Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 37

EXANA370 – EXANA379

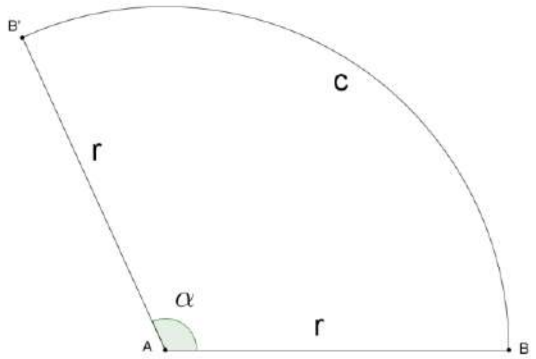
http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Janvier 2014

EXANA370 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2013.

On appelle secteur circulaire la région comprise entre deux rayons d'un cercle C et un des deux arcs de cercle C joignant les extrémités de ces rayons. On veut fabriquer une plaque en forme de secteur circulaire dont le périmètre vaut 12 mètres et dont l'aire est maximale. Calculer le rayon r du cercle, la longueur de l'arc de cercle et l'angle (en radians) entre les deux rayons.



Périmètre : $p = r(2+\alpha) = 12 \Rightarrow r = \dfrac{12}{2+\alpha}$

Surface : $A = \alpha r^2 = \dfrac{12^2\alpha}{(2+\alpha)^2} \Rightarrow \dfrac{dA}{d\alpha} = -144\dfrac{\alpha-2}{(\alpha+2)^2} \Rightarrow \dfrac{dA}{d\alpha} = 0$ si $\alpha = 2$

Il s'agit bien d'un maximum car :

α		2	
$\dfrac{dA}{d\alpha}$	+	0	−
A	↗	*Max*	↘

Conclusion: $\alpha = 2$ rad, $r = 3$ m, $c = 6$ m et $A = 18$ m^2

---

20 février 2014

EXANA371 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 \ln|x| - x^2 & \text{pour tout réel } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

a) f est-elle paire, impaire? Justifier

b) Déterminer les éventuels zéros de f.

c) Que vaut la limite de f

- lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
- lorsque x tend vers 0 par valeurs > 0? Justifier.

d) f est-elle continue en $x = 0$? Justifier.

e) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

f) Combien le graphe de f possède-t-il de points de maximum? de points de minimum? de points d'inflexion? Justifier et calculer leurs coordonnées.

g) Esquissez le graphe de f, en indiquant les différents points qui apparaissent dans vos réponses aux questions précédentes.

Solution proposée par Dominique Druez

a) f est paire

$f(-x) = (-x)^2 \ln|-x| - (-x)^2 = x^2 \ln|x| - x^2 = f(x)$

b) La fonction s'annule en $x = 0$ *et* $x = e$

$x^2 \ln x - x^2 = x^2(\ln x - 1)$

c)

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 \ln x - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2(\ln x - 1) = +\infty.\infty = \infty$

$\lim\limits_{x>0} x^2 \ln x - x^2 = \lim\limits_{x>0} \frac{(\ln x - 1)'}{(1/x^2)'} = \lim\limits_{x>0} \frac{1/x}{-2x/x^4} = \lim\limits_{x>0} -\frac{x^2}{2} = 0$

d) f est continue en x = 0

$\lim\limits_{x>0} f(x) = \lim\limits_{x<0} f(x) = f(x) = 0$

e) Calculer f′(x) et f′′(x).

$f'(x) = [x^2(\ln x - 1)]' = 2x(\ln x - 1) + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2\ln x - 1)$

$\lim\limits_{x>0} x(2\ln x - 1) = \lim\limits_{x>0} \frac{2/x}{-1/x^2} = \lim\limits_{x>0} -2x = 0$

$f''(x) = [x(2\ln x - 1)]' = 1 \cdot (2\ln x - 1) + \frac{2}{x} \cdot x = 2\ln x + 1$

f)

	0		$e^{-1/2}$		$e^{1/2}$		e	
$f''(x)$	/	-	0	+	+	+	+	+
$f'(x)$	0	-	-	-	0	+	+	+
$f(x)$	0	-	-	-	-	-	0	+
$f(x)$	max	↓	↓	↓	min	↑	↑	↑
$f(x)$	∩	∩	~	∪	∪	∪	∪	∪

La fonction peut être uniquement étudiée pour $x \geq 0$, les résultats sont symétriques pour $x \leq 0$. Les valeurs absolues peuvent donc être omises.

L'Hospital

f′ s'annule en 0 et $e^{1/2}$

f′′ s'annule en $e^{-1/2}$

Maximum en $(0, 0)$

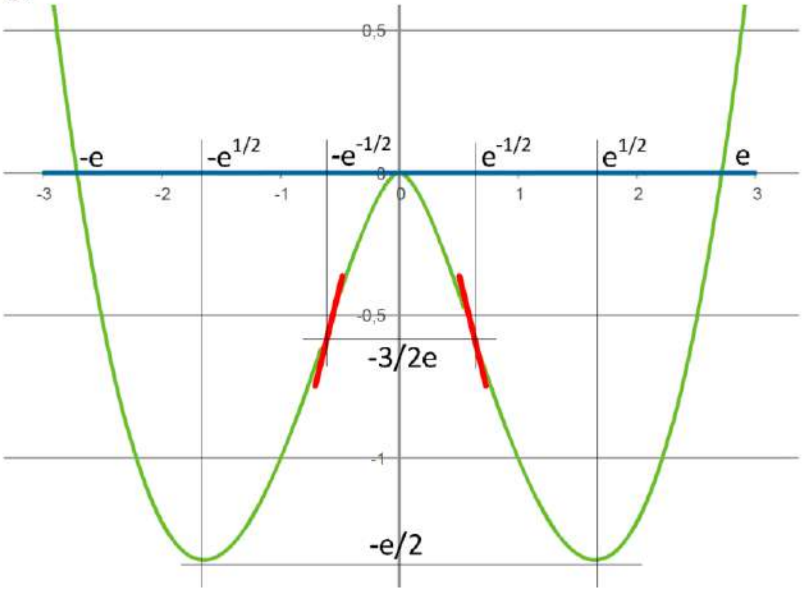
Minimum en

$\left(e^{1/2}, -\frac{1}{2}e\right), \left(-e^{1/2}, -\frac{1}{2}e\right)$

Inflexion en

$\left(e^{-1/2}, -\frac{3}{2e}\right), \left(-e^{1/2}, -\frac{3}{2e}\right)$

g)



13 septembre 2013

EXANA372 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

Calculer (en justifiant les calculs)

a) $\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx$

b) $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$ $\quad (a$ et $b \neq 0)$

Solution proposée par Dominique Druez

a)

$$\int_0^1 \ln(x^2+1)\,dx = [x\ln(x^2+1)]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}dx =$$

$$\ln 2 - 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \ln 2 - 2[x]_0^1 + [2\,\mathrm{arctg}\,x]_0^1 =$$

$$\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{2}$$

Par partie :

$$u = \ln(x^2+1) \to du = \frac{2x}{x^2+1}$$

$$dv = dx \to v = x$$

Division euclidienne

b)

$$I = \int e^{ax}\sin(bx)\,dx = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \int \frac{a}{b}e^{ax}\cos(bx)\,dx$$

$$I = -\frac{1}{b}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin(bx)\,dx$$

$$I = -\frac{b}{b^2}e^{ax}\cos(bx) + \frac{a}{b^2}e^{ax}\sin(bx) - \frac{a^2}{b^2}I + C$$

$$I + \frac{a^2}{b^2}I = \frac{e^{ax}}{b^2}[a\sin(bx) - b\cos(bx)] + C$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin(bx) - b\cos(bx)] + C$$

Par partie :

$$u = e^{ax} \to du = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$dv = \sin(bx) \to v = -\frac{1}{b}\cos(bx)$$

$$dv = \cos(bx) \to v = \frac{1}{b}\sin(bx)$$

Le 2 mai 2014

EXANA373 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

A partir d'un tronc d'arbre cylindrique de diamètre 12 dm, on veut fabriquer une poutre prismatique dont la base est un rectangle de largeur l et de longueur L inscrit dans un cercle de diamètre 12 dm. Sachant que la résistance d'une telle poutre est proportionnelle au produit de la largeur par le carré de la longueur du rectangle de base, calculer l et L pour que la résistance de la poutre soit maximale.

Solution proposée par Dominique Druez

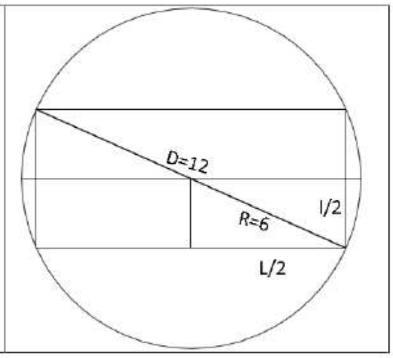
$maximiser\ l.L^2, contrainte: 6^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \rightarrow L^2 = 144 - l^2$

$l.L^2 = l(144 - l^2) = 144l - l^3$

$(l.L^2)' = 144 - 3l^2 = 0 \rightarrow l = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \rightarrow L = \sqrt{144 - 48} = 4\sqrt{6}$

$maximum\ ?\ oui$

		$4\sqrt{3}$	
$(l.L^2)'$	+	0	-
$l.L^2$	↑	max	↓



Contrainte : $6^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \Rightarrow L^2 = 144 - l^2$

Fonction à maximiser : $A = l.L^2 = l\left(144 - l^2\right) = 144l - l^3$

On dérive : $A' = \left(l.L^2\right)' = 144 - 3l^2 = 0 \Rightarrow l = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \Rightarrow L = \sqrt{144-68} = 4\sqrt{6}$

Il faut vérifier qu'il s'agit bien d'un maximum.

		$4\sqrt{3}$	
A'	+	0	−
A	↗	Max	↘

Conclusion : $\boxed{l = 4\sqrt{3} \text{ et } L = 4\sqrt{6}}$

Le 2 mai 2014.

EXANA374 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Soit la fonction

$$f(x) = x^{\alpha} \ln x$$

i. En considérant d'abord le cas $\alpha = 2$,

(a) déterminez le domaine de définition de f ;

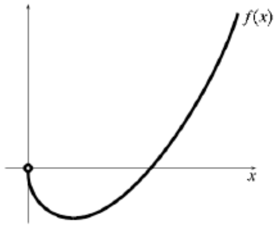
(b) déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;

(c) étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez les éventuels extrema ;

(d) étudiez la concavité du graphe et situez les éventuels points d'inflexion ;

(e) esquissez le graphe de f .

ii. Dans un cas plus général, déterminez toutes les valeurs entières du paramètre α pour lesquelles le graphe de f présente l'allure ci-dessous. Justifiez.



Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Vincent DENOEL).
"http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes"

i. Pour $\alpha = 2$, la fonction étudiée s'écrit

$$f(x) = x^2 \ln x$$

(a) La fonction logarithme étant définie sur $\mathbb{R}_0^+$, le domaine de définition de f est l'intervalle $]0,+\infty[$.

(b) Au voisinage de 0, on calcule, en appliquant le théorème de l'Hospital,

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = [0\cdot(-\infty)] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{1/x^2} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right]$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{1/x}{-2/x^3} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

Il n'existe donc pas d'asymptote verticale en $x = 0$. Notons que la fonction admet un prolongement continu si on pose $f(0) = 0$.

Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \ln x = [(+\infty)\cdot(+\infty)] = +\infty$$

de sorte qu'il n'existe pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

Pour identifier une éventuelle asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} x\ln x = [(+\infty)\cdot(+\infty)] = +\infty$$

Il n'existe donc pas non plus d'asymptote oblique.

(c) Pour rechercher les éventuels extrema, on calcule

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2\left(\frac{1}{x}\right) = x(1+2\ln x)$$

dont le seul zéro est situé en l'abscisse $1/\sqrt{e}$.

L'étude des variations de f sur $]0,+\infty[$ conduit à

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

La fonction étant décroissante à gauche de $1/\sqrt{e}$ et croissante à droite, elle présente un minimum local en $1/\sqrt{e}$ où

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = -\frac{1}{2e} < 0$$

(d) Une nouvelle dérivation conduit à

$$f''(x) = 1 + 2\ln x + 2x\left(\frac{1}{x}\right) = 3 + 2\ln x$$

dont le seul zéro est situé en l'abscisse $1/\sqrt{e^3}$.

L'étude du signe de f'' sur $]0,+\infty[$ conduit à

x	0		$1/\sqrt{e^3}$		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	*Point d'inflexion*	$\cup$	

Le graphe de f tourne sa concavité vers le haut à gauche de $1/\sqrt{e^3}$ et vers le bas à droite de $1/\sqrt{e^3}$. Le graphe possède donc un point d'inflexion en $1/\sqrt{e^3}$ où

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e^3}}\right) = -\frac{3}{2e^3}$$

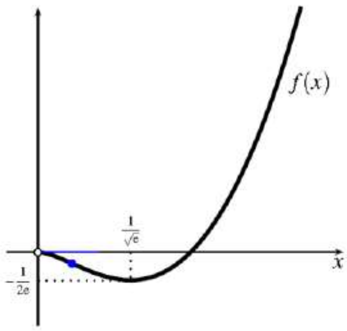
(e) Pour esquisser le graphe de f, on remarque

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} x(1+2\ln x) = 0$$

de sorte que la tangente au graphe de f tend à être horizontale au voisinage de l'origine.
Par ailleurs, on note également que $1/\sqrt{e^3} < 1/\sqrt{e}$ de sorte que le tableau consolidé des variations de f prend la forme

x	0		$1/\sqrt{e^3}$		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
f'	(0)	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
f''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f		$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	min	$\nearrow$	
		$\cap$	*P.I.*	$\cup$	$\cup$	$\cup$	
	(0)		$-3/(2e^3)$		$-1/(2e)$		

Le graphe de f peut donc être esquissé de la façon suivante :



ii. Pour que le graphe de f présente l'allure indiquée, il faut

– que $\lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0$.
La condition est vérifiée si et seulement si $\alpha > 0$ puisque toute puissance de x l'emporte sur le logarithme au voisinage de 0.

– que $\lim\limits_{x\to +\infty} x^\alpha \ln x = +\infty$.
La condition est vérifiée si et seulement si $\alpha \geq 0$ puisque toute puissance de x l'emporte sur le logarithme au voisinage de l'infini.

– que la fonction présente un minimum local en une abscisse $\tilde{x} > 0$.
Pour ce faire, on calcule

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \ln x + x^{\alpha-1} = x^{\alpha-1}(\alpha \ln x + 1)$$

qui s'annule en $\tilde{x} = \mathrm{e}^{-1/\alpha} > 0$. Le graphe de f présente bien un minimum local en $\tilde{x}$ puisque

x	0		$\tilde{x}$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	min	$\nearrow$	

– que $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$ pour que le graphe présente une tangente verticale au voisinage de l'origine.
Utilisant l'expression de la dérivée calculée ci-dessus, cette condition est vérifiée si et seulement si $\alpha - 1 \leq 0$, *i.e.* si et seulement si $\alpha \leq 1$.

En regroupant les résultats ci-dessus, on constate que seule la valeur $\alpha = 1$ vérifie toutes les conditions et que le graphe présenté a donc été tracé pour cette valeur de α.

EXANA375 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

Déterminez les dimensions (rayon de la base R et hauteur h) d'une canette, assimilée à un cylindre parfait, devant contenir un volume V donné et pouvant être réalisée en utilisant le minimum d'aluminium, c'est-à-dire présentant l'aire totale minimale. Justifiez.
Que vaut l'aire minimale ?

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ. Prof Vincent DENOEL). "http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes"

Notant R le rayon de la canette et h sa hauteur, le volume V et la surface totale A sont donnés respectivement par

$$V = \pi R^2 h, \qquad A = 2\pi R^2 + 2\pi R h$$

L'expression du volume V permet d'écrire

$$h = \frac{V}{\pi R^2}$$

En injectant ce résultat dans l'expression de A, on peut exprimer l'aire comme fonction de la seule variable R, soit

$$A(R) = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

Pour étudier les variations de A et identifier les éventuels extrema, on calcule

$$A'(R) = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}$$

qui s'annule en $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. L'étude du signe de la dérivée

R	0		$\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$		$+\infty$
A'		$-$	0	$+$	
A		$\searrow$	min	$\nearrow$	

montre que la fonction est décroissante à gauche de $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ et croissante à droite.

Dès lors l'aire est minimale pour

$$R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}, \qquad h = \frac{V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Pour ces dimensions, l'aire totale est donnée par

$$A = 3\sqrt[3]{2\pi V^2}$$

---

14 février 2014

EXANA376 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

i. Calculez les trois intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx$ b) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$ c) $\int_0^1 x\ln x\,dx$

ii. Montrez que : $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\,dx}{\sin x+\cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\tan x+1}$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ. Prof Vincent DENOEL). "http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes"

i. Les trois intégrales proposées peuvent être évaluées comme suit.

(a) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2\,;$

(b) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{(1+x^2)-1}{1+x^2}dx = \int_0^1 \left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \Big[x-\text{arctg}\,x\Big]_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}\,;$

(c) Par application de la formule d'intégration par par parties

$$\int_a^b fg'\,dx = fg]_a^b - \int_a^b f'g\,dx$$

avec

$$\begin{cases} f=\ln x \\ g'=x \end{cases} \qquad \begin{cases} f'=\dfrac{1}{x} \\ g=\dfrac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_1^{\mathrm{e}} x\ln x\,dx &= \frac{1}{2}x^2\ln x\Big]_1^{\mathrm{e}} - \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}x^2\Big]_1^{\mathrm{e}} \\ &= \frac{1}{2}\mathrm{e}^2 - \frac{1}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4} = \frac{1+\mathrm{e}^2}{4} \end{aligned}$$

ii. Afin de montrer que

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{\sin x + \cos x} = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1}$$

commençons par transformer le second membre de cette expression en multipliant haut et bas par $\cos x$. Il vient

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1} = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x \, dx}{\sin x + \cos x}$$

puis, posant $u = \pi/2 - x$, $(du = -dx)$,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\operatorname{tg} x + 1} &= -\int_{\pi/2}^{0} \frac{\cos(\pi/2 - u) \, du}{\sin(\pi/2 - u) + \cos(\pi/2 - u)} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin u \, du}{\cos u + \sin u} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x \, dx}{\sin x + \cos x}
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de l'égalité annoncée.

---

14 février 2014

EXANA377- FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

On considère la famille de fonctions

$$f(x) = \arctan \frac{x^{2\beta}}{1-x}$$

où β désigne un paramètre entier strictement positif.

En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de β,

i. déterminez le domaine de définition de β,

ii. déterminez les éventuelles asymptotes de f,

iii. étudiez la croissance-décroissance de f, déterminez les évetuels extrema,

iv. esquissez le graphe de f.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ. Prof Vincent DENOEL). "http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes"

i. Étant donné que la fonction arctg est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\frac{x^{2\beta}}{1-x}$ est défini $\forall x \neq 1$, le domaine de définition de f est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

ii. *Recherches des éventuelles asymptotes verticales.*

Comme

$$\lim_{x\to 1^+} \operatorname{arctg} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = \left[\operatorname{arctg}(-\infty)\right] = -\frac{\pi}{2}$$

et

$$\lim_{x\to 1^-} \operatorname{arctg} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = \left[\operatorname{arctg}(+\infty)\right] = \frac{\pi}{2},$$

il n'y a pas d'asymptote verticale mais la fonction présente une discontinuité en $x = 1$.

Recherches des éventuelles asymptotes horizontales.

On calcule d'abord

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = -\lim_{x\to+\infty} x^{2\beta-1} = -\infty$$

puisque $\beta \geq 1$ et $2\beta - 1 \geq 1$. Dès lors

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = -\frac{\pi}{2}^{+}$$

Le graphe de f présente une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = -\pi/2$. Cette asymptote est approchée par valeurs supérieures.

Procédant de la même façon en $-\infty$, on calcule d'abord (en tenant compte de $2\beta - 1 \geq 1$)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = -\lim_{x\to-\infty} x^{2\beta-1} = +\infty$$

Dès lors

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} \frac{x^{2\beta}}{1-x} = \frac{\pi}{2}^{-}$$

Le graphe de f présente une asymptote horizontale en $-\infty$ d'équation $y = \pi/2$. Cette asymptote est approchée par valeurs inférieures.

Recherches des éventuelles asymptotes obliques.

Étant donné qu'il existe des asymptotes horizontales en $\pm\infty$ pour toutes les valeurs de β, cette fonction n'admet aucune asymptote oblique.

iii. La fonction f est dérivable sur son domaine de définition et on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\dfrac{x^{4\beta}}{(1-x)^2}} \frac{2\beta x^{2\beta-1}(1-x)+x^{2\beta}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{x^{2\beta-1}[x(1-2\beta)+2\beta]}{(1-x)^2+x^{4\beta}} \end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule en

$$x_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{2\beta}{2\beta-1}$$

Ces deux valeurs appartiennent bien au domaine de définition de f ; on a toujours

$$0 = x_1 < 1 < x_2$$

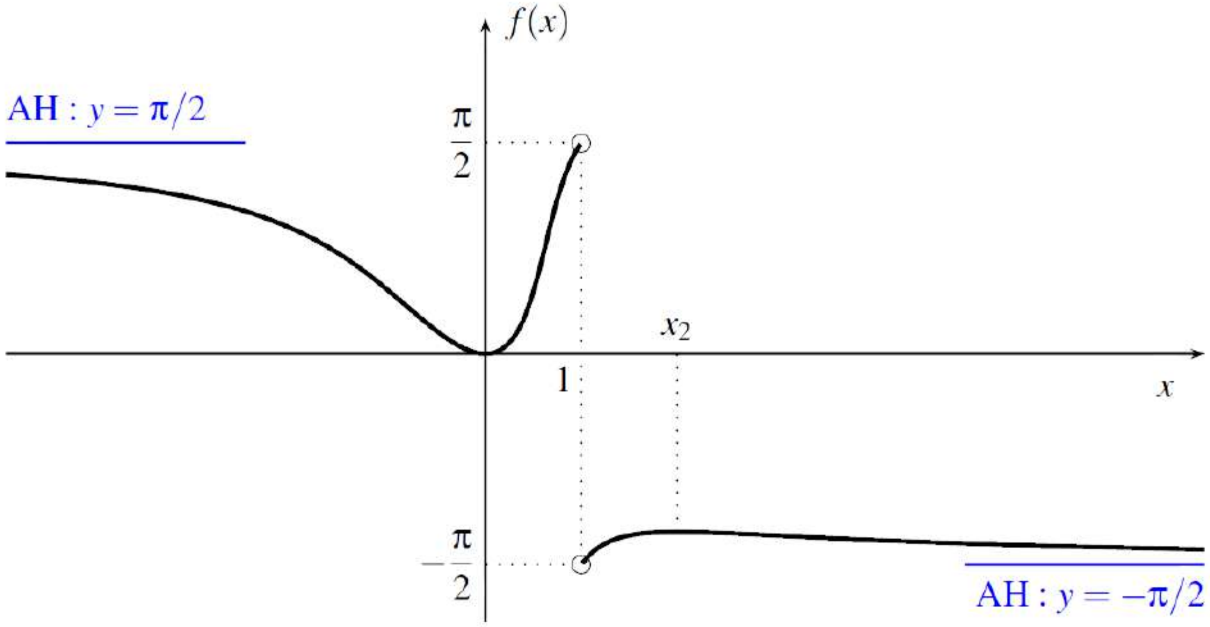
Dans ce cas, on peut dès lors dresser le tableau de variation de f de la façon suivante :

		0		1		$\frac{2\beta}{2\beta-1}$	
$x^{2\beta-1}$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x(1-2\beta)+2\beta$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(1-x)^2+x^{4\beta}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nexists$	$\nearrow$	Max	$\searrow$

Ainsi, f admet un minimum local en $x_1 = 0$ et un maximum local en x_2.
On notera que

$$f(x_1) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(x_2) = -\operatorname{arctg} \frac{(2\beta)^{2\beta}}{(2\beta-1)^{2\beta-1}} < 0$$

iv. En utilisant les résultats dégagés ci-dessus, le graphe de f peut être esquissé de la façon suivante pour toutes les valeurs entières de $\beta \geq 1$.



14 février 2014

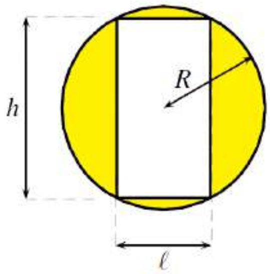
EXANA378 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

La résistance en flexion r d'une poutre de section rectangulaire est proportionnelle au produit de la largeur ℓ de la poutre et du carré de sa hauteur h, i.e.

$$r = \gamma \, \ell \, h^2$$

où γ est une constante strictement positive.

Déterminez les dimensions (ℓ et h) de la section de la poutre pouvant être découpée dans un tronc d'arbre (parfaitement circulaire) de rayon R et présentant la résistance la plus grande.

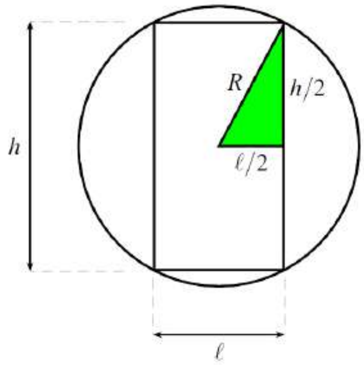


Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ. Prof Vincent DENOEL). "http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes"

La résistance de la poutre est donnée par

$$r = \gamma \ell h^2$$

où $\gamma > 0$ désigne une constante.



En appliquant la relation de Pythagore dans le triangle identifié sur la figure ci-dessus, on peut exprimer la relation entre les dimensions de la poutre sous la forme

$$(\ell/2)^2 + (h/2)^2 = R^2$$

De cette expression, on tire la relation

$$h^2 = 4R^2 - \ell^2$$

qui permet d'exprimer la résistance de la poutre en fonction de la seule largeur ℓ, *i.e.*

$$r(\ell) = \gamma\ell(4R^2 - \ell^2)$$

Pour déterminer les dimensions optimales de la poutre, il suffit dès lors d'étudier les variations de cette fonction pour $\ell \in]0, 2R[$. On a

$$r'(\ell) = \gamma\left(4R^2 - 3\ell^2\right)$$

Sur l'intervalle considéré, cette dérivée s'annule pour

$$\ell = \ell_\star = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

On peut ainsi dresser le tableau de variation de r sur $[0, 2R]$.

	0		$\ell_\star$		$2R$
r'		$+$	0	$-$	
r	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0

Puisque la fonction est croissante à gauche de $\ell_\star$ et décroissante à droite, on en conclut que r prend sa valeur maximale en $\ell_\star$.
Les dimensions de la section de la poutre la plus résistante pouvant être découpée dans un tronc d'arbre de rayon R sont donc

$$\ell_\star = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$$

et

$$h_\star = \sqrt{4R^2 - \ell_\star^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}R$$

14 février 2014

EXANA379 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

i. Calculez les deux intégrales suivantes :

a) $\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx$

ii. Calculez les trois primitives suivantes :

a) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx$ b) $\int x \sin x\, dx$ c) $\int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}\, dx$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Prof Eric J.M. DELHEZ. Prof Vincent DENOEL). "http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes"

i. Calcul des intégrales.

a) La première intégrale est évaluée directement selon

$$\int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = [-\cos x]_0^{\pi/2} = 1$$

b) La deuxième intégrale peut être calculée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\, dx &= \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos 2x}{2} dx \\ &= \left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

ii. Calcul des primitives.

a) La première primitive peut être évaluée en effectuant le changement de variable $x = u^2$ $(dx = 2udu)$.

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int \frac{2u}{1+u} du \\ &= \int \frac{2(1+u)-2}{1+u} du = 2\int du - 2\int \frac{du}{1+u} \\ &= 2u - 2\ln(|1+u|) + C \\ &= 2\sqrt{x} - 2\ln(|1+\sqrt{x}|) + C\end{aligned}$$

où C désigne une constante arbitraire.

b) La deuxième primitive peut être évaluée en appliquant la formule d'intégration par parties

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

avec $f(x) = -\cos x$ et $g(x) = x$. On a $f'(x) = \sin x$, $g'(x) = 1$ et

$$\begin{aligned}\int x \sin x \, dx &= -x\cos x + \int \cos x dx \\ &= -x\cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

où C désigne une constante arbitraire.

c) La troisième primitive peut être évaluée en effectuant le changement de variable $x = 2\sin y$ ($dx = 2\cos y \, dy$),

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{(4-x^2)^{3/2}}dx = \int \frac{2\cos y \, dy}{(4-4\sin^2 y)^{3/2}} &= \int \frac{2\cos y}{(4\cos^2 y)^{3/2}}dy \\ &= \int \frac{2\cos y}{8\cos^3 y}dy = \int \frac{dy}{4\cos^2 y} \\ &= \frac{1}{4}\operatorname{tg} y + C \\ &= \frac{1}{4}\frac{\sin y}{\cos y} + C = \frac{1}{4}\frac{2\sin y}{\sqrt{4-4\sin^2 y}} + C \\ &= \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C\end{aligned}$$

où C désigne une constante arbitraire.

9 septembre 2013