Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 38

EXANA380 – EXANA389

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Janvier 2014

EXANA380 – Compléments.

Calculer

$$I_1 = \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \sec x\,dx$$
$$I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int \sec^2 x\,dx$$
$$I_3 = \int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx = \int \sec^3 x\,dx$$
$$I_4 = \int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx = \int \sec^4 x\,dx$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\cos x}\,dx$$

On pose $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt \end{cases}$

$$I_1 = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{(1-t)(1+t)}\,dt$$

On décompose en fractions simples :

$$\frac{1}{(1-t)(1+t)} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{1+t} \Rightarrow 1 = A(1+t) + B(1-t) \Rightarrow \begin{cases} A = \dfrac{1}{2} \\ B = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_1 = \int \frac{dt}{1-t} - \int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1-t| + \ln|1+t| = \ln\left|\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right| = \boxed{\ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right| + C}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \boxed{\tan x + C}$$

$$I_3 = \int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx$$

Par parties :

$$f' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f = \tan x$$

$$g = \frac{1}{\cos x} \qquad g' = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$\Rightarrow I_3 = \tan x \frac{1}{\cos x} - \int \frac{\tan x.\sin x}{\cos^2 x}\,dx = \tan x.\sec x - \underbrace{\int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx}_{I_3'}$$

$$I_3' = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \underbrace{\int \frac{1}{\cos^3 x}\,dx}_{=I_3} - \underbrace{\int \frac{1}{\cos x}\,dx}_{=I_1}$$

$$\Rightarrow I_3 = \tan x.\sec x - I_3 + I_1$$

$$\Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{1}{2}\left(\tan x.\sec x + \ln\left|\frac{\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}}\right|\right) + C}$$

$$I_4 = \int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx$$

Par parties

$$f' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad f = \tan x$$

$$g = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad g' = \frac{2.\sin x}{\cos^3 x}$$

$$\Rightarrow I_4 = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \underbrace{2\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}dx}_{=I_4'}$$

$$I_4' = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x}\,dx = \underbrace{\int \frac{1}{\cos^4 x}\,dx}_{=I_4} - \underbrace{\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx}_{=I_2}$$

$$\Rightarrow I_4 = \tan x.\sec^2 x - 2I_4 + 2I_2$$

$$\Rightarrow \boxed{I_4 = \frac{1}{3}\tan x\left(\sec^2 x + 2\right) + C}$$

EXANA381 – Compléments.

Calculer

$$I_1 = \int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \csc x\,dx$$
$$I_2 = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \int \csc^2 x\,dx$$
$$I_3 = \int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx = \int \csc^3 x\,dx$$
$$I_4 = \int \frac{1}{\sin^4 x}\,dx = \int \csc^4 x\,dx$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\sin x}\,dx$$

On pose $t = \tan\frac{x}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \dfrac{2t}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2}{1+t^2}\,dt \end{cases}$

$$I_1 = \int \frac{1+t^2}{2t}.\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|t| = \boxed{\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C}$$

$$I_2 = \int \frac{1}{\sin^2 x}\,dx = \boxed{-\cot x + C}$$

$$I_3 = \int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx$$

Par parties

$f = \dfrac{1}{\sin x} \qquad f' = -\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$

$g' = \dfrac{1}{\sin^2 x} \qquad g = -\cot x$

$$\Rightarrow I_3 = -\cot x.\frac{1}{\sin x} - \int \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x}\,dx = -\cot x.\csc x - \underbrace{\int \frac{1}{\sin^3 x}\,dx}_{=I_3} + \underbrace{\int \frac{1}{\sin x}\,dx}_{=I_1}$$

$$\Rightarrow I_3 = -\cot x.\csc x - I_3 + I_1 \Rightarrow \boxed{I_3 = \frac{1}{2}\left[\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| - \cot x.\csc x\right] + C}$$

$$I_4 = \int \frac{1}{\sin^4 x}\, dx$$

Par parties

$$f = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad f' = -\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$$

$$g' = \frac{1}{\sin^2 x} \qquad g = -\cot x$$

$$\Rightarrow I_4 = -\cot x.\frac{1}{\sin^2 x} - 2\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x}\, dx = -\cot x.\csc^2 x - 2\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^4 x}\, dx$$

$$= -\cot x.\csc^2 x - 2I_4 - \int \frac{1}{\sin^2 x}\, dx$$

$$\Rightarrow 3I_4 = -\cot x.\csc^2 x - 2\cot x \Rightarrow \boxed{I_4 = -\frac{1}{3}\cot x\left(\csc^2 x + 2\right)}$$

17 juin 2014

EXANA382 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 1999.

Calculer

(a) $\int u(x).e^{v(x)}dx$ où $u(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^3}$ et $v(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

(b) $\int_0^{10.5}\left|\sin^3\pi x\right|dx$

(a) Calculons : $v'(x)=\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$

Remarquons que $u(x)$ peut s'écrire : $u(x)=\dfrac{1}{4}.\dfrac{4}{(e^x+e^{-x})^2}.\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dfrac{1}{4}.v'(x).v(x)$

A partir de là, tout devient simple :

$$I=\int u(x).e^{v(x)}dx=\frac{1}{4}\int v'(x).v(x)e^{v(x)}dx$$

On pose $t=v(x)\ \Rightarrow dt=v'(x)dx$ et on intégre par partie : $I=\int t.e^t dt$

$$\begin{matrix} f=t & f'=1 \\ g'=e^t & g=e^t \end{matrix}\Rightarrow I=t.e^t-\int e^t dt=e^t(t-1)=e^{v(x)}\left(v(x)-1\right)+C$$

(b) Remarquons que $\int_0^{10.5}\left|\sin^3\pi x\right|dx=21\int_0^{0.5}\sin^3\pi x\,dx=\dfrac{21}{\pi}\int_0^{0.5}\sin^3\pi x\,d\pi x$

$$\Rightarrow I=\frac{21}{\pi}\int_0^{0.5}\sin\pi x\left(1-\cos^2\pi x\right)d\pi x=\frac{21}{\pi}\int_1^{0.5}\sin\pi x-\sin\pi x.\cos^2\pi x\,dx$$

$$=\frac{21}{\pi}\left[-\cos\pi x+\frac{1}{3}\cos^3\pi x\right]_0^{0.5}=\frac{21}{\pi}\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{14}{\pi}$$

Le 2 mai 2014

EXANA383 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013.

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ muni du repère orthonormé $Oxyz$ soient

– S la surface plane située dans le plan $z = 0$ et définie par les 2 courbes d'équations respectives

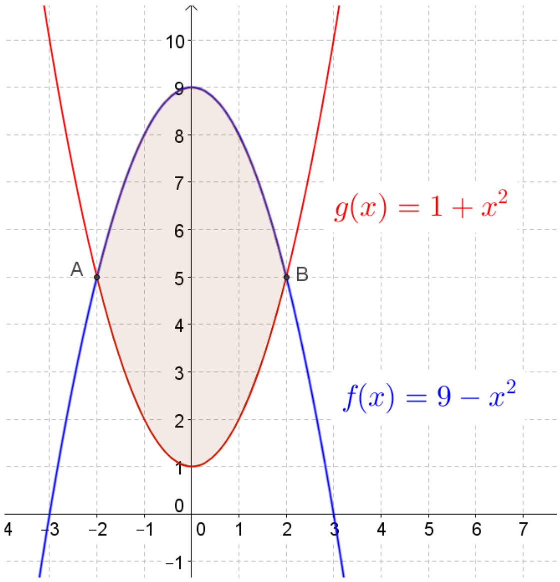
$$y = 1 + x^2 \qquad , \qquad y = 9 - x^2$$

– D le solide engendré par la rotation de S autour de l'axe Ox.

(a) Faire un croquis de D

(b) Calculer l'aire de S

(c) Calculer le volume de D



(b) Les courbes se coupent en $x = \pm 2$ et le système présente une symétrie d'axe Oy

$$A = 2\int_0^2 (9 - x^2) - (1 + x^2)\, dx = 4\int_0^2 4 - x^2\, dx = 4\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{64}{3} \text{ ua}$$

(c) $$V = 2\pi\int_0^2 (9 - x^2)^2 - (1 + x^2)^2\, dx = 40\pi\int_0^2 4 - x^2\, dx = 40\pi\left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{640\pi}{3} \text{ uv}$$

Le 17 juin 2014.

EXANA384 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 1999.

Soient la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = |x|^3 e^{-x}$$

et $\mathscr{C}$ la courbe d'équation $y = f(x)$ ($\mathscr{C}$ est le graphe de f).

(a) En utilisant la définition de la dérivée, calculer $f'(0)$ (et justifier son existence).

(b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

(c) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -1.

(d) Etablir le tableau des variations de f, f' et f'' contenant

- les racines de f, f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines non entières utiliser une décimale)
- les signes de $f'(x)$ et $f''(x)$
- les extréma de f, les domaines de croissance et de décroissance de f.
- les points d'inflexion de f et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de f.

(e) Tracer soigneusement la courbe $\mathscr{C}$ d'après les résultats du 3 d

---

(a) – Soit $x > 0$, alors la fonction s'écrit $f(x) = x^3e^{-x}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^3e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2e^{-x} = 0$

– Soit $x < 0$, alors la fonction s'écrit $f(x) = -x^3e^{-x}$

On a : $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-x^3e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} -x^2e^{-x} = 0$

La dérivée à gauche est égale à la dérivée à droite, elle existe donc et vaut $f'(x) = 0$

(b) $f'(x) = \begin{cases} e^{-x}x^2(x-3) & \text{si } x > 0 \\ e^{-x}x^2(3-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ Racines : 0 et 3

$f''(x) = \begin{cases} e^{-x}x(x^2-6x+6) & \text{si } x > 0 \\ -e^{-x}x(x^2-6x+6) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ Racines : 0, $3-\sqrt{3} \simeq 1.3$, $3+\sqrt{3} \simeq 4.7$

(c) Equation de la tangente en $x = -1$

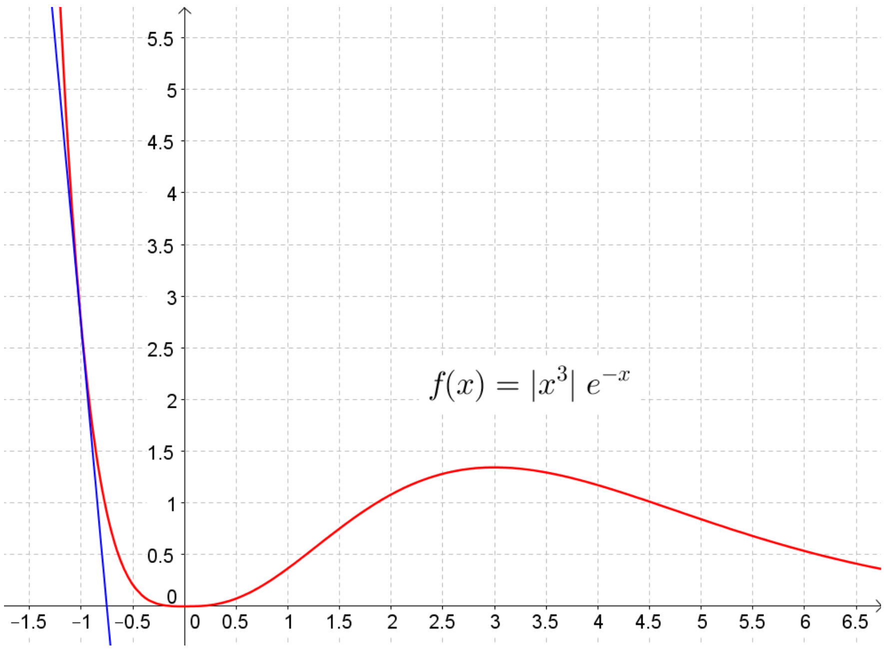
$f(-1) = e$

$f'(-1) = -4e$

$t \equiv y - e = -4e(x+1) \Rightarrow y = -e(4x+3)$

(d)

x		0		1.3		3		4.7	
f'	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
f''	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$m(0,0)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$M(3,1.34)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$
	$\cup$	$\cup$	$\cup$	$I(1.3,0.57)$	$\cap$	$\cap$	$\cap$	$I(4.7,0.9)$	$\cup$



EXANA385 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 1999.

Calculer

(a) $\displaystyle\int \frac{\tan x}{1+\cos x}\,dx$

(b) $\displaystyle\int e^{2x}\arctan\left(e^{x+1}\right)dx$

$$\text{(a) } I=\int \frac{\tan x}{1+\cos x}\,dx=\int \frac{\sin x}{\cos x\,(1+\cos x)}\,dx$$

On pose $t=\cos x \Rightarrow dt=-\sin x\,dx$

$$\Rightarrow I=\int \frac{dt}{t\,(1+t)} \text{ que l'on décompose en fractions rationnelles}$$

$$\frac{1}{t\,(1+t)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+t}\Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \end{cases} \Rightarrow I=\int \frac{dt}{t}-\int \frac{dt}{1+t}=\ln|t|-\ln|1+t|$$

$$\Rightarrow \boxed{I==\ln\left|\frac{\cos x}{1+\cos x}\right|+C}$$

$$\text{(b) } I=\int e^{2x}\arctan\left(e^{x+1}\right)dx$$

$$g'=e^{2x} \quad \Rightarrow \quad g=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$f=\arctan e^{x+1} \quad \Rightarrow \quad f'=\frac{1}{1+e^{2(x+1)}}.e^{x+1}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\left(e^{x+1}\right)\underbrace{-\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}e^{x+1}}{1+e^{2(x+1)}}\,dx}_{=I'}$$

$$\text{On pose } t=x+1 \Rightarrow \begin{cases} dt=e^{x+1}dx \\ \dfrac{t^2}{e^2}=e^{2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I'=-\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}e^{x+1}}{1+e^{2(x+1)}}\,dx=-\frac{1}{2e^2}\int \frac{t^2dt}{1+t^2}=-\frac{1}{2e^2}\left[\int dt-\int \frac{dt}{1+t^2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2e^2}\left[t-\arctan t\right]=-\frac{1}{2e^2}\left[e^{x+1}-\arctan\left(e^{x+1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}e^{2x}\arctan\left(e^{x+1}\right)-\frac{1}{2e^2}\left[e^{x+1}-\arctan\left(e^{x+1}\right)\right]$$

$$\boxed{I=\frac{1}{2e^2}\left[\left(e^{2x+2}+1\right)\arctan\left(e^{x+1}\right)-e^{x+1}\right]+C}$$

---

14 février 2014

EXANA386 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 1999.

Sout la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ impaire, périodique de période 4 définie par

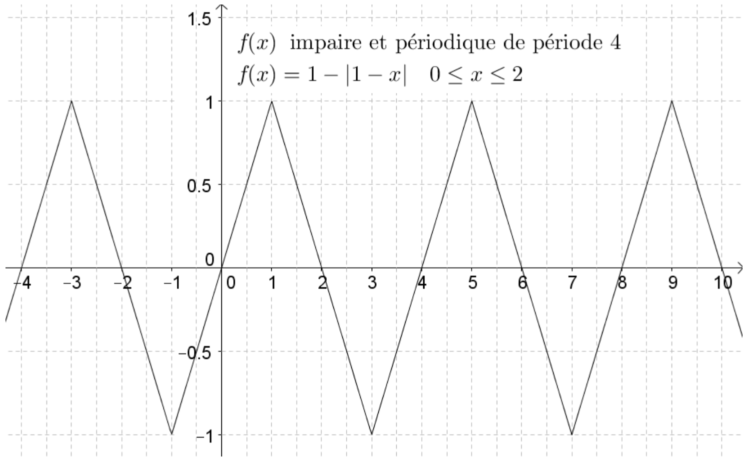
$$f(x) = 1 - |1 - x| \qquad \text{si} \qquad 0 \le x \le 2$$

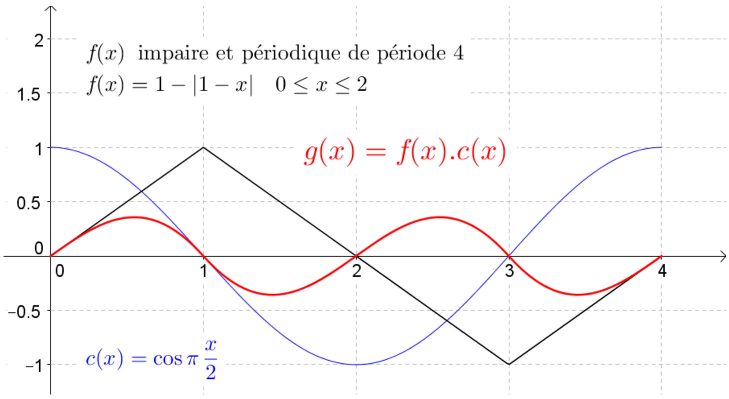
(a) Tracer le graphe de f.

(b) Calculer

$$\int_0^4 f(x) \cos \frac{\pi}{2} x \, dx$$

$$\int_{-26.4}^{39.8} f(x) \, dx$$





(b)(1) Etudions d'abord $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi x}{2}dx$, c'est-à-dire que $x\in[0,2]$

Faisons une translation de l'axe des Y en $x=1 \Rightarrow x'=x-1$

Dans ce nouveau repère, $f(x)$ devient $f(x')=1-|x'|$. on voit tout de suite que cette fonction est paire.

La fonction : $c(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$ devient $c(x')=\cos\frac{\pi(x'+1)}{2}$

$$=\cos\left(\frac{\pi x'}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\pi x'}{2} \text{ qui est une fonction impaire}$$

Par conséquent, la fonction : $f(x').\left(-\sin\frac{\pi x'}{2}\right)$ est une fonction impaire

et on a alors $\int_0^2 f(x)\cos\frac{\pi x}{2}dx=-\int_{-1}^1 f(x')\sin\frac{\pi x'}{2}dx'=0$

Il est facile de démontrer de la même façon que $\int_2^4 f(x)\cos\frac{\pi x}{2}dx=0$

En conclusion : $\boxed{\int_0^4 f(x)\cos\frac{\pi x}{2}dx=0}$

(2) Nous avons succesivement

$$\int_{-26.4}^{39.8} f(x)dx=\int_{-26.4}^{-26} f(x)dx+\underbrace{\int_{-26}^{+38} f(x)dx}_{=0}+\int_{+38}^{+39.8} f(x)dx$$

$$=\int_{1.6}^{2} f(x)dx+\int_{2}^{3.8} f(x)dx=\int_{1.6}^{3} f(x)dx+\int_{3}^{3.8} f(x)dx$$

$$=\int_{1.6}^{3}(2-x)dx+\int_{3}^{3.8}(x-4)dx$$

$$=\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_{1.6}^{3}+\left[\frac{x^2}{2}-4x\right]_{3}^{3.8}=-\frac{21}{50}-\frac{24}{50}=-\frac{45}{50}=\boxed{-\frac{9}{10}}$$

19 octobre 2014

EXANA387- EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 1.

(1) Soit f une fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Définissons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = x.f(x)$$

Démontrer que si f est continue au point 0, alors g est dérivable en ce point et donner $g'(0)$.

(2) Soit $f(x) = \sqrt{x}.\ln^2 x$. Calculer la limite de f à l'origine.

(3) Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_1^2 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$$

(4) Etablir l'intégrale du volume du solide engendré par la rotation autour de la droite $x = 3$ de la surface délimitée par les graphes de $y = x^2$ et $y = x + 2$ (Il n'est pas demandé de calculer cette intégrale).

Solution proposée par Nicole Berckmans

(1) $g'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x.f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

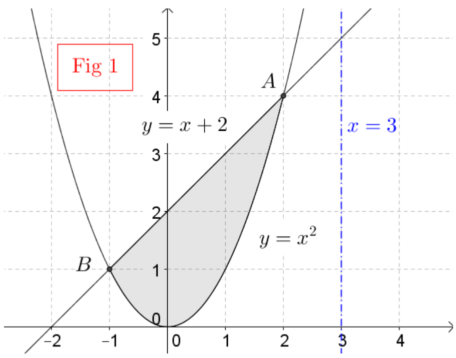
car f est continue en $x = 0$.

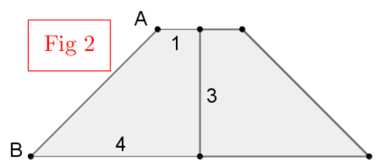
(2) $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}.\ln^2 x = [0.\infty] = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln^2 x}{x^{-\frac{1}{2}}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

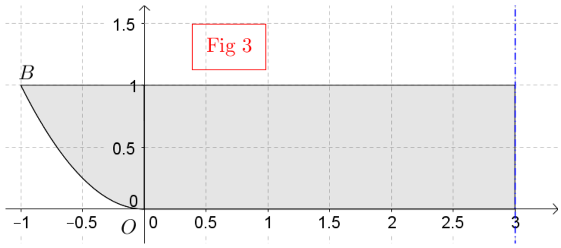
$$\xrightarrow{Hospital} \lim_{x\to 0} \frac{2\ln x.\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = -4\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-\frac{1}{2}}} \xrightarrow{Hospital} -4\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}} = -8\lim_{x\to 0}\sqrt{x} = 0$$

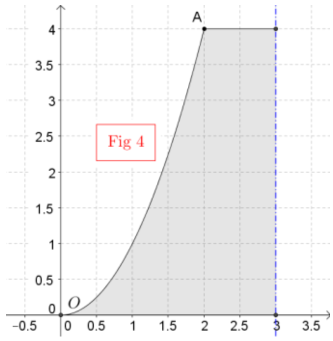
(3) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx.$ On pose $u = \sqrt{x}$ c'est-à-dire $x = u^2 \Rightarrow \begin{cases} dx = 2u.du \\ x = 1 \Rightarrow u = 1 \\ x = 2 \Rightarrow u = \sqrt{2} \end{cases}$

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} \frac{2u.du}{u^2+u} = 2\int_1^{\sqrt{2}} \frac{du}{1+u} = 2\left[\ln(1+u)\right]_1^{\sqrt{2}} = 2\left(\ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \ln 2\right) = 2\ln\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$









(4) Rappels :

Rotation autour de l'axe OX : $\quad V=\pi\int y^2dx$

Rotation autour de l'axe OY : $\quad V=\pi\int x^2dy$

Rotation autour de l'axe $x-3=0$: $V=\pi\int (x-3)^2\,dx$

La parabole $y=x^2$ se décompose en $\begin{cases} x=\sqrt{y} \text{ sur } OA \\ x=-\sqrt{y} \text{ sur } OB \end{cases}$

Le segment AB engendre par rotation autour de l'axe $x=3$ un tronc de cône (Fig 2)

$$V_1=\frac{\pi h}{3}\left(R^2+r^2+Rr\right)=\frac{\pi.3}{3}(16+1+4)=21\pi$$

On a aussi : $V_1=\pi\int_1^4 (x-3)^2\,dy=\pi\int_1^4 (y-5)^2\,dy$

La courbe BO engendre par rotation un volume V_2 (Fig 3)

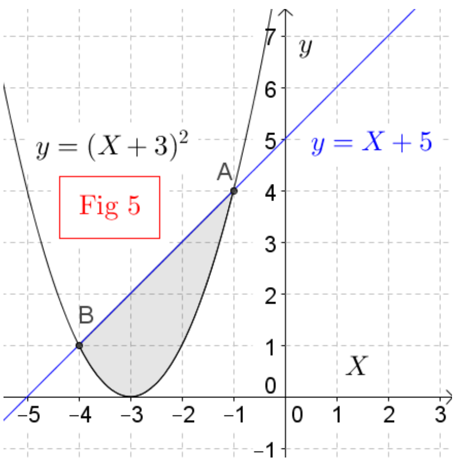
$$V_2=\pi\int_0^1\left(-\sqrt{y}-3\right)^2dy$$

La courbe OA engendre par rotation un volume V_3 (Fig 4)

$$V_3=\int_0^4\left(\sqrt{y}-3\right)^2dy$$

Finalement, on obtient : $V=V_1+V_2-V_3$

Pour information, on a $V_1=21\pi, V_2=\dfrac{27\pi}{2}, V_3=12\pi$ et donc $V=\dfrac{45\pi}{2}$



Remarque

Si on place l'axe $x = 3$ en $X = 0$ alors la parabole $y = x^2$ s'écrit $y = (X + 3)^2$ et la droite $y = x + 2$ devient $y = X + 5$. (Fig 5)

---

25 octobre 2014

EXANA388 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 1.

On considère la fonction f définie par

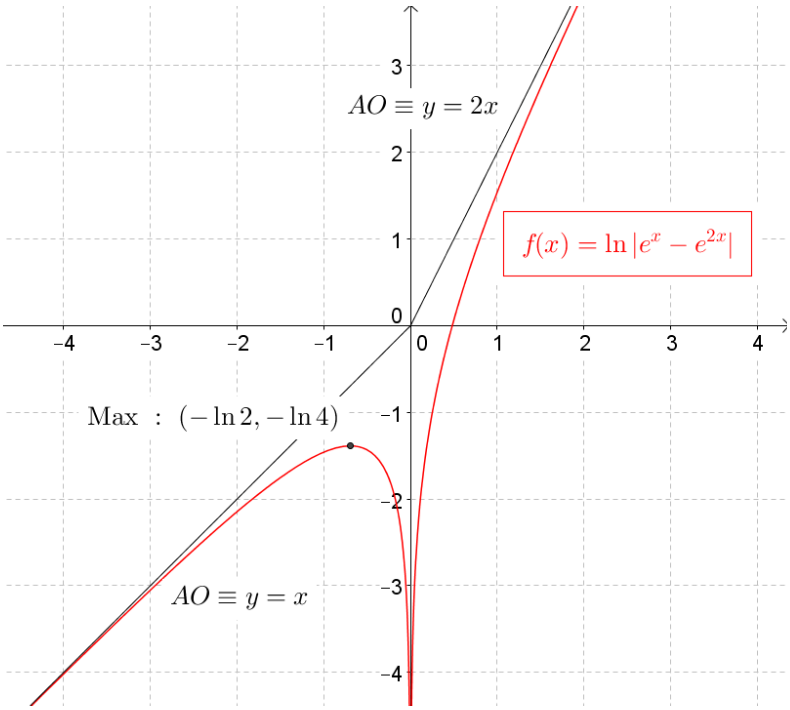
$$f(x) = \ln\left| e^{x} - e^{2x} \right|$$

(1) Etudier les variations de f. On précisera le domaine de définition de f, les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et les extrema éventuels (On n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).

(2) On donne $e = 2.718$ et $\sqrt{e} = 1.648$. Démontrer que f s'annule en un point unique $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Construire le graphe de f.

(3) Démontrer que la restriction g de f à l'intervalle $\left]0; +\infty\right[$ admet une réciproque notée g^{-1}. Donner l'expression de $g^{-1}(x)$

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$f(x)=\ln\left| e^x-e^{2x}\right| \Rightarrow \begin{cases} \text{si } x<0: f(x)=\ln\left(e^x(1-e^x)\right); e^x<1 \\ \text{si } x>0: f(x)=\ln\left(e^x(e^x-1)\right); e^x>1 \end{cases}$$

(1) Domaine de f est $\mathbb{R}_0$

AV $\equiv x=0$ car $\lim\limits_{x\to 0} f=[\ln 0]=-\infty$

Pas d'AH car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f=[\ln 0]=-\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(e^x(e^x-1)\right)=[\ln(+\infty)]=+\infty \end{cases}$

AO en $-\infty$ a pour équation $y=x$

En effet : $a=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln\left(e^x(1-e^x)\right)}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$$\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-2e^{2x}}{e^x-e^{2x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x(1-2e^x)}{e^x(1-e^x)}=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to-\infty}\Big[\ln\left(e^x(1-e^x)\right)-\underbrace{1}_{=\ln e^x}\Big]=\lim_{x\to-\infty}\left[\ln\frac{e^x-e^{2x}}{e^x}\right]$$

$$=\ln\lim_{x\to-\infty}(1-e^x)=\ln 1=0$$

AO en $+\infty$ a pour équation $y=2x$

En effet : $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(e^x(e^x-1)\right)}{x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$$\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to+\infty}\frac{2e^x-e^x}{e^{2x}-e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(e^{2x}-e^x\right)+e^x}{e^{2x}-e^x}=2+\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^{2x}-e^x}$$

$$=2+\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x-1}=2$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x]=\lim_{x\to+\infty}\Big[\ln\left(e^x(e^x-1)\right)-\underbrace{2}_{=\ln e^{2x}}\Big]=\lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{e^{2x}-e^x}{e^{2x}}\right]$$

$$=\ln\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{e^x}\right)=\ln 1=0$$

Dérivée première (Rappel : $(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}, \forall x\neq 0$)

$f'(x)=\dfrac{e^x-2e^{2x}}{e^x-e^{2x}}=\dfrac{1-2e^x}{1-e^x}$ racine en $x=\ln\dfrac{1}{2}=-\ln 2$

	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$+\infty$
$f'(x)$	1	+	0	−	/	+	
$f(x)$	AO	↗	Max	↘	AV	↗	AO

Maximum local en $(-\ln 2, -\ln 4)$ car $\ln\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right|=-\ln 4$

$$(2)\begin{cases} f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \ln\left(e-\sqrt{e}\right) = \ln(2.718-1.648) > \ln 1 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -\infty \end{cases}$$

On utilise le théorème de valeurs intermédiaires pour une fonction **continue** sur $\left]0,\dfrac{1}{2}\right]$ pour affirmer qu'il existe $\alpha \in \left]0,\dfrac{1}{2}\right]$ tel que $f(\alpha)=0$.

On remarque l'unicité de α, car f est une fonction strictement croissante $(f'>0)$ sur cet intervalle.

(3) Puisque $f:\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ est strictement croissante, on peut affirmer que f est injective et surjective dans son image $\mathbb{R}$. Dès lors f admet une fonction réciproque

$$f^{-1} = g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_0^+ : x \to g(x)$$

Déterminons $g(x)$:

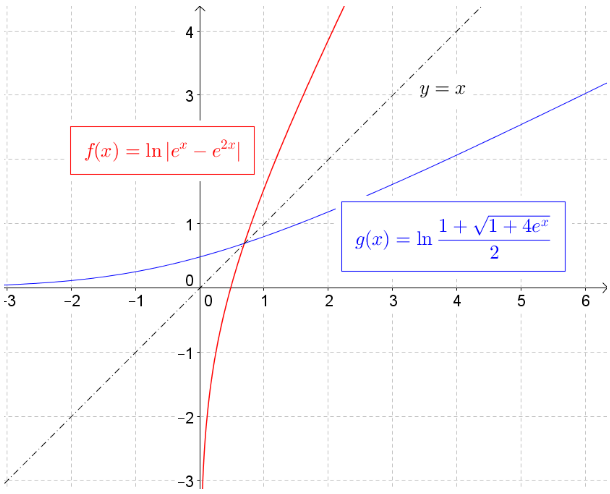
$$x = \ln\left(e^{2y}-e^{y}\right) \Rightarrow e^{x} = e^{2y}-e^{y} \Rightarrow e^{2y}-e^{y}-e^{x} = 0$$

On obtient une équation du second degré en e^{y}

Comme $\Delta = 1+4e^{x} > 0$, et que le terme indépendant $-e^{x} < 0$, il y a 2 racines de signes opposés. On rejettera la racine négative car $e^{y} > 0$

$$\Rightarrow e^{y} = \frac{1+\sqrt{1+4e^{x}}}{2}$$

Et finalement : $g(x) = y = \ln\dfrac{1+\sqrt{1+4e^{x}}}{2}$



EXANA389 – EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 1.

Le débit R d'une ligne de transmission (telle qu'une ligne VDSL) peut s'écrire sous la forme

$$R = \log_2(1 + PQ)$$

où P est la puissance du signal transmis sur la ligne, et Q est un nombre désignant la qualité de la ligne.

Vous disposez de 2 lignes de qualité différentes pour votre connexion internet. Votre première ligne possède une qualité $Q_1 = 0.1$ et la seconde une qualité $Q_2 = 5$. Votre fournisseur peut combiner les deux lignes de façon à obtenir un débit correspondant à la somme des débits de chaque ligne, mais doit répartir la puissance totale $P_F = 6$ W entre les deux lignes.

On note P_1 la puissance utilisée dans la première ligne et P_2 la puissance utilisée dans la seconde ligne $(P_1 + P_2 = P_F)$.

(1) Ecrivez l'expression du débit total R_T disponible pour votre connexion internet en fonction des variables P_1 et P_2.

(2) Ecrivez P_2 en fonction de P_1 et substituez dans l'expression du point (1), de façon à obtenir le débit total R_T en fonction de la seule variable P_1.

(3) Sachant qu'on ne peut pas transmettre de puissance négative, déterminez le domaine de valeurs possibles de P_1.

(4) Etudiez les variations (croissance et décroissance) de la fonction $R_T(P_1)$ sur ce domaine.

(5) Quelle est la répartition de puissance P_1, P_2 qui maximise le débit de votre connexion?

Solution proposée par Nicole Berckmans

$(1)\ R_T = \log_2(1 + 0.1P_1) + \log_2(1 + 5P_2)$

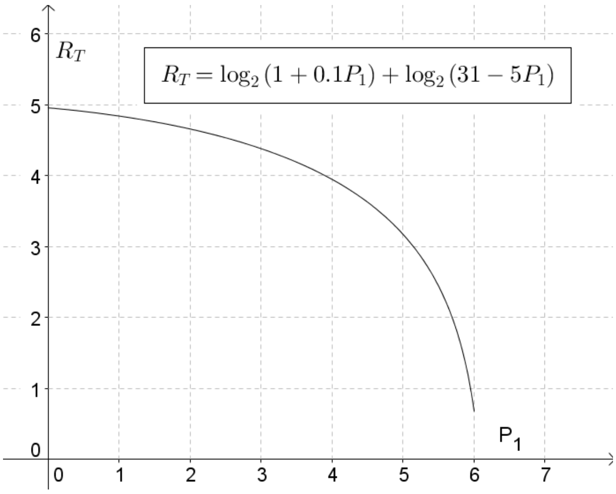
$(2)\ P_2 = P_W - P_1 = 6 - P_1 \Rightarrow R_T = \log_2(1 + 0.1P_1) + \log_2(31 - 5P_1)$

$(3)\ R_1$ et R_2 sont positifs; donc $\begin{cases} 1 + 0.1P_1 \geq 1 \Rightarrow P_1 \geq 0 \\ 31 - 5P_1 \geq 1 \Rightarrow P_1 \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq P_1 \leq 6$

$(4)\ \dfrac{\partial R_T}{\partial P_1} = \ldots = \dfrac{-1.9 - P_1}{(1 + 0.1P_1)(31 - 5P_1)} < 0$

Dès lors, R_T est décroissante sur $[0, 6]$

(5) La répartition est $P_1 = 0$ et $P_2 = 6$



25 octobre 2014