Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 31

EXANA310 – EXANA319

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet, Steve Tumson
Nicole Breckmans, Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Aout 2011

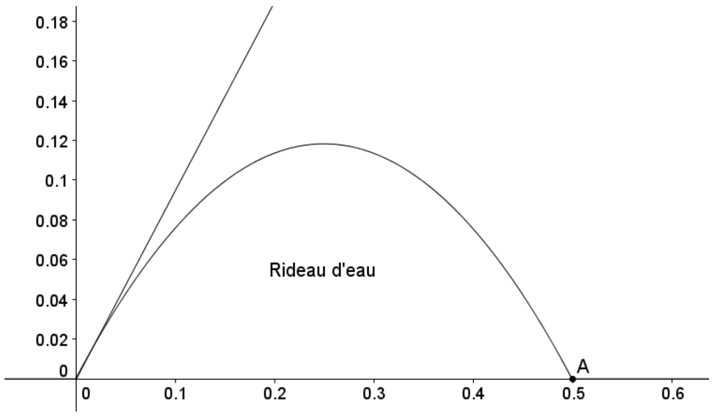
EXANA310 – EPL, UCL, Louvain, série 2, juillet 2011.

Un irrigateur crée un rideau d'eau plan et perpendiculaire au sol.
Dans ce plan *Oxy*, représenté ci-dessous, le rideau d'eau émis, à partir de l'origine, est compris entre le sol, d'équation $y = 0$, et la parabole d'équation

$$y = f(x) \qquad \text{avec} \qquad f(x) = -\frac{x^2}{\cos^2\theta} + x\tan\theta$$

où θ est un paramètre strictement compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

1. Calculez la pente de la tangente à la parabole à l'origine.
   Que représente le paramètre θ?
2. Calculez, en fonction de θ, les coordonnées du point d'intersection A entre le sol et la parabole.
3. Calculez, en fonction de θ, la surface du rideau d'eau.
4. Calculez la valeur du paramètre θ pour laquelle la surface du rideau est maximale.



Solution proposée par Nicole BERCKMANS

1. $f'(x) = -\dfrac{2x}{\cos\theta} + \tan\theta \qquad f'(0) = \tan\theta$

2. Racines de $f(x) = x\left(-\dfrac{x}{\cos\theta} + \tan\theta\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & O(0,0) \\ x_A = \sin\theta\cos\theta \end{cases}$

3. $S(\theta) = \int_0^{\sin\theta\cos\theta} -\dfrac{x^2}{\cos^2\theta} + x\tan\theta\, dx = \left[-\dfrac{x^3}{3\cos^2\theta} + \dfrac{x^2}{2}\tan\theta\right]_0^{\sin\theta\cos\theta}$

$= \dfrac{1}{6}\sin^3\theta\cos\theta$

4. $\dfrac{dS}{d\theta} = \dfrac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta - \dfrac{1}{6}\sin^4\theta = \dfrac{1}{6}\sin^2\theta\left(3\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$

Racines : $\sin\theta = 0$ et $\tan^2\theta = 3 \rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$

θ	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dS}{d\theta}$	/	+	0	−	
S	/	↗	*Max*	↘	

Rép : $\dfrac{\pi}{3}$

21 avril 2011

EXANA311 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2011.

1. Calculer la limite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$$

2. Calculer la valeur de l'intégrale définie

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx$$

3. Soit f la fonction $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=|x|^3$$

Est-elle dérivable à l'origine? Justifier.

---

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x.\ln(1+x)}\xrightarrow{H}\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{(x+1).\ln(1+x)+x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{(x+1).\ln(1+x)}{x}+1}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x+1).\ln(1+x)}{x}+1}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

car : $$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1).\ln(1+x)}{x}\xrightarrow{H}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+(x+1)\frac{1}{1+x}}{1}=1$$

2. $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}dx=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}}dx \qquad (1)$$

On pose : $$t=\cos 2x\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x.dx=-\dfrac{dt}{2}\\ x=0\Rightarrow t=1\\ x=\dfrac{\pi}{6}\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

$$(1)\Rightarrow-\frac{1}{4}\int_1^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\left[\sqrt{t}\right]_1^{\frac{1}{2}}=\boxed{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

3. 1) $x>0\Rightarrow|x|=x \Rightarrow f(x)=|x|^3=x^3 \Rightarrow f'(x)=3x^2 \Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}3x^2=0$

2) $x<0\Rightarrow|x|=-x\Rightarrow f(x)=|x|^3=-x^3\Rightarrow f'(x)=-3x^2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}-3x^2=0$

Les limites à gauche et à droite sont égales et donc la fonction est dérivable en $x=0$

EXANA312 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2011.

Soit f la fonction définie par

$$f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$$

sur le domaine $\mathbb{R}\backslash\{0\}$

1. Calculez les limtes $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 0^-} f(x)$
2. Déterminez les éventuelles asymptotes.
3. Calculer $f\,'$ et $f\,''$ puis dressez un tableau des variations de f contenant
   (a) les racines et le signe de $f\,'$, les extrema et les domaines de croissance/décroissance de f,
   (b) les racines et le signe de $f\,''$, les points d'inflexion et les domaines de concavité vers le haut/bas de f.
4. Tracez le graphe de f.
5. Discutez en fonction du paramètre réel u le nombre de solutions de l'équation

$$(x+2)e^{\frac{1}{x}}=u$$

---

1) $\lim_{x\to 0}(x+2)e^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(x+2)\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}=2\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}}$

$$\begin{cases} x\to 0^+ : \quad 2\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=2e^{+\infty}=+\infty \\ x\to 0^- : \quad 2\lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=2e^{-\infty}=0 \end{cases}$$

2) Une AV à droite en $x=0$

$$AO: m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\underbrace{\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}}_{=1}+2\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}_{=0}=1$$

$$p=\lim_{x\to\infty}f(x)-mx=\lim_{x\to\infty}\left((x+2)e^{\frac{1}{x}}-x\right)=\underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)x}_{L_3}+\underbrace{2\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}}_{=2}$$

$$L_3=\lim_{x\to\infty}\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)x=\lim_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\xrightarrow[x\to\infty\Rightarrow t=0]{t=\frac{1}{x}}\lim_{t\to 0}\frac{e^t}{t}\xrightarrow{H}\lim_{t\to 0}e^t=1$$

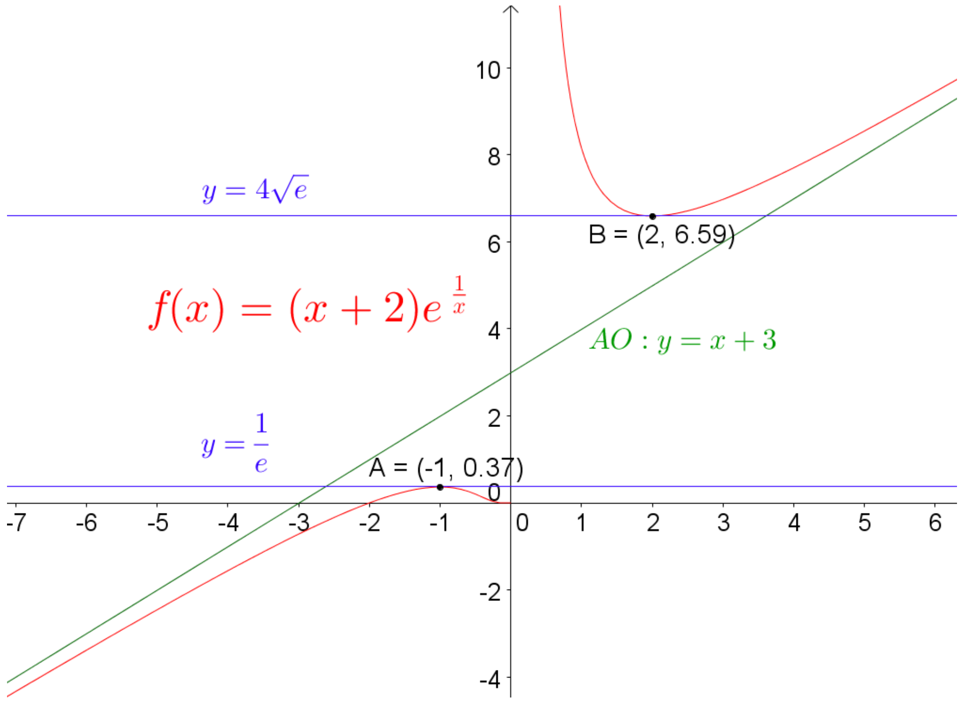
$\Rightarrow p=1+2=3$ et donc il y a une AO d'équation : $y=x+3$

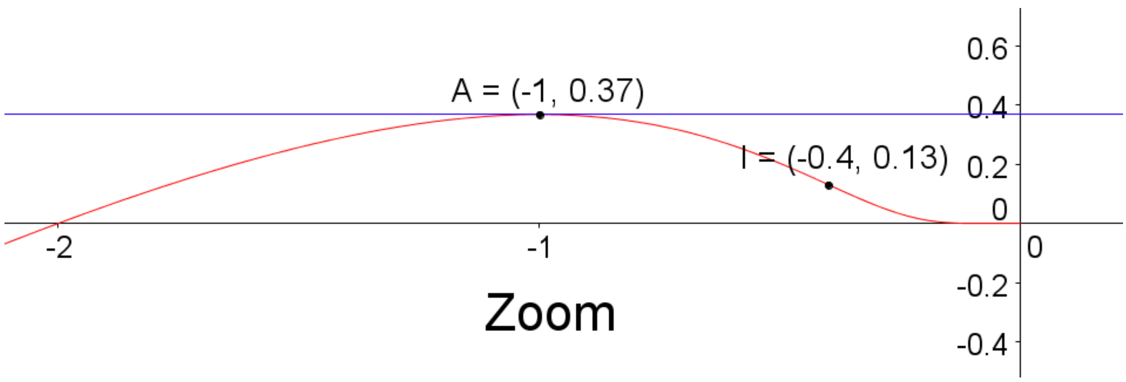
3) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}.\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}$

$f''(x)=e^{\frac{1}{x}}.\dfrac{5x+2}{x^4}$

Tableau de signes

		-1		$-\frac{2}{5}$		0		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	/	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	/	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$\nearrow$ $\cap$	$\max : A\left(-1,\frac{1}{e}\right)$	$\searrow$ $\cap$	$I:\left(-\frac{2}{5},0.13\right)$	$\searrow$ $\cup$	/	$\searrow$ $\cup$	$\min B\left(2,4\sqrt{e}\right)$	$\nearrow$ $\cup$





5) Le nombre de solutions de l'équation $(x+2)e^{\frac{1}{x}} = u$ s'obtient directement de l'analyse du graphe de $f(x)$

$u < 0$	1 solution
$0 \leq u < \frac{1}{e}$	2 solutions
$u = \frac{1}{e}$	1 solution $(x = -1)$
$\frac{1}{e} < u < 4\sqrt{e}$	Pas de solution
$u = 4\sqrt{e}$	1 solution $(x = 2)$
$u > 4\sqrt{e}$	2 solutions

30 octobre 2011

EXANA313 – EPL, UCL, LLN, Septembre 2011.

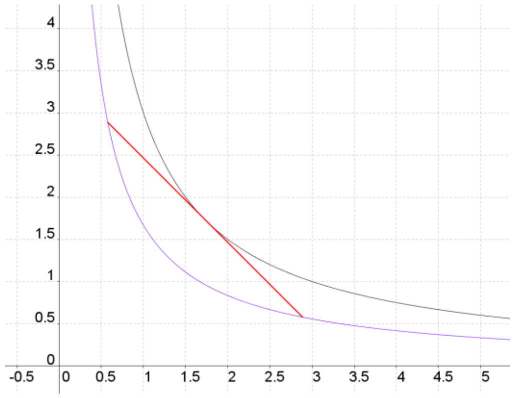
On a représenté ci-dessous, dans le plan Oxy, une rivière dont les rives intérieures (au dessus sur la figure) et extérieure (en dessous) ont pour équations respectives :

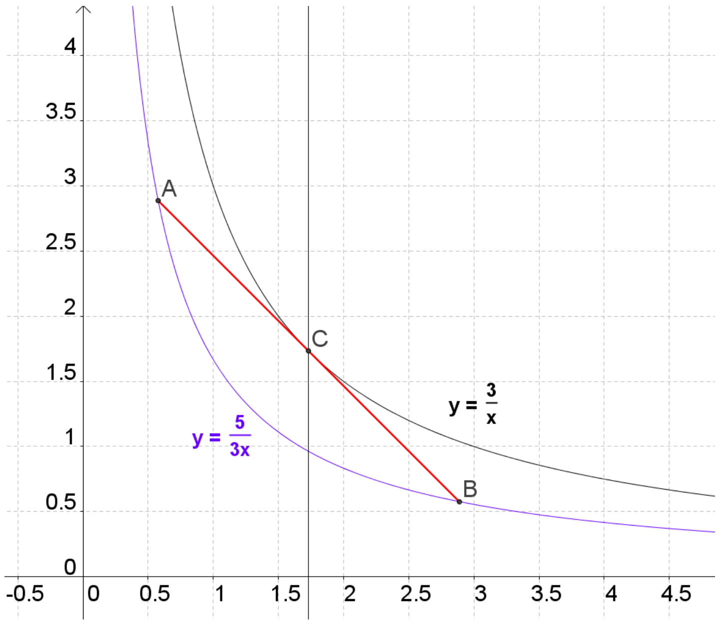
$$y = \frac{3}{x} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{5}{3x} \qquad (\text{pour } x > 0)$$

On considère un navire assimilé à un segment rectiligne. On cherche à calculer la longueur permettant encore à ce navire de naviguer le long de cette rivière. Pour cela on considère la situation extrême représentée sur la figure : un navire tangent à la rive intérieure et dont les deux extrémités se situent sur la rive extérieure.

Soit a l'abscisse du point de tangence, à déterminer.

1. Calculez l'équation de la tangente à la rive intérieure.
2. Calculez les coordonnées des deux extrémités du navire puis calculez le *carrè* de sa longueur.
3. Calculez la valeur de a conduisant au minium du carré de la longueur du navire, puis la longueur minimale possible pour le navire.





On a donc $y = \dfrac{3}{x} \Rightarrow y' = -\dfrac{3}{x^2}$.

Si l'abscisse du point C est $x = a \Rightarrow f(a) = \dfrac{3}{a}$ et $f'(a) = -\dfrac{3}{a^2}$.

L'équation de la tangente est alors :$y - f(a) = f'(a)(x-a) \Rightarrow y = \dfrac{3}{a^2}(2a - x)$

Calculons les points d'intersection :

$$\frac{5}{3x} = \frac{3}{a^2}(2a-x) \Rightarrow 9x^2 - 18ax + 5a^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5a}{3} \Rightarrow y = \dfrac{1}{a} \\ x = \dfrac{a}{3} \quad \Rightarrow y = \dfrac{5}{a} \end{cases}$$

Le carré de la distance est alors :

$$d^2 = \left[\frac{a}{3}(5-1)\right]^2 + \left[\frac{1}{a}(1-5)\right]^2 = \frac{16}{9}\left(a^2 + \frac{9}{a^2}\right)$$

La distance présente un extrémum si :

$$(d^2)' = \frac{32}{9}\left(a - \frac{9}{a^3}\right) = 0 \Rightarrow a = \frac{9}{a^3} \Rightarrow a = \sqrt{3} \text{ (Donc : } d = \frac{4\sqrt{6}}{3}\text{)}$$

Il s'agit bien d'un minimum car $\begin{cases} a < \sqrt{3} \rightarrow \dfrac{a^4 - 9}{a^3} < 0 \\ a > \sqrt{3} \rightarrow \dfrac{a^4 - 9}{a^3} > 0 \end{cases}$

EXANA314 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

On considère la fonction $f(x) = \ln \frac{x^3}{4 - x^2}$

i. Déterminez le domaine de définition de f.

ii. Calculez

$$\lim_{x\to -2} f(x), \quad \lim_{x\to 0} f(x), \quad \lim_{x\to 1} f(x) \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2} f(x)$$

iii. Déterminez les équations des éventuelles asymptotes de f.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)

http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. L'argument du logarithme doit être strictement positif soit

$$\frac{x^3}{4-x^2} > 0$$

On a

		-2		0		2	
x^3	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$4-x^2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$\frac{x^3}{4-x^2}$	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

et donc

$$\operatorname{dom} f =]-\infty, -2[\cup]0, 2[$$

ii. Calculons les limites

$$\lim_{x\to -2^-} \ln \frac{x^3}{4-x^2} = \ln\left(\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3}{4-x^2}\right) = \left[\ln(+\infty)\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \ln \frac{x^3}{4-x^2} = \ln\left(\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{4-x^2}\right) = \left[\ln 0\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1} \ln \frac{x^3}{4-x^2} = \ln\left(\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{4-x^2}\right) = \ln\frac{1}{3} = -\ln 3$$

$$\lim_{x\to 2^-} \ln \frac{x^3}{4-x^2} = \ln\left(\lim_{x\to 2^-} \frac{x^3}{4-x^2}\right) = \left[\ln(+\infty)\right] = +\infty$$

iii.
- Les limites calculées nous permettent d'identifier des asymptotes verticales $x = -2$, $x = 0$ et $x = 2$.
- Pour examiner l'existence d'une asymptote horizontale au voisinage de $-\infty$, calculons

$$\lim_{x\to -\infty} \ln \frac{x^3}{4-x^2} = \ln\left(\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{4-x^2}\right) = \left[\ln(+\infty)\right] = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.

- Pour examiner l'existence d'une asymptote oblique d'équation générale $y = ax + b$ au voisinage de $-\infty$, calculons d'une part

$$a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln \frac{x^3}{4-x^2}}{x} = \left[\frac{+\infty}{-\infty}\right]$$

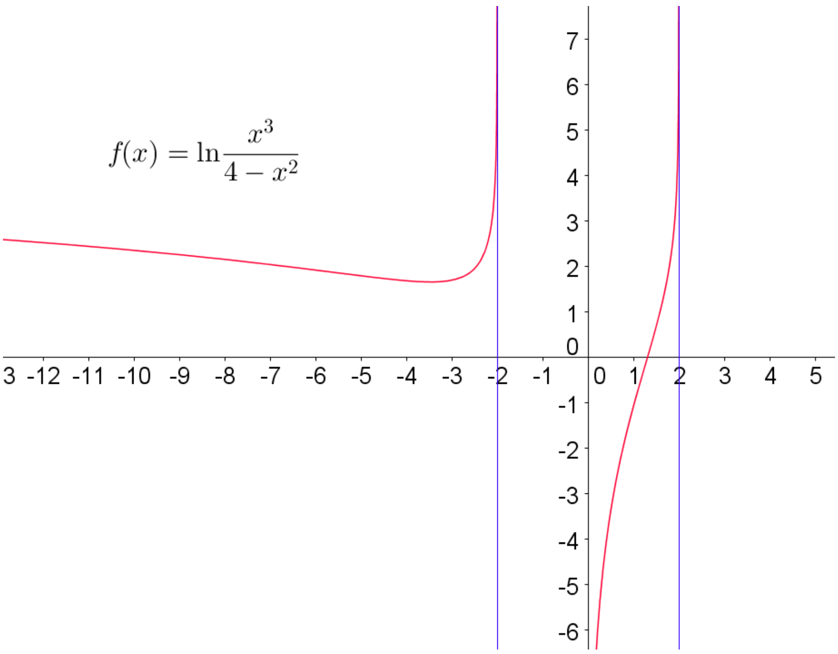
Il s'agit d'une indétermination qui peut être levée par le théorème de l'Hospital. On a

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln \frac{x^3}{4-x^2}}{x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x^3}\,\frac{3x^2(4-x^2)+x^3(2x)}{(4-x^2)^2}}{1} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{12x^2-x^4}{x^3(4-x^2)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'autre part,

$$b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$$

Il n'y a donc pas non plus d'asymptote oblique.



20 juin 2012

EXANA315 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

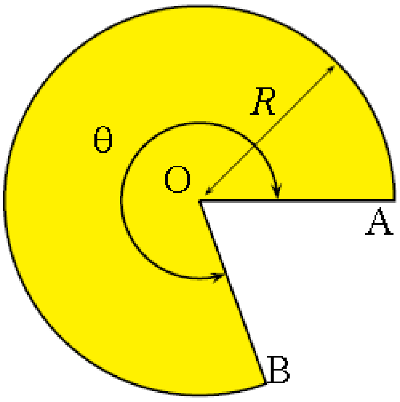
On découpe dans une feuille de papier un secteur corculaire de rayon R et d'ouverture θ comme représenté ci-dessou. En appliquant l'un sur l'autre les points A et B, on forme un cône de sommet O.

i. Montrer que le volume du cône est donné par une expression du type

$$V(\theta) = \alpha R^3 \theta^2 \sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

où α est une constante positive à déterminer et où θ est exprimé en radians.

ii. Le rayon R étant fixé, déterminez le volume maximun du cône pouvant être construit de la sorte. Justifiez.



Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)

http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. Le volume d'un cône se calcule au moyen de la formule

$$V = \frac{1}{3} hB$$

où h est la hauteur et B est l'aire de la base.

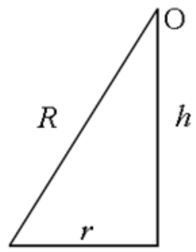
D'une part, le schéma présenté dans l'énoncé nous apprend que le périmètre P de la base du cône est donné par $P = \theta R$. Le rayon r de la base vaut donc

$$r = \frac{P}{2\pi} = \frac{\theta R}{2\pi}$$

et son aire est donnée par

$$B = \pi r^2 = \frac{\theta^2 R^2}{4\pi}$$

D'autre part, dans toute section du cône par un plan vertical, on identifie le triangle rectangle



où

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{4\pi^2}} = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

Dès lors

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}hB = \frac{1}{3}\frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}\left(\frac{\theta^2 R^2}{4\pi}\right) = \frac{1}{24\pi^2}R^3\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \\ &= \alpha R^3\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} \end{aligned}$$

où

$$\alpha = \frac{1}{24\pi^2}$$

ii. Nous cherchons le maximum de la fonction

$$V(\theta) = \alpha R^3\theta^2\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}$$

en fonction de la variable $\theta \in [0, 2\pi[$. Calculons sa dérivée première

$$\begin{aligned} V'(\theta) &= 2\alpha R^3\theta\sqrt{4\pi^2 - \theta^2} - \alpha R^3\frac{\theta^3}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \\ &= \frac{\alpha R^3\theta(8\pi^2 - 3\theta^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \theta^2}} \end{aligned}$$

Elle s'annule en $\theta = 0$, ce qui correspond à un volume nul, et en

$$\theta = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi$$

qui correspond bien à un maximum puisque la dérivée est positive à gauche de ce point et négative à droite. Pour cette valeur de θ, on obtient

$$\begin{aligned} V\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi\right) &= \alpha R^3 \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi\right)^2 \sqrt{4\pi^2 - \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\pi\right)^2} \\ &= \alpha R^3 \frac{16\pi^3}{3\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{24\pi^2} R^3 \frac{16\pi^3}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{9\sqrt{3}}\pi R^3 \end{aligned}$$

qui est le volume maximum du cône pouvant être construit de la sorte.

EXANA316 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

On pose

$$c_n = \int_0^{\pi} (x+a)^n \cos x \, dx \qquad \text{et} \qquad s_n = \int_0^{\pi} (x+a)^n \sin x \, dx$$

où n désigne un entier positif ou nul et a est un réel quelconque.

i. Calculer c_0 et s_0

ii. Calculer c_1 et s_1.

iii. Montrez que, pour tout n entier non nul, $c_n = -ns_{n-1}$

iv. Montrez que, pour tout n entier strictement supérieur à 1,

$$s_n = (\pi + a)^n + a^n - n(n-1)s_{n-2}$$

v. Montrez que, pour tout n pair supérieur ou égal à 2,

$$\int_0^{\pi} \left[(x-\pi)^n - x^n\right] \sin x \, dx = 0$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)

http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i.

$$c_0 = \int_0^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi} = 0$$

$$s_0 = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2$$

ii. En intégrant par parties, on obtient

$$c_1 = \int_0^{\pi} (x+a) \cos x \, dx = [(x+a) \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \, dx = -s_0 = -2$$

$$\begin{aligned} s_1 &= \int_0^{\pi} (x+a) \sin x \, dx = [-(x+a) \cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \, dx \\ &= \pi + a + a + c_0 = \pi + 2a \end{aligned}$$

iii. En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^{\pi} (x+a)^n \cos x \, dx = [(x+a)^n \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} n(x+a)^{n-1} \sin x \, dx \\ &= -ns_{n-1} \end{aligned}$$

iv. En intégrant par parties, on obtient

$$s_n = \int_0^\pi (x+a)^n \sin x \, dx = \left[-(x+a)^n \cos x\right]_0^\pi + n\int_0^\pi (x+a)^{n-1} \cos x \, dx$$
$$= (\pi+a)^n + a^n + n c_{n-1}$$

Ensuite, puisque $c_{n-1} = -(n-1)\, s_{n-2}$, on a

$$s_n = (\pi+a)^n + a^n - n(n-1)\, s_{n-2}$$

v. On a

$$\int_0^\pi \left[(x-\pi)^n - x^n\right] \sin x \, dx = \int_0^\pi (x-\pi)^n \sin x \, dx - \int_0^\pi x^n \sin x \, dx$$
$$= s_{n,-\pi} - s_{n,0}$$

où, en utilisant la formule du point iv. et le fait que n est pair,

$$s_{n,-\pi} = (-\pi)^n - n(n-1)\, s_{n-2,-\pi} = \pi^n - n(n-1)\, s_{n-2,-\pi}$$

et

$$s_{n,0} = \pi^n - n(n-1)\, s_{n-2,0}$$

Étant donné que s_0 ne dépend pas de a (cf. i.), $s_{n-2,-\pi} = s_{n-2,0}$ et le résultat est nul.

---

20 juin 2012

EXANA317 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2011.

L'introduction pour les questions EXANA317 et EXANA318 est la même.

Introduction

L'installation d'une éolienne sur un site particulier est généralement précédé d'une étude de longue durée destinée à recueillir les statistiques décrivant la variation du vent à cet endroit. Ignorant l'information sur la direction du vent puisque les éoliennes peuvent pivoter autour de l'axe central avec celui-ci, la distribution statistique de la vitesse du vent est généralement décrite par une *loi de Weibull* de la forme.

$$f(v) = \alpha v \exp\left(-x^2/\lambda^2\right)$$

où v désigne la vitesse du vent et où α et λ sont des paramètres constants strictement positifs déterminés en fonction des mesures effectuées à l'endroit désiré.

La fonction $f(v)$ est la *densité de probabilité*. Elle permet d'exprimer la probabilité que le vent souffle à une vitesse comprise entre v_a et v_b par

$$P(v_a < v < v_b) = \int_{v_a}^{v_b} f(v)\,dv$$

Question

Etudiez le graphe de la fonction $f(v)$ sur le domaine utile constitué des valeurs $v \geq$.

En particulier,

i. Déterminez les asymptotes éventuelles.

ii. Etudiez la croissance/décroissance et déterminez les extrema éventuels.

iii. Etudiez la concavité et déterminer les points d'inflexion éventuels;

iv. Déterminez les équations des tangentes au graphe de f en l'abcisse $v = 0$ ainsi qu'aux éventuels extrema et points d'inflexion du graphe de f.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)

http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. La fonction

$$f(v) = \alpha v \exp\left(-v^2/\lambda^2\right)$$

est définie sur $\mathbb{R}$. Nous étudierons cependant ses variations uniquement sur l'intervalle utile $v \in [0,+\infty[$. On peut noter que $f(0) = 0$ et que la fonction est strictement positive sur $]0,+\infty[$.

ii. La fonction étant définie sur tout l'intervalle utile $[0,+\infty[$, elle n'y présente pas d'asymptote verticale.

Pour identifier une éventuelle asymptote horizontale en $+\infty$, on calcule

$$\lim_{v\to+\infty} \alpha\, v \exp(-v^2/\lambda^2) = [+\infty \cdot 0]$$

Pour lever l'indétermination, on applique le théorème de L'Hospital à la fonction écrite sous la forme

$$\begin{aligned}\lim_{v\to+\infty} \alpha\, v \exp(-v^2/\lambda^2) &= \alpha \lim_{v\to+\infty} \frac{v}{\exp(v^2/\lambda^2)} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right] \\ &= \alpha \lim_{v\to+\infty} \frac{[v]'}{\left[\exp\left(v^2/\lambda^2\right)\right]'} \\ &= \alpha \lim_{v\to+\infty} \frac{\lambda^2}{2v\exp\left(v^2/\lambda^2\right)} = 0\end{aligned}$$

On en déduit l'existence d'une asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$. La fonction étant positive, cette asymptote est approchée par valeur supérieure.

iii. Pour identifier d'éventuels extrema et étudier la croissance/décroissance de la fonction, on évalue

$$f'(v) = \alpha \exp\left(-v^2/\lambda^2\right) - 2\alpha\frac{v^2}{\lambda^2}\exp\left(-v^2/\lambda^2\right) = \alpha\exp\left(-v^2/\lambda^2\right)\left(1 - \frac{2v^2}{\lambda^2}\right)$$

Sur $[0,+\infty[$, la dérivée s'annule uniquement en $v_\star = \lambda/\sqrt{2}$ et on a

v	0		$v_\star$		$+\infty$
f'	α	$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	

La fonction présente donc un maximum local en $v = v_\star = \lambda/\sqrt{2}$. En ce point, on a

$$f(v_\star) = \frac{\alpha\,\lambda}{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-1/2}$$

iv. Par une nouvelle dérivation, on obtient

$$\begin{aligned}f''(v) &= -2\alpha\frac{v}{\lambda^2}\exp\left(-v^2/\lambda^2\right)\left(1 - \frac{2v^2}{\lambda^2}\right) - 4\alpha\frac{v}{\lambda^2}\exp\left(-v^2/\lambda^2\right) \\ &= 2\alpha\frac{v}{\lambda^2}\exp\left(-v^2/\lambda^2\right)\left(\frac{2v^2}{\lambda^2} - 3\right)\end{aligned}$$

Sur $[0,+\infty[$, cette expression s'annule en 0 et en $v = v_I = \sqrt{3/2}\,\lambda > v_\star$. Pour préciser le comportement de la fonction au voisinage de l'origine, il est utile de considérer aussi les variations du signe de f'' pour des valeurs négatives de v

v		0		v_I		$+\infty$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$\cup$	Pt. inflexion	$\cap$	Pt. inflexion	$\cup$	

Puisque la dérivée seconde chance de signe de part et d'autre de 0 et de v_I, on en déduit l'existence de points d'inflexion aux abscisses $v = 0$ et $v = v_I = \sqrt{3/2}\,\lambda$.

v. L'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse v_0 est donnée par

$$y = f(v_0) + f'(v_0)(v - v_0)$$

À l'origine, *i.e.* pour $v_0 = 0$, on a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \alpha$. Dés lors, l'équation de la tangente à l'origine est donnée par $y = \alpha v$.
Au point $v = v_*$, on a $f'(v_*) = 0$ et la tangente est horizontale. Son équation est

$$y = f(v_*) = \frac{\alpha\lambda}{\sqrt{2}} e^{-1/2}$$

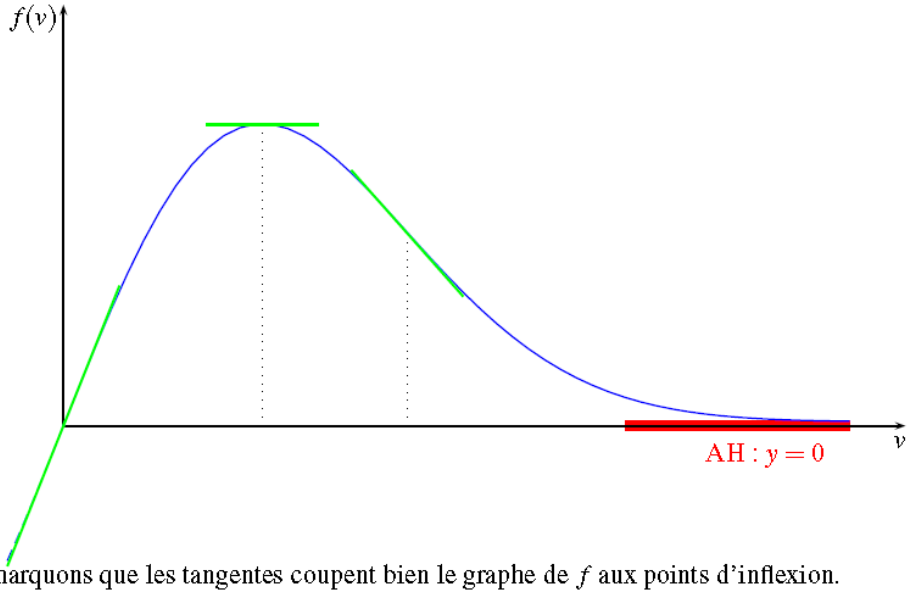
Au point $v = v_I$, on a

$$f(v_I) = \sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda e^{-3/2}, \qquad f'(v_I) = -2\alpha e^{-3/2}$$

et l'équation de la tangente est

$$y = \sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda e^{-3/2} - 2\alpha e^{-3/2}(v - \sqrt{3/2}\lambda) = 3\sqrt{\frac{3}{2}}\alpha\lambda e^{-3/2} - 2\alpha e^{-3/2} v$$

vi. Regroupant tous les résultats précédents, on peut esquisser le graphe de f et les tangentes demandées de la façon suivante :



Remarquons que les tangentes coupent bien le graphe de f aux points d'inflexion.

EXANA318 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2011.

L'introduction pour les questions EXANA317 et EXANA318 est la même.

Introduction

L'installation d'une éolienne sur un site particulier est généralement précédé d'une étude de longue durée destinée à recueillir les statistiques décrivant la variation du vent à cet endroit. Ignorant l'information sur la direction du vent puisque les éoliennes peuvent pivoter autour de l'axe central avec celui-ci, la distribution statistique de la vitesse du vent est généralement décrite par une *loi de Weibull* de la forme.

$$f(v) = \alpha v \exp\left(-x^2 / \lambda^2\right)$$

où v désigne la vitesse du vent et où α et λ sont des paramètres constants strictement positifs déterminés en fonction des mesures effectuées à l'endroit désiré.

La fonction $f(v)$ est la *densité de probabilité*. Elle permet d'exprimer la probabilité que le vent souffle à une vitesse comprise entre v_a et v_b par

$$P(v_a < v < v_b) = \int_{v_a}^{v_b} f(v)\,dv$$

Question

i. Sachant que (condition de normalisation)

$$P(0 < v \le +\infty) = \int_0^{+\infty} f(v)\,dv = 1$$

montrez que

$$\alpha = \frac{2}{\lambda^2}$$

Dans la suite on utilisera cette valeur de α.

ii. Calculez en fonction de u (et de λ) la probabilité $F(u)$ que la vitesse du vent soit inférieure à une valeur $u > 0$ fixée.

iii. Montrez que les moments successifs

$$\mu_n = \int_0^{\infty} v^n f(v)\,dv \qquad (n \ge 0)$$

vérifient une relation de récurrence du type

$$\mu_n = \beta n u_{n-2} \qquad \text{pour tout } n \ge 2$$

où β est une constante à déterminer.

iv. Sachant que (intégrale de Poisson)

$$\mu_1 = \int_0^{+\infty} v f(v)\,dv = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \qquad (a > 0)$$

calculez la puissance moyenne $\mu_1 = \int_0^{+\infty} v f(v)\,dv$

v. Calculer la puissance moyenne théorique de $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P} = \eta C_p \mu_3 = \eta C_p \int_0^{+\infty} v^3 f(v)\,dv$$

(où η et C_p sont des paramètres, $\eta \approx 0.59$ désignant le rendement théorique maximum de l'éolienne et C_p étant le coefficient de puissance) pouvant être produite par une éolienne placée à cet endroit.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ, Prof Vincent DENOEL)
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

i. On doit avoir

$$1 = \int_0^\infty \alpha v \exp(-v^2/\lambda^2) dv = \left[-\frac{1}{2}\alpha\lambda^2 \exp(-v^2/\lambda^2)\right]_0^\infty = \frac{1}{2}\alpha\lambda^2$$

Dès lors,

$$\alpha = \frac{2}{\lambda^2}$$

ii. La probabilité recherchée est donnée par

$$F(u) = P(0 \leq v \leq u) = \int_0^u f(v) dv = \left[-\frac{1}{2}\alpha\lambda^2 \exp(-v^2/\lambda^2)\right]_0^u = \frac{1}{2}\alpha\lambda^2 \left[1 - \exp(-u^2/\lambda^2)\right]$$

soit, en utilisant le résultat du point i.,

$$F(u) = 1 - \exp(-u^2/\lambda^2)$$

iii. Pour tout n positif, on peut transformer

$$\mu_n = \alpha \int_0^\infty v^{n+1} \exp(-v^2/\lambda^2) dv$$

en exploitant la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b g'(v)h(v)dv = [g(v)h(v)]_a^b - \int_a^b g(v)h'(v)dv$$

où

$$\begin{cases} g'(v) = \alpha v \exp(-v^2/\lambda^2) \\ h(v) = v^n \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} g(v) = -\frac{1}{2}\alpha\lambda^2 \exp(-v^2/\lambda^2) \\ h'(v) = nv^{n-1} \end{cases}$$

Il vient,

$$\begin{aligned} \mu_n &= \left[-\frac{1}{2}\alpha v^n \lambda^2 \exp(-v^2/\lambda^2)\right]_0^\infty + \frac{1}{2}\alpha n\lambda^2 \int_0^\infty v^{n-1} \exp(-v^2/\lambda^2) dv \\ &= 0 + \frac{1}{2}\alpha n\lambda^2 \int_0^\infty v^{n-1} \exp(-v^2/\lambda^2) dv \end{aligned}$$

En particulier, pour tout $n \geq 2$, il vient donc

$$\mu_n = \frac{1}{2} n\lambda^2 \mu_{n-2}$$

qui est de la forme annoncée dans l'énoncé pour $\beta = \lambda^2/2$.

iv. La valeur moyenne de la vitesse du vent est donnée par

$$\mu_1 = \int_0^{+\infty} v f(v) dv = \alpha \int_0^{+\infty} v^2 \exp\left(-v^2/\lambda^2\right) dv$$

En appliquant pour $n = 1$ la procédure d'intégration par parties introduite au point précédent, on obtient

$$\mu_1 = \alpha \int_0^{+\infty} v^2 \exp\left(-v^2/\lambda^2\right) dv = \frac{1}{2}\alpha\lambda^2 \int_0^{\infty} \exp\left(-v^2/\lambda^2\right) dv$$

L'intégrale apparaissant dans le membre de droite est une intégrale de Poisson du type

$$\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-ax^2}\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Exploitant ce résultat et la valeur de α obtenue au point i, il vient dès lors

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\alpha\lambda^2 \left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1/\lambda^2}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\alpha\lambda^3 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\lambda$$

v. La puissance moyenne théorique est donnée par

$$\mathcal{P} = \eta\, C_p\, \mu_3 = \eta\, C_p \int_0^{+\infty} v^3 f(v) dv$$

En utilisant la formule de récurrence obtenue au point iii., il vient

$$\mathcal{P} = \eta\, C_p\, \mu_3 = \frac{3}{2}\eta\, C_p\, \lambda^2\, \mu_1$$

La valeur de μ_1 a été déterminée au point précédent de sorte que

$$\mathcal{P} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\eta\, C_p\, \lambda^3$$

EXANA319 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2011.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{e\ln|x|}{x}$ pour tout réel x non nul.

a) f est-elle paire, impaire? Justifier.

b) Déterminer les zéros de f.

c) Que vaut la limite de $f(x)$

- Lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
- Lorsque x tend vers 0 par valeurs >0? Justifier.

d) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

e) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de minimum? Justifier et calculer leurs coordonnées.

f) Trouver les éventuels points d'inflexion du graphe de f et calculer leurs coordonnées. Justifier.

g) Esquissez le graphe de la fonction f.

Solution proposée par Dominique Druez

a) La fonction est impaire :

$$f(-x)=\frac{e\cdot ln|-x|}{-x}=-\frac{e\cdot ln|x|}{x}=-f(x)$$

b) f(x) s'annule en x=1

c)

$$\lim_{+\infty}\frac{e\cdot\ln x}{x}=\lim_{+\infty}\frac{e\cdot 1/x}{1}=\lim_{+\infty}\frac{e}{x}=0$$

$$\lim_{x>0}\frac{e\cdot\ln x}{x}=\lim_{x>0}\frac{e\cdot\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x>0}\frac{e}{x}=\infty$$

d)

$$f'(x)=\left(\frac{e\cdot\ln x}{x}\right)'=e\frac{1-\ln x}{x^2}$$

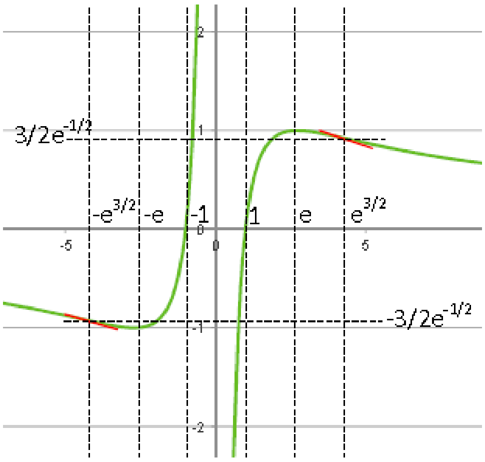
$$f''(x)=\left(e\frac{1-\ln x}{x^2}\right)'=e\frac{-\frac{x^2}{x}-2x(1-\ln x)}{x^4}=e\frac{2\ln x-3}{x^3}$$

e) Le graphe comporte un maximum en x=e, f(x)=1 (et par conséquent un minimum en x=-e, f(x)=-1 car la fonction est impair).

$x\geq 0$	0		1		e		$e^{3/2}$	
f	-	-	0	+	+	+	+	+
f'	+	+	+	+	0	-	-	-
f''	-	-	-	-	-	-	0	+
Pente	↑	↑	↑	↑	Max	↓	↓	↓
Concavité	∩	∩	∩	∩	∩	∩	~	∪

f) Le graphe comporte 2 points d'inflexions $x=\pm e^{\frac{3}{2}}, f(x)=\pm\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}$

g)



On peut étudier la fonction à droite de 0 en omettant la valeur absolue.

Hospital
Asymptote horizontale
$y=0$

Hospital
Asymptote verticale
$x=0$

$Zéro\ en\ \ln x=1$
$\rightarrow x=e$

$Zéro\ en\ \ln x=\frac{3}{2}$
$\rightarrow x=e^{3/2}$