Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 40

EXANA400 – EXANA409

http://www.matheux.c.la

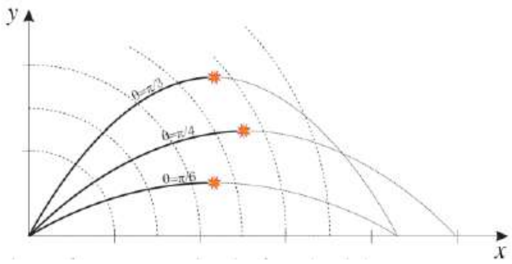
Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Octobre 2014

EXANA400 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2014.

Une base de tir se trouve à l'origine du plan (x, y). Un missile est lancé au temps $t = 0$ avec une vitesse initiale v_0 et une inclinaison θ par rapport à l'horizontale. La trajectoire du missile est donnée par :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\theta \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + v_0 t \sin\theta \end{cases}$$



Ce missile a la particularité d'exploser lorsqu'il atteint sa hauteur maximale dans le ciel.

(a) Déterminer (en fonction de v_0, g et θ) le moment t^* auquel le missile explose.

(b) Déterminer (en fonction de v_0 et g) l'angle θ^* qui permet de maximiser la distance entre la base de tir et l'endroit de l'explosion. Que vaut la distance maximale.

Justifier chacun des résultats obtenus. Les constantes v_0 et g sont strictement positives et $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ et Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2014-09/admissionanalyse-se14.pdf

i. Le missile explose lorsqu'il atteint sa hauteur maximale. L'instant $t^\star$ correspondant est un point stationnaire de la fonction $y(t)$, *i.e.*

$$y'(t^\star) = 0$$

soit

$$-gt^\star + v_0 \sin\theta = 0 \quad \text{et} \quad t^\star = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

On peut dresser le tableau des variations suivant

t		$t^\star$	
$y'(t)$	$+$	0	$-$
$y(t)$	$\nearrow$	Max.	$\searrow$

La fonction $y(t)$ étant strictement croissante pour $t < t^\star$ et strictement décroissante pour $t > t^\star$, elle présente son maximum absolu en $t = t^\star$.

ii. La position du missile au moment de son explosion est donnée par

$$\begin{cases} x(t^\star) = \dfrac{v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta \\ y(t^\star) = \dfrac{v_0^2}{2g}\sin^2\theta \end{cases}$$

La distance d entre la base et l'endroit de l'explosion est telle que

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2(t^\star) + y^2(t^\star) \\ &= \left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sin^2\theta\left(\cos^2\theta + \frac{\sin^2\theta}{4}\right) \\ &= \left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2 \sin^2\theta\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2\theta\right) \end{aligned}$$

Puisque maximiser d revient à maximiser d^2 et puisque les paramètres du problème sont strictement positifs, on peut rechercher la distance maximale en étudiant la fonction

$$f(\theta) = \sin^2\theta - \frac{3}{4}\sin^4\theta$$

L'angle $\theta^\star$ pour lequel la distance d est maximale est un zéro de f'. On calcule donc

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= 2\cos\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^3\theta \\ &= \left(2 - 3\sin^2\theta\right)\cos\theta\sin\theta \end{aligned}$$

Le seul zéro de cette expression appartenant à l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ est

$$\theta^\star = \arcsin\sqrt{2/3}$$

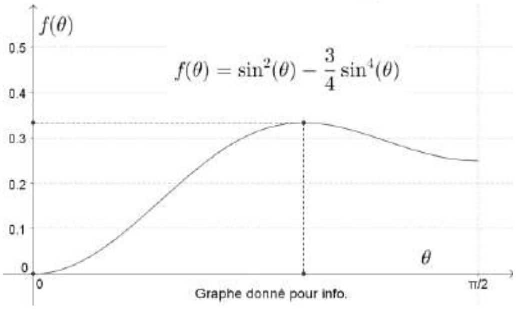
On peut dresser le tableau des variations suivant

θ	0		$\theta^\star$		$\pi/2$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	Max.	$\searrow$	

La fonction $f(\theta)$ étant strictement croissante pour $\theta < \theta^\star$ et strictement décroissante pour $\theta > \theta^\star$, elle présente son maximum absolu en $\theta = \theta^\star$.

Pour cette valeur de l'angle de tir, l'explosion se produit à la distance

$$d^\star = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{f(\theta^\star)} = \frac{v_0^2}{\sqrt{3}\,g}$$



25 octobre 2014

EXANA401 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

On considère la fonction :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}\right)$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre réel.

(a) Déterminer le domaine de définition de f.

(b) Identifier les éventuels extrema locaux de f.

(c) Identifier les éventuels points d'inflexion du graphe de f.

(d) Déterminer toutes les valeurs de α pour lesquelles f est une fonction impaire.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ et Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2014-09/admissionanalyse-se14.pdf

Soit la fonction à étudier

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + \alpha^2})$$

où $\alpha > 0$ est un paramètre réel.

i. La fonction logarithme étant définie sur $]0, +\infty[$, la fonction f est définie pour les valeurs de x telles que

$$x + \sqrt{x^2 + \alpha^2} > 0$$

Cette inégalité étant toujours vérifiée si $\alpha > 0$, on en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}$ pour tout $\alpha > 0$.

ii. Pour rechercher les éventuels extrema, on calcule

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}} \left(1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right) \\
&= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + \alpha^2}} \frac{\sqrt{x^2 + \alpha^2} + x}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} > 0
\end{aligned}$$

La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et ne présente pas d'extremum.

iii. Une nouvelle dérivation conduit à

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left[(x^2+\alpha^2)^{-1/2}\right]' = -\frac{1}{2}(x^2+\alpha^2)^{-3/2}(2x) \\ &= -\frac{x}{(x^2+\alpha^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

dont le seul zéro et situé en $x = 0$.

x		0	
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\smile$	P.I.	$\frown$

La dérivée seconde s'annulant et changeant de signe en $x = 0$, le graphe présente un point d'inflexion en ce point où $f(0) = \ln\alpha$. Le graphe de f tourne sa concavité vers le haut à gauche de $x = 0$ et vers le bas à droite de $x = 0$.

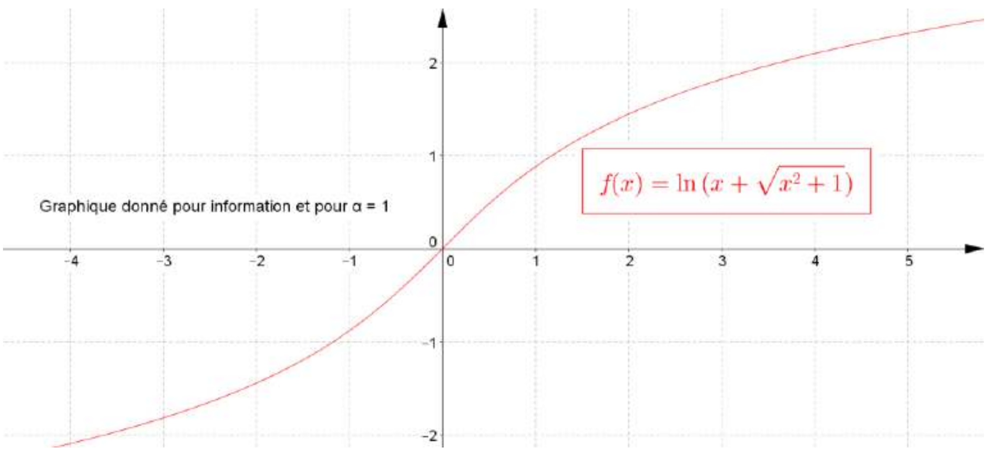
iv. La fonction est impaire si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit si

$$\ln(-x+\sqrt{x^2+\alpha^2}) = -\ln(x+\sqrt{x^2+\alpha^2})$$

ou encore

$$\begin{aligned} 0 &= \ln(-x+\sqrt{x^2+\alpha^2}) + \ln(x+\sqrt{x^2+\alpha^2}) \\ &= \ln\left[(-x+\sqrt{x^2+\alpha^2})(x+\sqrt{x^2+\alpha^2})\right] \\ &= \ln\alpha^2 = 2\ln\alpha \end{aligned}$$

La fonction étudiée est donc impaire pour la seule valeur de $\alpha = 1$.



EXANA402 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Compte tenu de la résistance de l'air, la vitesse de chute d'un corps de masse m initialement abandonné sans vitesse est donné par :

$$v = \frac{mg}{c}\left[1 - \exp\left(-\frac{ct}{m}\right)\right]$$

où g désigne l'accélération de pesanteur, t est le temps et c est le coefficient de frottement fluide. Tous les paramètres sont strictement positifs.

(a) Calculer la vitesse limite de chute, soit $v_\infty = \lim\limits_{t\to+\infty} v$ (en considérant m, g et c fixés)

(b) Calculer la vitesse de chute lorsque la résistance de l'air devient négligeable, soit $v_0 = \lim\limits_{c\to 0} v$ (en considérant m, g et t fixés)

(c) Calculer la vitesse de chute d'un corps très lourd, soit $v_m = \lim\limits_{m\to+\infty} v$ (en considérant c, g et t fixés)

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ et Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2014-09/admissionanalyse-se14.pdf

Soit

$$v = \frac{mg}{c}\left(1 - \mathrm{e}^{-ct/m}\right)$$

i. La vitesse limite de chute est donnée par

$$v_\infty = \frac{mg}{c}\lim_{t\to+\infty}\left(1 - \mathrm{e}^{-ct/m}\right) = \frac{mg}{c}$$

ii. Si la résistance de l'air devient négligeable, on a

$$v_0 = mg\lim_{c\to 0}\frac{1 - \mathrm{e}^{-ct/m}}{c} = mg\left[\frac{0}{0}\right]$$
$$= mg\lim_{c\to 0}\frac{(t/m)\,\mathrm{e}^{-ct/m}}{1} = gt$$

où on a utilisé l'Hopital pour lever l'indétermination.

iii. Dans le cas d'un objet très pesant, la vitesse de chute devient

$$\begin{aligned}
v_m &= \frac{g}{c} \lim_{m \to +\infty} m \left(1 - \mathrm{e}^{-ct/m}\right) = \frac{g}{c} \left[\infty \cdot 0\right] \\
&= \frac{g}{c} \lim_{m \to +\infty} \frac{1 - \mathrm{e}^{-ct/m}}{1/m} = \frac{g}{c} \left[\frac{0}{0}\right] \\
&= \frac{g}{c} \lim_{m \to +\infty} \frac{(-ct/m^2)\,\mathrm{e}^{-ct/m}}{(-1/m^2)} \\
&= \frac{g}{c}(ct) = gt
\end{aligned}$$

où on a utilisé l'Hopital pour lever l'indétermination.

25 novembre 2014

EXANA403 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2014.

Calculer les expressions suivantes :

(a) $\int_0^4 \sqrt{2x+1}\, dx$

(b) $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$

(c) $\int_0^1 \arctan x\, dx$

(d) $\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}}$ pour $x>0$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ et Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2014-09/admissionanalyse-se14.pdf

i. $\int_0^4 \sqrt{2x+1}dx = \left[\frac{1}{3}(2x+1)^{3/2}\right]_0^4 = \frac{1}{3}(27-1) = \frac{26}{3}$

ii. $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}$

iii. Pour calculer $\int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx$, on applique la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx$$

avec

$$\begin{cases} f'(x) = 1 \\ g(x) = \operatorname{arctg} x \end{cases} \qquad \begin{cases} f(x) = x \\ g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_0^1 \operatorname{arctg} x\, dx &= \left[x \operatorname{arctg} x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2} \end{aligned}$$

iv. Par le changement de variable

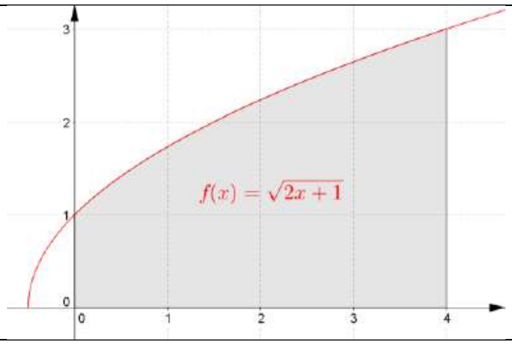
$$\sqrt{x} = t, \qquad \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt$$

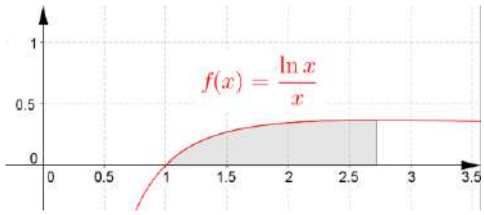
on peut transformer la primitive selon

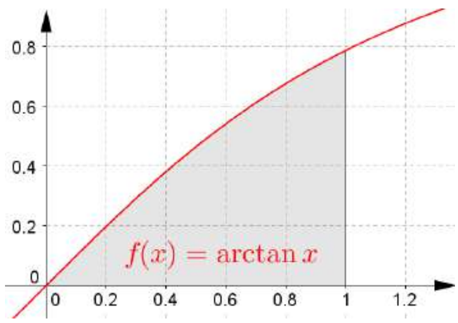
$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} &= 2\int \frac{dt}{1+t} \\ &= 2\,\ln(1+t)+C\end{aligned}$$

Exprimant ce résultat en fonction de la variable d'origine, il vient

$$\int \frac{dx}{(1+\sqrt{x})\sqrt{x}} = 2\,\ln(1+\sqrt{x})+C$$







EXANA404 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Soit f la fonction définie par $f(x)=x.\sqrt[3]{e^{-|x|}}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

a) f est-elle paire, impaire? Justifier.

b) Que vaut la limite de f lorsque x tend vers $+\infty$? vers $-\infty$? Justifier.

c) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x\neq 0$.

d) Déterminer les éventuels zéros de f, f' et f''.

e) Combien le graphe de f possède-t-il de points maximum? de points minimum? de points d'inflexion? Justifier.

f) Esquisser le graphe de f, en idiquant les différents points qui apparaissent dans les questions précédentes.

---

a) La fonction est impaire puisque $f(-x)=(-x)\sqrt[3]{e^{-|-x|}}=-x\sqrt[3]{e^{-|x|}}=-f(x)$

Il suffira donc d'étudier la fonction pour $x>0$. L'autre partie de la fonction s'obtient par une symétrie centrale de centre O.

b) On considère donc dans la suite que $x>0\Rightarrow |x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt[3]{e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{\frac{x}{3}}}\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}}=0$$

Par symétrie : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\sqrt[3]{e^{-x}}=0$

c) $f'(x)=\sqrt[3]{e^{-x}}+x.\left(-\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{e^{-x}}=\frac{3-x}{3}\sqrt[3]{e^{-x}}$

$$f''(x)=-\frac{1}{3}\sqrt[3]{e^{-x}}+\frac{3-x}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)\sqrt[3]{e^{-x}}=\sqrt[3]{e^{-x}}\,\frac{x-6}{9}$$

d) $f(x)=0$ en $x=0$

$f'(x)=0$ en $x=3$ et par symétrie en $x=-3$

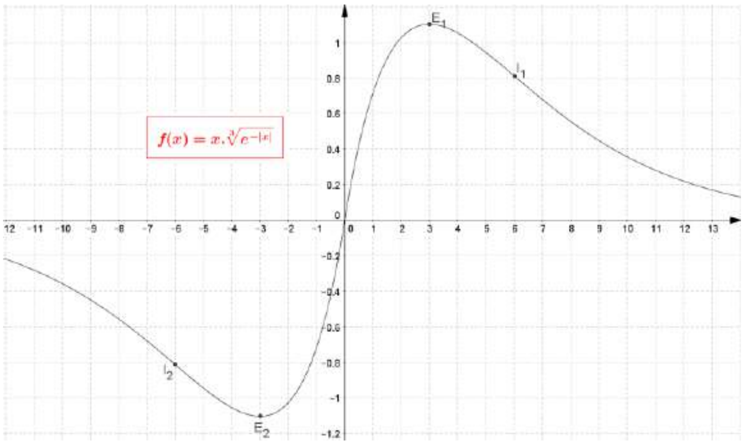
$f''(x)=0$ en $x=6$ et par symétrie en $x=-6$

e) Pour l'ensemble de la fonction

x	$-\infty$		-6		-3		0		3		6		$+\infty$
f'		$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
f''		$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$ $\cap$	$\searrow$ PI	$\searrow$ $\cup$	min	$\nearrow$ $\cup$	0	$\nearrow$ $\cup$	max	$\searrow$ $\cup$	$\searrow$ PI	$\searrow$ $\cup$	0

Les coordonnées des points remarquables sont

$$PI \text{ en } \left(-6,-\frac{6}{e^2}\right) \text{ et } \left(6,\frac{6}{e^2}\right) \quad \min\left(-3,-\frac{3}{e}\right) \quad \max\left(3,\frac{3}{e}\right)$$



25 juin 2015

EXANA405 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Calculer (en justifiant les calculs).

a) $\int x^5 (\ln x)^2 \, dx$

b) $\int_{-150\pi}^{+150\pi} |\sin 6x| \, dx$

---

a) $\int x^5 \ln^2 x \, dx$

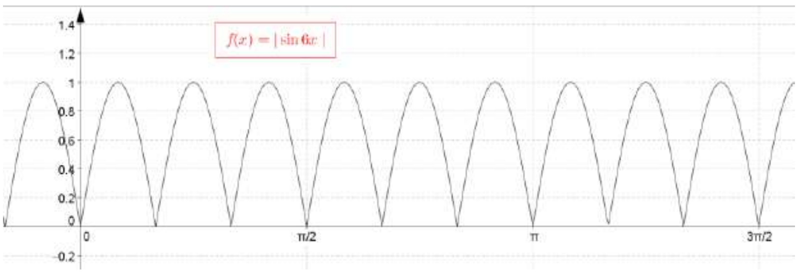
$$\begin{array}{ll} f = \ln^2 x & f' = \dfrac{2\ln x}{x} \\ g' = x^5 & g = \dfrac{x^6}{6} \end{array} \Rightarrow I = \frac{x^6}{6}\ln^2 x - \frac{1}{3}\underbrace{\int x^5 \ln x \, dx}_{I'}$$

$$I' = \int x^5 \ln x \, dx$$

$$\begin{array}{ll} f = \ln x & f' = \dfrac{1}{x} \\ g' = x^5 & g = \dfrac{x^6}{6} \end{array} \Rightarrow I' = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{1}{6}\int x^5 dx = \frac{x^6}{6}\ln x - \frac{x^6}{36}$$

$$\Rightarrow I = \frac{x^6}{6}\ln^2 x - \frac{1}{3}\left(\frac{x^6}{6}\ln x - \frac{x^6}{36}\right) = \boxed{\frac{x^6}{108}\left(18\ln^2 x - 6\ln x + 1\right) + C}$$

b) $I = \int_{-150\pi}^{150\pi} |\sin 6x| \, dx = 2 \times 150 \times 6 \int_0^{+\frac{\pi}{6}} \sin 6x \, dx = 1800\left[-\frac{\cos 6x}{6}\right]_0^{+\frac{\pi}{6}} = 600$

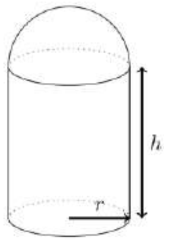


---

25 juin 2015

EXANA406 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Un récipient métallique est constitué de la surface latérale d'un cylindre de rayon r et de hauteur h dm, du disque de base de ce cylindre et d'un couvercle hémisphérique de rayon r dm (voir figure). Si le volume total de ce récipient doit valoir 15 dm^3, pour quelles valeurs de r et de h la surface totale du récipient est-elle minimale?



On a la condition : $V = \pi r^2 h + \frac{2}{3}\pi r^3 = 15 \Rightarrow h = \frac{45 - 2\pi r^3}{3\pi r^2}$

Construisons la fonction qui représente l'aire totale :

$$A = \pi r^2 + 2\pi rh + 2\pi r^2 = 3\pi r^2 + 2\pi rh = 3\pi r^2 + 2\pi r\frac{45 - 2\pi r^3}{3\pi r^2} = 3\pi r^2 + \frac{2}{3}\frac{45 - 2\pi r^3}{r}$$

$$A' = 6\pi r + \frac{2}{3}\frac{-6\pi r^3 - \left(45 - 2\pi r^3\right)}{r^2} = 0 \Rightarrow 18\pi r^3 = 2\left(4\pi r^3 + 45\right)$$

$$\Rightarrow 5\pi r^3 = 45 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$$

C'est bien un minimum puisque :

r		$\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$	
A'	$-$	0	$+$
A	$\searrow$	Min	$\nearrow$

On en déduit : $h = \dfrac{45 - 2\pi\frac{9}{\pi}}{3\pi\left(\frac{9}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$

h et r sont donc égaux.

EXANA407- FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2014.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ pour tout $x>0$ tel que $x\neq 1$

a) Que vaut la limite de f

- lorsque x tend vers $+\infty$? Justifier.
- lorsque x tend vers 1 par valeurs >1? Justifier.

b) Calculer $f'(x)$ et étudier le signe de cette dérivée première.

c) Calculer $f''(x)$ et étudier le signe de cette dérivée seconde.

d) Combien le graphe de f possède-t-il de points maximum? de points minimum? de points d'inflexion? Justifier et calculer leur coordonnées.

e) Esquisser le graphe de f, en indiquant les différents points qui apparaissent dans les questions précédentes.

---

a) 1) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$

2) $\displaystyle \lim_{x\to1^+}\frac{x}{\ln x}=\frac{1}{"0^+"}=+\infty$

b) $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

$TS:$

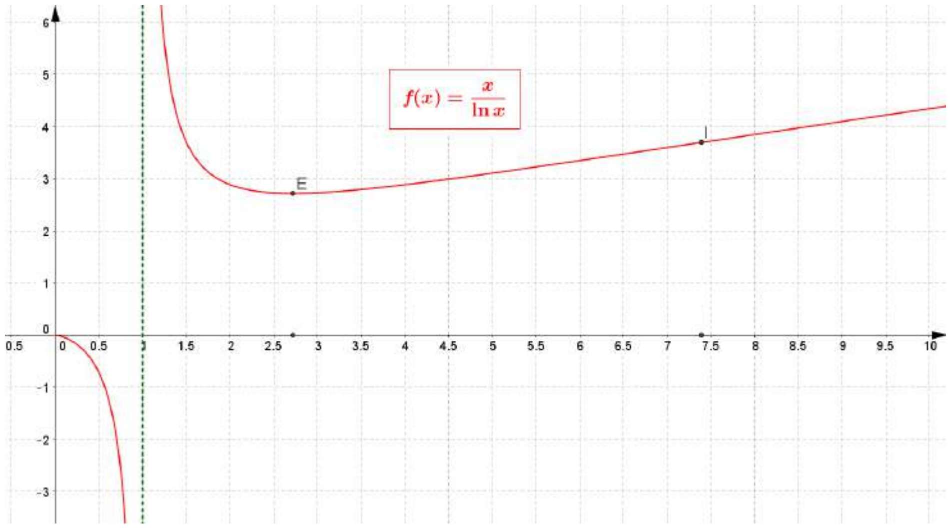
		1		e	
f'	$-$	//	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	//	$\searrow$	$\min(e,e)$	$\nearrow$

c) $f''(x)=\dfrac{2-\ln x}{x.\ln^3 x}$

$TS:$

		1		e^2	
f''	$-$	//	$+$	0	$-$
f	$\cap$	//	$\cup$	$PI\left(e^2,\dfrac{e^2}{2}\right)$	$\cap$

d) Voir les TS : $\min(e,e)$, $PI\left(e^2,\dfrac{e^2}{2}\right)$



25 juin 2015

EXANA408 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2014.

Calculer (en justifiant les calculs)

a) $\int \cos 3x \, e^{2x} \, dx$

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + x^{50} \sin^{51} x\right) dx$

---

a) $I = \int \cos 3x \, e^{2x} \, dx$

$$\begin{array}{ll} f = \cos 3x & f' = -3\sin 3x \\ g' = e^{2x} & g = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \Rightarrow I = \frac{1}{2}\cos 3x \, e^{2x} + \frac{3}{2}\underbrace{\int \sin 3x \, e^{2x} \, dx}_{I'}$$

$I' = \int \sin 3x \, e^{2x} \, dx$

$$\begin{array}{ll} f = \sin 3x & f' = 3\cos 3x \\ g' = e^{2x} & g = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \Rightarrow I' = \frac{1}{2}\sin 3x \, e^{2x} - \frac{3}{2}\underbrace{\int \cos 3x \, e^{2x} \, dx}_{I}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}\cos 3x \, e^{2x} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\sin 3x \, e^{2x} - \frac{3}{2} I\right) \Rightarrow \boxed{I = \frac{e^{2x}}{13}\left(2\cos 3x + 3\sin 3x\right) + C}$$

b) $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 x + x^{50}\sin^{51} x\right) dx = \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx}_{I_1} + \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} x^{50}\sin^{51} x \, dx}_{I_2}$

$$I_1 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \sin^2 x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}\left([x]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2}[\sin 2x]_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \frac{\pi - 2}{4}$$

$$I_2 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} x^{50}\sin^{51} x \, dx.$$

Notons que la fonction $f(x) = x^{50}\sin^{51} x$ est une fonction impaire.

En effet: $f(-x) = (-x)^{50}\sin^{51}(-x) = -x^{50}\sin^{51} x = -f(x)$

Par conséquent : $I_2 = 0$

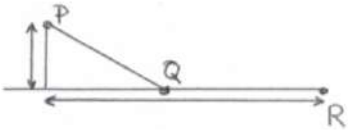
Conclusion : $\boxed{I = \frac{\pi - 2}{4}}$

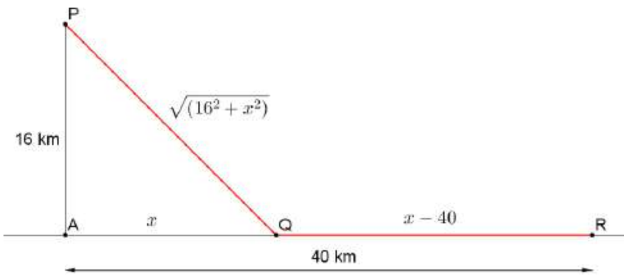
---

25 juin 2015

EXANA409 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2014.

Une plate-forme pétrolière P, située à 16 km d'un rivage, doit être reliée par un pipeline PQR à une raffinerie R située sur le rivage à 40 km du point du rivage le plus proche de P. Sachant qu'un kilomètre de pipeline revient à 50 000 euros s'il est construit en mer et à 30 000 euros s'il est construit sur terre, à quelle distance de P faut-il placer le point Q pour minimiser le coût de la construction du pipeline?





Soit x la distance AQ. Construisons une fonction qui représente le coût du pipeline (en milliers d'euros).

$$C = Coût(PQ) + Coût(QR) = 50\sqrt{16^2+x^2} + 30(40-x)$$

$$\Rightarrow C' = 50.\frac{1}{2\sqrt{16^2+x^2}}.2x - 30 = 0 \Rightarrow 5x = 3\sqrt{16^2+x^2} \Rightarrow 25x^2 = 3^2.16^2 + 9x^2$$

$$\Rightarrow 16x^2 = 3^2.16^2 \Rightarrow \boxed{x = 12 \text{ km}}$$

Il faut vérifier qu'il s'agit bien d'un minimum.

TS	x		12	
	C'	$-$	0	$+$
	C	$\searrow$	*Min*	$\nearrow$

---

25 juin 2015