$	$\cap$
$-\pi/4$	0	$-$	$Max(-\pi/4;1.55)$	$\cap$
	$-$	$-$	$\searrow$	$\cap$
0	$-$	0	$\searrow$	PI
	$-$	$+$	$\searrow$	$\cup$
$\pi/2$	$-$	$+$	0	$\cup$
	$-$	$+$	$\searrow$	$\cup$
$3\pi/4$	0	$+$	$Min(3\pi/4;-0.067)$	$\cup$
	$+$	$+$	$\nearrow$	$\cup$
π	$+$	0	$\nearrow$	PI
	$+$	$-$	$\nearrow$	$\cap$
$3\pi/2$	$+$	$-$	0	$\cap$
	$+$	$-$	$\nearrow$	$\cap$
$7\pi/4$	0	$-$	$Max(7\pi/4;0.0029)$	$\cap$
	$-$	$-$	$\searrow$	$\cap$
2π	$-$	0	$\searrow$	PI
	$-$	$+$	$\searrow$	$\cup$



2) Asymptote horizontale à droite

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0 \to AH \equiv y=0$

3) L'équation $\cos x = e^x$ peut se tranformer en $e^{-x}\cos x = 1$

Il suffit donc de rechercher le nombre de fois que $f(x)$ peut être égale à 1 dans l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$

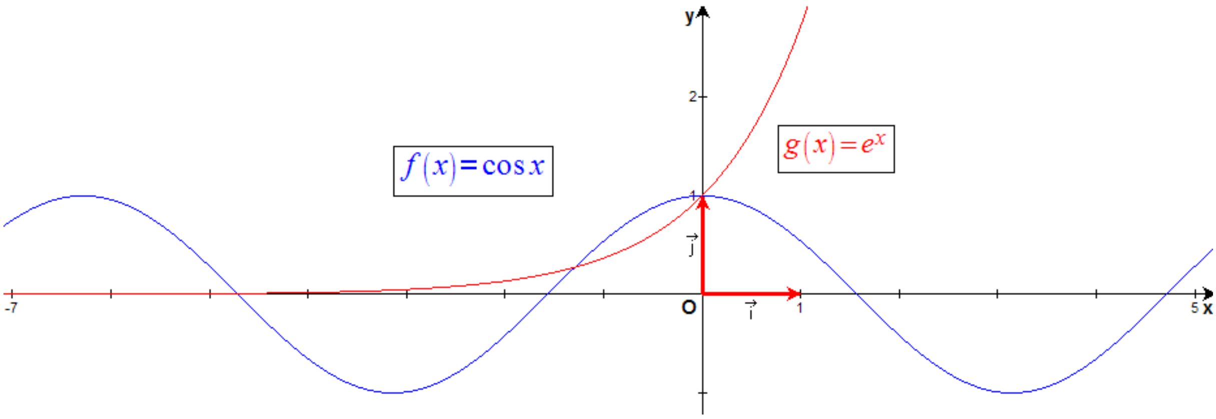
- Une solution est immédiate : si $x=0 \to f(x)=1$
- Si $x>0$, le tableau des variation indique qu'il n'y a pas de solution puisque les valeurs absolue des extremas forment une suite décroissante inférieure à 1
- Si $x<0$, le tableau des variations indique qu'il y a

  un miminum en $x=-\frac{5\pi}{4} \to f\left(-\frac{5\pi}{4}\right)=-35.89$

  un maximum en $x=-\frac{\pi}{4} \to f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=1.55$

  Vu les variations de $f(x)$, nous déduisons qu'il doit y avoir deux solutions.

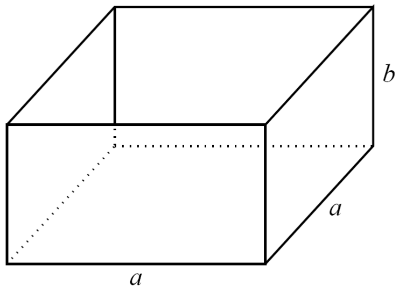
$\Rightarrow$ Conclusion : l'équation $\cos x = e^x$ admet trois solutions dan l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$



15 sept. 07.

EXANA209 – FSA – Louvain – septembre 07

Un chocolatier veut concevoir une nouvelle boîte avec un couvercle carré.
La boîte a deux côtés de longueur a (en m) et sa hauteur mesure b (en m).
La quantité de carton nécessaire pour construire la boite dépend de la surface des quatre faces latérales ainsi que la surface du fond de la boîte (le couvercle n'est pas compté).
Etant donné une quantité de carton disponible pour construire une boîte correspondant à une surface S donnée (en m²), on souhaite calculer les valeurs de a et b qui maximisent le volume de la boîte.



Solution proposée par Steve Tumson

Surface donnée : $S = 4ab + a^2 \Leftrightarrow b = \dfrac{S - a^2}{4a}$

Volume de la boîte : $V = a^2 b \Leftrightarrow V = a^{\cancel{2}} \dfrac{S - a^2}{4\cancel{a}} = \dfrac{1}{4}\left(Sa - a^3\right)$

Pour maximiser le volume il faut annuler la dérivée :

$$\frac{dV}{da} = \frac{1}{4}\left(S - 3a^2\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{a = \pm\sqrt{\frac{S}{3}} \quad [m]}$$

On retient évidemment la valeur positive.

Vérifions que cela correspond bien à un maximum :

$$\frac{d^2V}{da^2} = -\frac{3}{2}a < 0 \qquad \forall a \in \mathbb{R}_+^0$$

On peut donc en déduire b :

$$\boxed{b = \frac{S - a^2}{4a} = \frac{S - \frac{S}{3}}{4\sqrt{\frac{S}{3}}} = \frac{\sqrt{3S}}{6} \quad [m]}$$

Le volume maximal atteignable est donc :

$$\boxed{V_{MAX} = \frac{S}{6}\sqrt{\frac{S}{3}} \quad [m^3]}$$

---

15 sept. 07.