

**Exercices résolus de mathématiques.**

# Analyse

**ANA 30**

**EXANA300 – EXANA309**

<http://www.matheux.c.la>

**Jacques Collot  
Benoit Baudalet – Steve Tumson**

Avril 2011

## EXANA300 – ERM, 2006, série 3.

Calculer

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16 \cos t}{(\cos^2 t + 3)^2} dt$$

---

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{16 \cos t}{(\cos^2 t + 3)^2} dt$$

$$\text{Posons : } y = \sin t \Rightarrow \begin{cases} dy = \cos t dt \\ t = 0 \rightarrow y = 0 \\ t = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 1 \end{cases} \Rightarrow I = \int_0^1 \frac{16 dy}{(4 - y^2)^2} = \int_0^1 \frac{16 dy}{(2 - y)^2 (2 + y)^2}$$

Décomposons en fractions rationnelles :

$$\frac{16}{(2 - y)^2 (2 + y)^2} = \frac{A}{2 - y} + \frac{B}{(2 - y)^2} + \frac{C}{2 + y} + \frac{D}{(2 + y)^2}$$

$$\Rightarrow 16 = A(2 - y)(2 + y)^2 + B(2 + y)^2 + C(2 + y)(2 - y)^2 + D(2 - y)^2$$

$$\text{On détermine les coefficients facilement : } \begin{cases} y = 2 \rightarrow B = 1 \\ y = -2 \rightarrow D = 1 \\ y = 0 \rightarrow A + C = 1 \\ y = 1 \rightarrow 3A + C = 2 \end{cases} \rightarrow A = C = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy}{2 - y}}_{I_1} + \underbrace{\int_0^1 \frac{dy}{(2 - y)^2}}_{I_2} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy}{2 + y}}_{I_3} + \underbrace{\int_0^1 \frac{dy}{(2 + y)^2}}_{I_4}$$

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy}{2 - y} = -\frac{1}{2} [\ln(2 - y)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{dy}{(2 - y)^2} = \left[ \frac{1}{2 - y} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dy}{2 + y} = \frac{1}{2} [\ln(2 + y)]_0^1 = \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 2)$$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{dy}{(2 + y)^2} = -\left[ \frac{1}{2 + y} \right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (\ln 3 - \ln 2) + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \ln 3}$$

## EXANA301 – ERM, 2007, série 3.

(1) Etudier la fonction (de la variable réelle  $x$ )

$$f(x) = \frac{\ln x - 1}{x^2}$$

(Domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, points d'inflexion, asymptotes, représentation graphique). Remarque :  $e \approx 2.7$ .

(2) Déterminer les coordonnées du point  $P$  pour lequel la tangente en  $P$  au graphique de  $f$  passe par l'origine.

1)  $Dom f = \mathbb{R}_0^+$

2) Zéro :  $x = e$

3) AV à droite  $\equiv x = 0$

AH à droite  $\equiv y = 0$

4)  $f'(x) = \frac{3 - 2 \ln x}{x^3}$

TS :

		$e^{3/2} \approx 4.48$	
$f'(x)$	+	0	-
		<i>Max :</i>	
$f(x)$	↗	$(e^{3/2}, e^{-3}/3)$	↘
		$\approx (4.48; 0.025)$	

5)  $f''(x) = \frac{6 \ln x - 11}{x^4}$

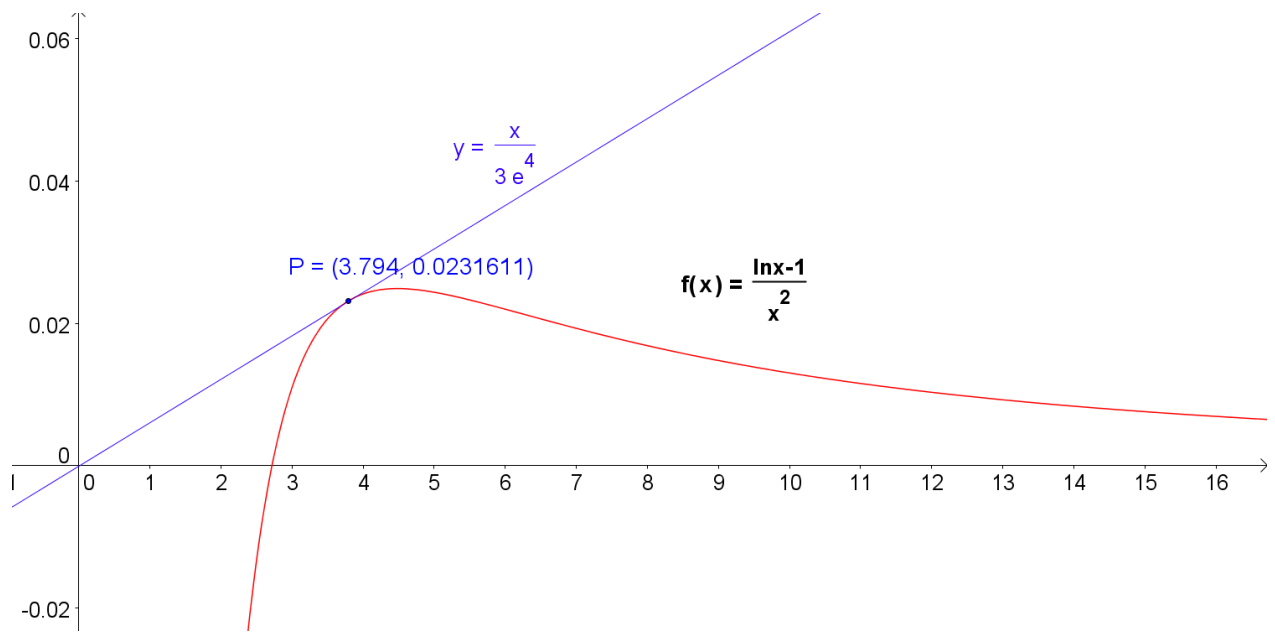
TS :

		$e^{11/6} \approx 6.25$	
$f''(x)$	-	0	+
		<i>I :</i>	
$f(x)$	∩	$(e^{3/2}, e^{-3}/3)$	∪
		$\approx (6.25; 0.0213)$	

6) Tangente passant par l'origine :  $t \equiv y = mx \Rightarrow m = \frac{y}{x} = \frac{\ln x - 1}{x^3}$

$$\text{Or } m = f'(x) \Rightarrow \frac{3 - 2 \ln x}{x^3} = \frac{\ln x - 1}{x^3} \Rightarrow P : \begin{cases} x = e^{4/3} \approx 3.794 \\ y = \frac{1}{3e^{8/3}} \approx 0.023161 \end{cases}$$

Et  $t \equiv y = \frac{x}{3e^4} \approx 0.006105 x$



5 mai 2011

## EXANA302 – ERM, 2007, série 3.

Calculer

$$f(x) = \int_1^2 \frac{3}{x^3+1} dx$$

Remarque :  $\ln 2 \approx 0.7, \ln 3 \approx 1.1$  et  $\sqrt{3}\pi \approx 5.4$

$$I = \int_1^2 \frac{3}{x^3+1} dx = \int_1^2 \frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} dx$$

On décompose en fractions rationnelles.

$$\frac{3}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}$$

$$\Rightarrow 3 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1) \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow A = 1 \\ x = 0 \rightarrow C = 2 \\ x = 1 \rightarrow B = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow I = \underbrace{\int_1^2 \frac{dx}{x+1}}_{I_1} + \underbrace{\int_1^2 \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx}_{I_2}$$

$$a) I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{x+1} = [\ln(x+1)]_1^2 = \ln 3 - \ln 2$$

$$b) I_2 = \int_1^2 \frac{-x+2}{x^2-x+1} dx = \underbrace{-\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx}_{I_{21}} + \underbrace{\frac{3}{2} \int_1^2 \frac{1}{x^2-x+1} dx}_{I_{22}}$$

$$i) I_{21} = -\frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx = -\frac{1}{2} [\ln(x^2-x+1)]_1^2 = -\frac{1}{2} \ln 3$$

$$ii) I_{22} = \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{1}{x^2-x+1} dx = \frac{3}{2} \int_1^2 \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \int_1^2 \frac{dx}{\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)^2 + 1}$$

$$\text{Posons : } y = \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dy \\ x = 1 \rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ x = 2 \rightarrow y = \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_{22} = \sqrt{3} \int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} \frac{dy}{y^2+1} = \sqrt{3} [\arctan y]_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}\pi}{6}$$

$$\Rightarrow I = I_1 + I_{21} + I_{22} = \ln 3 - \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 + \frac{\sqrt{3}\pi}{6} = \boxed{\frac{1}{2} \ln 3 - \ln 2 + \frac{\pi\sqrt{3}}{6} \approx 0.7606}$$

## EXANA303 – ERM, 2009, série 1.

Calculer en commençant par une intégration par parties,

$$I = \int_1^3 \ln(x^2 - 2x + 5) dx$$

---

$$I = \int_1^3 \ln(x^2 - 2x + 5) dx$$

$$f = \ln(x^2 - 2x + 5) \quad f' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 5}$$

$$g' = 1 \quad g = x$$

$$\Rightarrow I = [x \ln(x^2 - 2x + 5)]_1^3 - 2 \int_1^3 \frac{2x(x-1) dx}{x^2 - 2x + 5} = 7 \ln 2 - 2I_1$$

$$I_1 = \int_1^3 \frac{2x(x-1) dx}{x^2 - 2x + 5} = \int_1^3 dx + \int_1^3 \frac{x-5}{x^2 - 2x + 5} dx \quad \text{Par division euclidienne.}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x-2-8}{x^2 - 2x + 5} dx = 2 + \underbrace{\frac{1}{2} \int_1^3 \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 5} dx}_{I_2} - 4 \underbrace{\int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}}_{I_3}$$

$$I_2 = \int_1^3 \frac{2x-2}{x^2 - 2x + 5} dx = [\ln(x^2 - 2x + 5)]_1^3 = \ln 2$$

$$I_3 = \int_1^3 \frac{dx}{x^2 - 2x + 5} = \int_1^3 \frac{dx}{(x-1)^2 + 4} = \frac{1}{4} \int_1^3 \frac{dx}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_1^3 \frac{d\left(\frac{x-1}{2}\right)}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{1}{2} \left[ \arctan\left(\frac{x-1}{2}\right) \right]_1^3 = \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow I = 7 \ln 2 - 2 \left( 2 + \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{\pi}{2} \right) = \boxed{6 \ln 2 - 4 + \pi \approx 3.3}$$

---

7 mai 2011

## EXANA304 – ERM, 2009, série 1.

(a) Démontrer que, pour tout nombre réel  $x$ , on a  $e^x - x - 1 \geq 0$

(b) Etudier la fonction (de la variable réelle  $x$ )

$$f(x) = x \frac{e^x}{e^x - 1}$$

(domaine, zéros, croissance et décroissance, extremums, asymptotes,  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  représentation graphique).

---

a) Soit les fonctions  $g(x) = e^x$  et  $h(x) = x + 1$

1) si  $x = 0 \Rightarrow g(x) = h(x) = 1$

2) si  $x > 0 \rightarrow \begin{cases} g'(x) = e^x > 1 \\ h'(x) = 1 \end{cases}$

Donc sur l'intervalle  $]0, +\infty[$ , la fonction  $g(x)$  croît plus vite que  $h(x)$

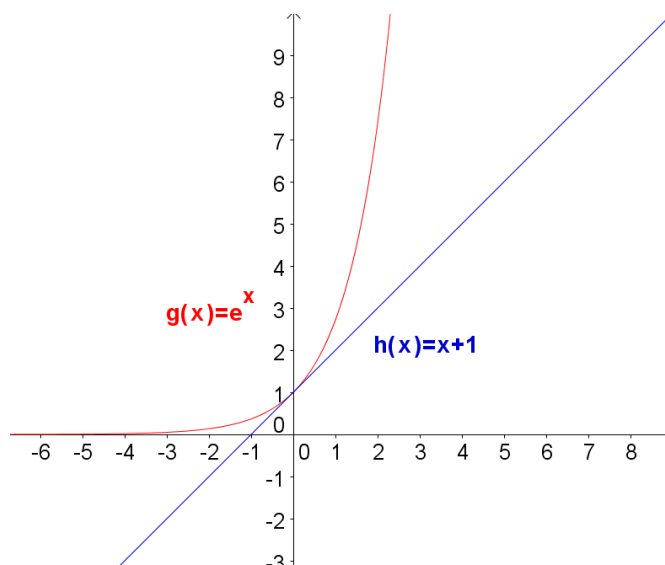
En vertu de 1), on déduit que  $g(x) > h(x)$

3) si  $x < 0 \rightarrow \begin{cases} g'(x) = e^x \Rightarrow 0 < e^x < 1 \\ h'(x) = 1 \end{cases}$

Donc sur l'intervalle  $] -\infty, 0[$ , et en allant vers  $-\infty$ ,  $g(x)$  décroît moins vite que  $h(x)$ .

En vertu de 1), on déduit que  $g(x) > h(x)$

Conclusion : sur  $\mathbb{R}$ , on a  $g(x) - h(x) \geq 0 \Rightarrow e^x - x - 1 \geq 0$



b) 1)  $Dom f = \mathbb{R}_0$

2) Pas de zéro

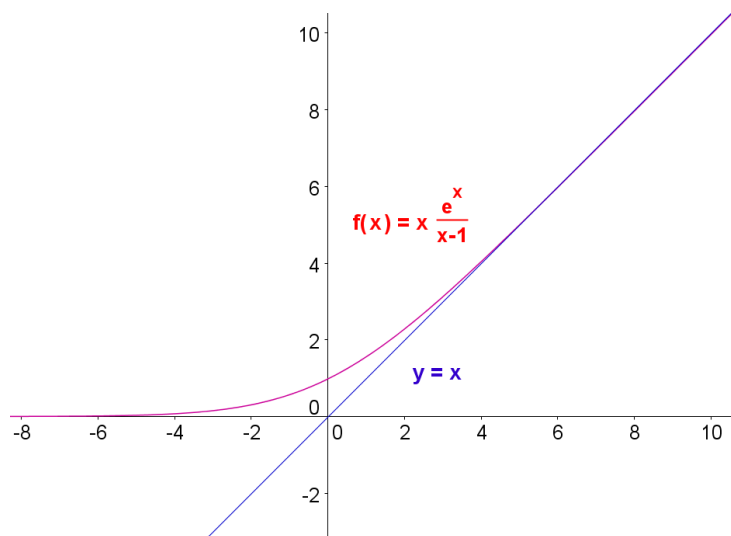
$$3) \text{ i) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{e^x - 1} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + xe^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x) = 1 \Rightarrow \text{Pas d'AV}$$

$$\text{ii) } \begin{cases} m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{e^x - 1} = 1 \\ p = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{xe^x}{e^x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^x - xe^x + x}{e^x - 1} = 0 \end{cases} \Rightarrow AO \equiv y = x$$

$$4) f'(x) = \frac{e^x(e^x - x - 1)}{e^x - 1}$$

On vertu du point a),  $f'(x)$  est toujours positive sur le domaine et donc  $f(x)$  est toujours croissante.

5) Pour info :  $f''(x) = \frac{e^x(x + (x-2)e^x + 2)}{(e^x - 1)^3}$ , mais il n'est pas demandé d'étudier la concavité.



Janvier 2011



## EXANA305 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 1.

1. Donnez le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \ln(\ln(\ln x))$$

2. Calculez la limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$$

3. Calculer une primitive de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = x^3 e^{-x^2}$$

4. La fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}$$

est croissante et bijective sur l'intervalle  $[0, 1]$

Soit  $f^{-1}$  la fonction réciproque de  $f$  sur se même intervalle. Calculer l'intégrale définie

$$\int_0^1 f^{-1}(t) dt$$

à l'aide du changement de variable :  $t = f(x)$

---

### Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1) Conditions :  $x > 0$ ,  $y = \ln x > 0$ ,  $\ln y > 0$  donc  $dom_f = ]e, \rightarrow [$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = 0 \times \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0$$

3)  $t = -x^2$ ;  $dt = -2x dx$

$$I = \frac{1}{2} \int t e^t = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} \int e^t dt = \frac{1}{2} e^t (t - 1) + k = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^2 + 1) + k$$

4)  $f'(x) = x + \frac{1}{2}$  est strictement positive, donc  $f$  est croissante et bijective de  $[0, 1]$  dans  $[0, 1]$

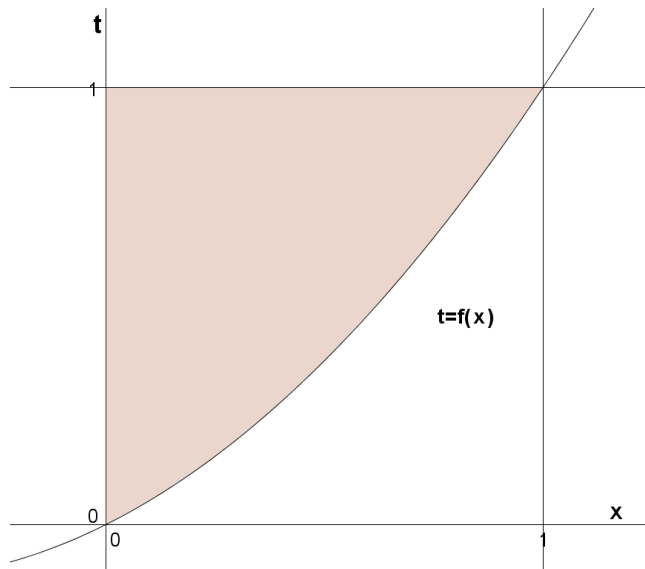
$\int_0^1 f^{-1}(t) dt =$  aire de la partie hachurée.

1ère méthode  $\int_0^1 f^{-1}(t) dt =$  aire carré  $- \int_0^1 f(x) dx = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{12}$

2ème méthode  $t = f(x)$ ;  $dt = f'(x) dx = \left(x + \frac{1}{2}\right) dx$

$$\int_0^1 f^{-1}(t) dt = \int_0^1 x \left(x + \frac{1}{2}\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Remarque :  $f^{-1}(f(x)) = x$



---

7 aout 2011

# EXANA306 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 1.

On considère la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \ln(x^2 - 2x + 2)$$

(Il est possible de répondre indépendamment à chacune des trois parties de cette question.)

1. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de  $f$ . Démontrez que la droite d'équation  $x = 1$  est un axe de symétrie de  $\mathcal{C}$ .
2. Etudiez les variations de  $f$  et tracer  $\mathcal{C}$  (On précisera le domaine de définition de  $f$ , ses éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et décroissance et les extrema, mais on n'étudiera pas la concavité, ni les points d'inflexion).
3. On cherche à présent à savoir si  $f$  admet un point fixe, c'est-à-dire un réel  $x$  tel que  $f(x) = x$

(a) Soit  $G$  la fonction définie par  $G(x) = f(x) - x$ . Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x)$

(b) Démontrez que, pour tout réel  $x$  strictement positif, on a

$$G(x) = x \left( \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \left( 1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) - 1 \right)$$

et déduisez-en la valeur de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x)$

(c) Prouvez, à l'aide des points (a) et (b), que  $f$  admet un point fixe.

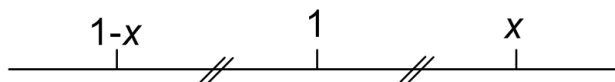
## Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1. La droite  $x = 1$  est un axe de symétrie car

$$\forall x : f(x) = f(2-x)$$

$$\text{En effet : } x^2 - 2x + 2 = (2-x)^2 - 2(2-x) + 2$$

$$\text{ou encore } f(1+k) = f(1-k) \forall k \text{ car } x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 > 0$$



2. Domaine de  $f = \mathbb{R}$

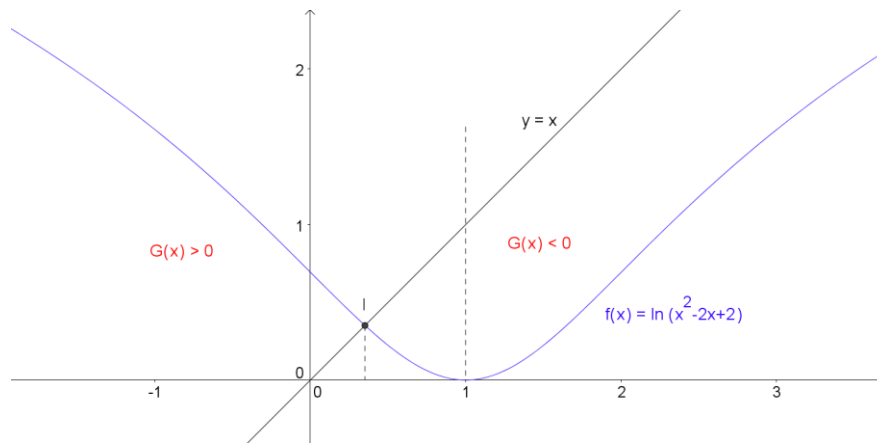
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f = +\infty \text{ (Pas d'AH)}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-2}{x^2-2x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2} = 0 \text{ pas d'AO}$$

Idem en  $-\infty$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)}{x^2-2x+2}$$

$x$		$1$
$f'(x)$	-	0
$f(x)$	↘	min = 0 ↗



3. L'équation  $f(x) = x$  admet au moins une solution. La droite  $y = x$  coupe au moins une fois le graphe de  $f$ .

(a)  $G(x) = f(x) - x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = [+ \infty + \infty] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \frac{f(x)}{x} - 1 \right) = +\infty (0 - 1) = -\infty$$

(b)  $G(x) = \ln \left( x^2 \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) \right) - x = 2 \ln x + \ln \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) - x$

$$= x \left[ \frac{2 \ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left( 1 + \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2} \right) - 1 \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = (+\infty)[0 + 0 - 1] = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \ln 1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{0}{\infty} = 0 \end{cases}$$

(c) Puisque  $\lim_{x \rightarrow -\infty} G = +\infty \exists a \in \mathbb{R}$  tel que  $G(a) > 0$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G = -\infty \exists b \in \mathbb{R}, a < b$  tel que  $G(b) < 0$

Puisque les fonctions  $f(x)$  et  $y = x$  sont continues, la fonction  $G$  est continue.

En fonction du théorème des valeurs intermédiaires, on peut donc dire qu' $\exists c \in \mathbb{R}$  tel que  $G(c) = 0$ , c'est-à-dire  $f(c) = c$ .

Si on souhaite démontrer l'unicité de  $c$ , on prouve que la fonction  $G(x)$  est

strictement décroissante :  $G'(x) = f'(x) - 1 = \dots = \frac{-(x-2)^2}{(x-1)^2 + 1} \leq 0$

Dès lors le point fixe est unique.

## EXANA307 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 1.

Dans le plan  $Oxy$ , où toutes les coordonnées sont exprimées en kilomètre, vous vous trouvez à l'origine  $O$ . Une route passe à proximité, et son équation est  $y = x + \alpha$ , où  $\alpha$  est un paramètre réel.

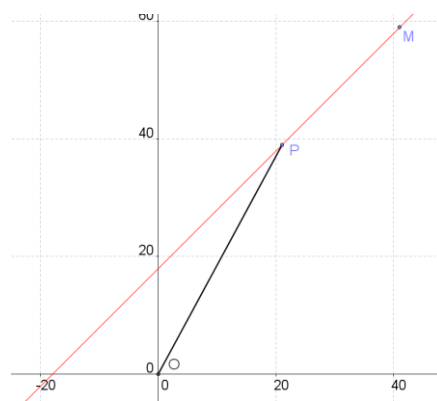
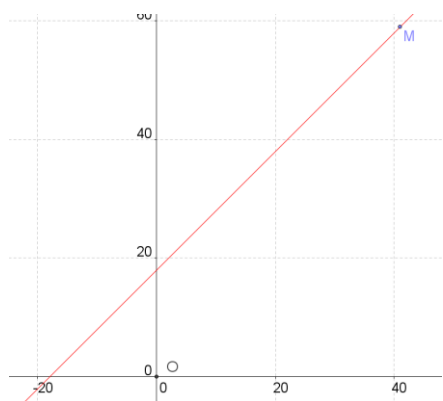
Vous souhaitez vous rendre le plus rapidement possible au point  $M$  de coordonnées  $(40, 40 + \alpha)$ , situé sur la route (voir figure tracée pour un certain  $\alpha$ ).

Votre vitesse de déplacement est égale à 60 km/h partout dans le plan, sauf sur la route, où, vous atteignez 100 km/h.

Pour minimiser votre temps de parcours, vous allez d'abord depuis l'origine vous diriger en ligne droite vers un point  $P$  de la route, puis suivre la route jusqu'au point  $M$ . (Ce chemin est représenté en gras sur la deuxième figure).

On cherche la position du point  $P$ , sur la route qui minimise la durée totale du trajet entre  $O$  et  $M$ .

1. Soit  $x$  l'abscisse du point  $P$  à déterminer. Calculez en fonction de l'abscisse  $x$  et du paramètre  $\alpha$  les distances  $|OP|$  et  $|PM|$ , puis la durée totale du trajet jusqu'à  $M$ .  
(Vous pouvez supposer que l'abscisse  $x$  est toujours plus petite que 40, l'abscisse de  $M$ ).
2. Calculez en fonction du paramètre  $\alpha$  les coordonnées du point  $P$  conduisant à une durée minimale pour le trajet. Justifier soigneusement votre réponse.



---

**Solution proposée par Nicole BERCKMANS**

$$\overline{OP} = \sqrt{x^2 + (x + \alpha)^2} = 60T_{OP}$$

$$\overline{PM} = \sqrt{(40-x)^2 + (40-x)^2} = \sqrt{2}(40-x) = 100T_{PM} \quad \text{car } x \leq 40$$

$$\text{Temps total : } T(x) = T_{OP} + T_{PM} = \frac{1}{60}\sqrt{x^2 + (x + \alpha)^2} + \frac{1}{100}\sqrt{2}(40-x)$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{2x + \alpha}{60\sqrt{x^2 + (x + \alpha)^2}} - \frac{\sqrt{2}}{100}$$

$$\text{Résolvons } \frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow 5(2x + \alpha) = 3\sqrt{2}\sqrt{2x^2 + 2\alpha x + \alpha^2}$$

Si  $\boxed{2x + \alpha \geq 0}$  élevons les deux membres de l'égalité au carré :

$$25(2x + \alpha)^2 = 18(2x^2 + 2\alpha x + \alpha^2) \Rightarrow 64x^2 + 64\alpha x + 7\alpha^2 = 0$$

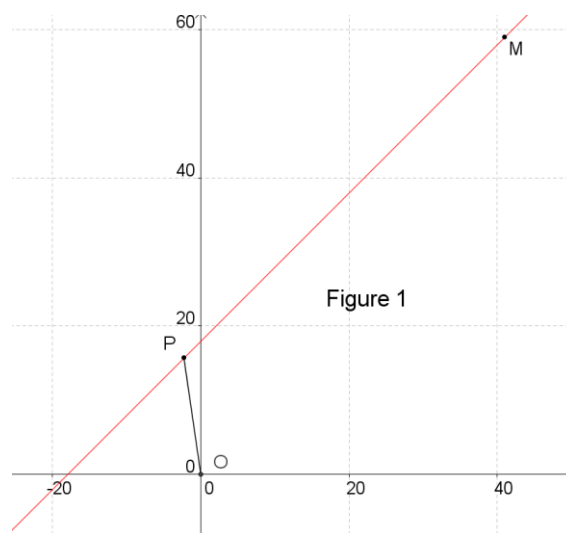
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{8}\alpha \\ 2x_1 + \alpha = \frac{6}{8}\alpha \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_2 = -\frac{7}{8}\alpha \\ 2x_2 + \alpha = -\frac{6}{8}\alpha \end{cases}$$

1er cas :  $\alpha > 0$

Seul  $x_1$  est racine de  $\frac{dT}{dx}$

$x$	$-\alpha/2$	$-\alpha/8$	$0$
$dT/dx$	$-$	$0$	$+$
$T(x)$	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$

 $\Rightarrow P\left(-\frac{\alpha}{8}, \frac{7\alpha}{8}\right) \quad (\text{Voir figure 1})$



2ème cas :  $\alpha < 0$

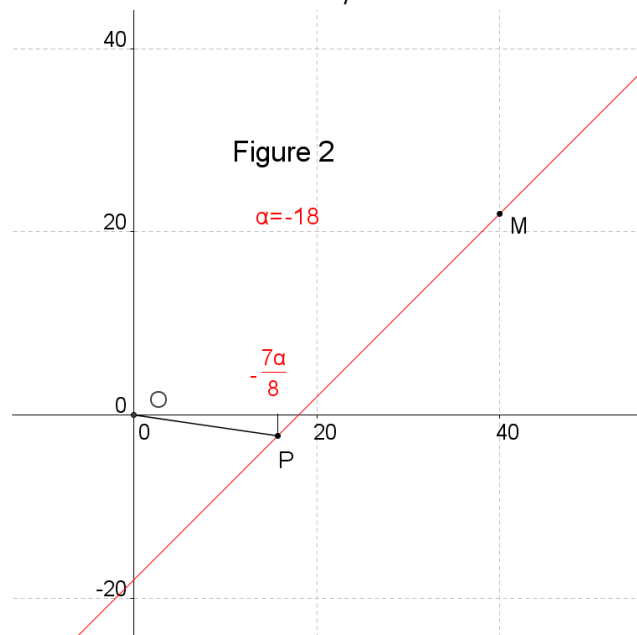
Seul  $x_2$  est racine de  $\frac{dT}{dx}$

$x$	0	$-\alpha/2$	$-7\alpha/8$	$-\alpha$	
$dT/dx$		-	0	+	$\Rightarrow P\left(-\frac{7\alpha}{8}, \frac{\alpha}{8}\right)$
$T(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

- $M$  est à droite de  $P$  si  $-\frac{7\alpha}{8} < 40$  (Voir figure 2)
- $M \equiv P$  si  $40 = -\frac{7\alpha}{8}$
- $M$  est à gauche de  $P$  si  $40 < -\frac{7\alpha}{8}$

A exclure car dans l'énoncé, on dit  $x < 40$

Conclusion :  $x < 40$  ssi  $-\frac{320}{7} < \alpha$



A titre complémentaire et bien que ce ne soit pas demandé dans l'énoncé, étudions le cas où

$P$  est à droite de  $M$ . Alors :  $\sqrt{(40-x)^2} = |40-x| = x-40$  car  $x < 40$

La mise en équation du problème conduit alors à :

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow 5(2x + \alpha) = -3\sqrt{2}\sqrt{2x^2 + 2\alpha x + x^2}$$

Si  $2x + \alpha > 0$ , il n'y a pas de racine.

Si  $2x + \alpha < 0$ , il y a deux racines,  $x_1$  et  $x_2$

Soit donc :  $40 < x$  et  $2x + \alpha < 0 \Rightarrow 40 < x < -\frac{\alpha}{2}$

On a :  $x = x_1 = -\frac{\alpha}{8} \Rightarrow 40 < -\frac{\alpha}{8} < -\frac{\alpha}{2}$  c'est-à-dire la condition  $\alpha < -320$

( $x_2 = -\frac{7\alpha}{8}$  doit être rejetée)

Par exemple, si  $\alpha = -400 \Rightarrow \begin{cases} P = (50, -350) \\ M = (40, -360) \end{cases}$  et  $T_{OP} + T_{PM} \simeq 6.033$

Enfin, si  $-320 < \alpha < -\frac{320}{7}$  alors  $P \equiv M$

---

20 aout 2011



## EXANA308 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 2.

1. Donnez le domaine de définition de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \sqrt{\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1}}$$

2. Calculez une primitive de la fonction  $f$  définie par

$$f(x) = \tan(\sin x) \cdot \cos x$$

3. Calculez la limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^6 + x^3} - x^3$$

4. Démontrez, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation  $x^2 = e^x$  admet au moins une solution réelle.

---

### Solution proposée par Nicole BERCKMANS

$$1. \begin{array}{c|c|c|c|c|c} x & 0 & 1/e & e & & \\ \hline \ln x - 1 & / & - & - & 0 & + \\ \hline \ln x + 1 & / & - & 0 & + & + \end{array} \Rightarrow \text{dom}_f = \left] 0, \frac{1}{e} \right[ \cup \left] e, +\infty \right[$$

$$2. \begin{array}{ll} t = \sin x & u = \cos t \\ dt = \cos x dx & du = -\sin t dt \end{array}$$

$$\int f(x) dx = \int \tan t dt = -\int \frac{du}{u} = -\ln(\cos(\sin x)) + k$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^6 + x^3} - x^3 = (\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^6 + x^3 - x^6}{\sqrt{x^6 + x^3} + x^3} = \left( \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + x^3} = \frac{1}{2}$$

4.  $f(x) = x^2 - e^x$  est continue sur  $\mathbb{R}$

$$f(0) = -1 < 0$$

$$f(-1) = 1 - e^{-1} = \frac{e-1}{e} > 0$$

On utilise le théorème des valeurs intermédiaires sur  $[-1, 0]$

$$\exists c \in ]-1, 0[ \text{ t.q. } f(c) = 0 \text{ c'est-à-dire } c^2 = e^c$$

# EXANA309 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011 Série 1.

On considère la fonction  $g$  définie par :

$$g(x) = 1 - x - e^{-2x}$$

1. Etudiez les variations de  $g$  et tracer sa courbe représentative (on précisera le domaine de définition de  $g$ , ses éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et décroissance et les extrema, mais on n'étudiera pas la concavité, ni les points d'inflexion).
2. Déduisez du point précédent qu'il existe un et un seul réel  $a$  strictement positif tel que  $g(a) = 0$ , puis démontrez que  $a$  appartient à l'intervalle ouvert  $\left] \frac{\ln 2}{2}, 1 \right[$
3. Etudiez le signe de  $g$ .

On considère à présent la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $] 0, +\infty [$

$$f(x) = x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}$$

4. Démontrez l'égalité :  $f'(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} g\left(\frac{1}{x}\right)$

5. Déterminez à l'aide des points précédents le domaine de définition et de croissance de  $f$ .

## Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1.  $g(x) = 1 - x - e^{-2x}$ .  $Dom_f : \mathbb{R}$ ,  $g(0) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = [1 + \infty - 0] = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \left[ \frac{1}{\infty} - 1 - \frac{0}{\infty} \right] = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - e^{-2x} = 1 \quad \Rightarrow \quad AO \equiv y = -x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = [\infty - \infty] = 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left( 1 + \frac{e^{-2x}}{x} \right) = 1 - (-\infty)(1 - \infty) = -\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-2x}}{x} = \left[ \frac{\infty}{-\infty} \right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2e^{-2x}}{1} = -\infty$$

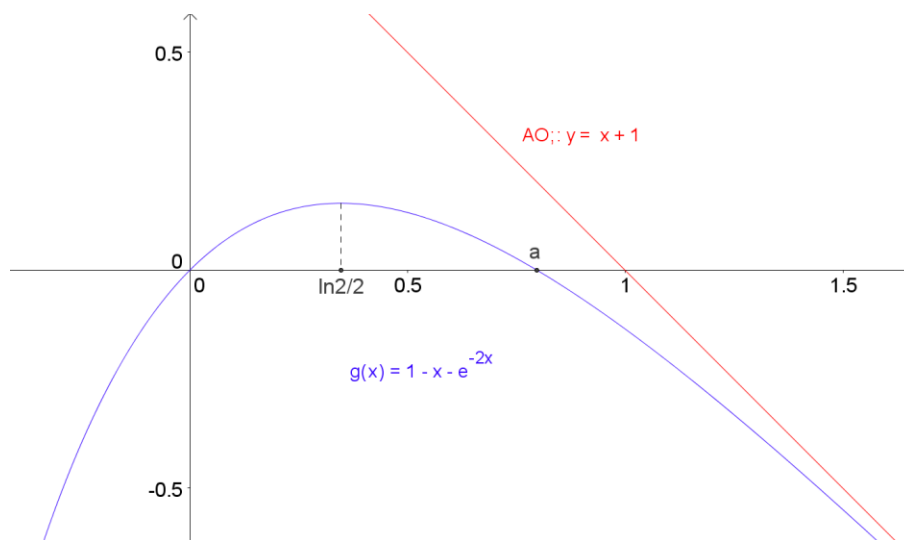
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} g'(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-1 + 2e^{-2x}) = +\infty$$

En  $-\infty$ , il n'y a ni AH, ni AO.

$$g'(x) = -1 + 2e^{-2x} \text{ s'annule en : } e^{-2x} = \frac{1}{2} \text{ c'est-à-dire en } x = \frac{\ln 2}{2}$$

$x$		0	$\frac{\ln 2}{2}$	$a$		1	
$g'(x)$	+	+	0	-	-	-	-
$g(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$ max	$\searrow$	0	$\searrow$ $-e^{-2} \approx -0.14$	$\searrow$

$$\begin{cases} g'(0) = -1 + 2 = 1 > 0 \\ g'(1) = -1 + \frac{2}{e} < 0 \end{cases}$$



$$2. g\left(\frac{\ln 2}{2}\right) = 1 - \frac{\ln 2}{2} - e^{-\ln 2} = -\frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 - \ln 2}{2} > 0$$

$$g(1) = -\frac{1}{e^2} < 0$$

$g(x)$  étant continue, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires sur  $\left] \frac{\ln 2}{2}, 1 \right[$  pour démontrer l'existence du point  $a$  tel que  $g(a) = 0$

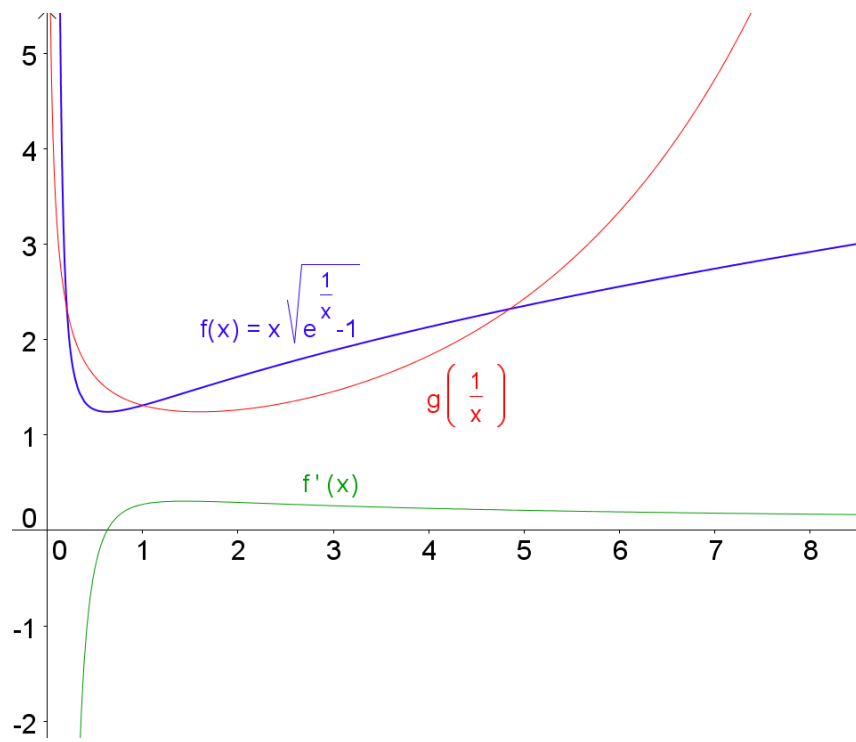
3.  $g$  est négatif sur  $]\leftarrow, 0] \cup [a, \rightarrow[$  et positif sur  $[0, a]$

$$4. f'(x) = \left(x\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}\right)' = \sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1} + \frac{x}{2\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) \cdot e^{\frac{2}{x}} = \frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} \left[ e^{\frac{2}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) - 1 \right]$$

$$\frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} g(x) = \frac{e^{\frac{2}{x}}}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} \left(1 - \frac{1}{x} - e^{-\frac{2}{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{e^{\frac{2}{x}} - 1}} \left[ e^{\frac{2}{x}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) - 1 \right]$$

5.

$x$	0	1	$1/a$	$2/\ln 2$				
$g\left(\frac{1}{x}\right)$	/	-	$-e^{-2}$	-	0	+	$1 + \frac{\ln 2}{2}$	+
$f'(x)$	/	-	$-\frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}}$	-	0	+	+	+
$f(x)$	/	$\searrow$	$\sqrt{e^2 - 1}$	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$



---

20 aout 2011