Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 43

EXANA430 – EXANA439

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Janvier 2016

EXANA430 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

La fonction $\text{arch}(x)$, appelée arccosinus hyperbolique, peut être définie par

$$\text{arch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Déterminez le domaine de définition de la fonction arch, ses éventuelles asymptotes ainsi que les éventuels extrema, points d'inflexion et points à tangente verticale de son graphe. Sur base des résultats obtenus, esquissez le graphe de $\text{arch}(x)$, en illustrant bien la concordance avec les réultats préalables.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2015-08/admission_analyse_se15.pdf

 # Domaine de définition

L'argument de la fonction ln doit être défini et strictement positif, ce qui conduit aux conditions

$$x^2 - 1 \geq 0 \qquad \text{et} \qquad x + \sqrt{x^2 - 1} > 0.$$

La première de ces conditions implique que $x \in] - \infty, -1] \cup [1, +\infty]$. Quant à la seconde, elle implique

$$\sqrt{x^2 - 1} > -x.$$

Donc,

— si $x \leq -1$, les deux membres de l'inégalité sont positifs et, en élevant au carré, on obtient $x^2 - 1 > x^2$, ce qui est impossible ;

— si $x \geq 1$, le membre de gauche de l'inégalité est positif tandis que celui de droite est négatif et l'inégalité est vérifiée de facto.

Le domaine de définition de la fonction $\text{arch}(x)$ est donc $[1, +\infty[$.

Asymptotes

Il est possible qu'il existe une asymptote horizontale ou oblique, pour $x \to +\infty$, vu le domaine de définition. On calcule donc

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = +\infty$$

ce qui montre qu'il n'existe pas d'asymptote horizontale et

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{x} = \text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"} \underset{(\mathrm{H})}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'}{1},\\ = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)}{1} = 0\end{aligned}$$

par application du théorème de l'Hospital et car $\lim_{x\to+\infty} x/\sqrt{x^2-1} = 1$. Il n'y a pas d'asymptote oblique non plus.

Il n'y a pas d'asymptote verticale, en raison de la continuité de la fonction sur son domaine de définition $[1, +\infty[$.

Extrema et Points d'inflexion

On calcule successivement les deux premières dérivées de la fonction à étudier

$$\begin{aligned}(\mathrm{arch})'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},\\ (\mathrm{arch})''(x) &= \left(\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}\right)' = \frac{-x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

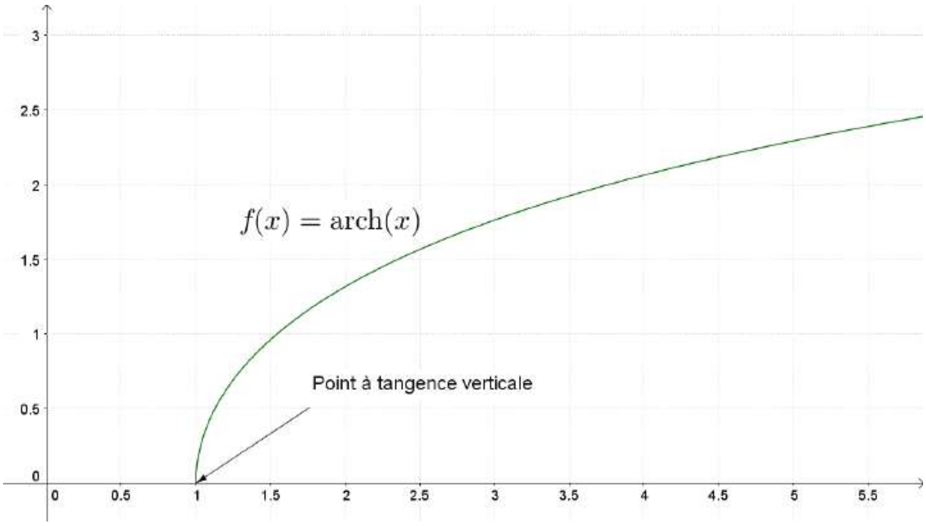
L'étude de signe de ces dérivées donne

x		1	
$(\mathrm{arch})'(x)$		$\nexists$	$+$
$(\mathrm{arch})''(x)$		$\nexists$	$-$
$\mathrm{arch}(x)$	$\nexists$	Tg.V.	$\nearrow$
		$(1,0)$	$\frown$

On peut vérifier que

$$\lim_{x\to1^+} (\mathrm{arch})'(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty,$$

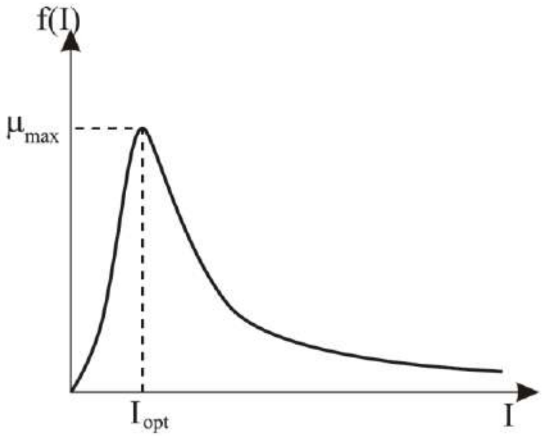
ce qui justifie que le point d'abscisse $x = 1$ est un point à tangente verticale.



21 janvier 2016

EXANA431 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

Par une série d'expériences réalisées dans des conditions d'éclairement contrôlées, on détermine que le taux de croissance d'une variété de légumeuses peut-être décrit par la fonction $f(I)$ de l'éclairement I et dont l'allure est représentée graphiquement ci-dessous.



Le taux de croissance

i. est positif
ii. est nul sous un éclairement nul,
iii. est maximum et vaut μ_{max} (connu) pour un éclairement I_{opt} (connu),
iv. tend vers zéro si l'éclairement tend vers l'infini.

Déterminez toutes les fonctions de la forme

$$f(I)=\frac{\alpha+\beta I}{1+\delta I+\varepsilon I^2}$$

permettant de traduire la dépendance du taux de croissance en fonction des paramètres μ_{max}, I_{opt} positifs mesurés expérimentalement. Veillez à simplifier votre résulat au maximum.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2015-08/admission_analyse_se15.pdf

Soit la fonction

$$f(I) = \frac{\alpha + \beta I}{1 + \delta I + \varepsilon I^2}.$$

Puisque le taux de croissance est nul à éclairement nul, $f(0) = 0$, et donc $\alpha = 0$. Pour éviter toute solution triviale, il convient donc également que $\beta \neq 0$.

Le taux de croissance doit également tendre vers 0 pour $I \to +\infty$. En observant que

$$\lim_{I \to +\infty} f(I) = \begin{cases} 0 & \text{si } \varepsilon \neq 0, \\ \frac{\beta}{\delta} \neq 0 & \text{si } \varepsilon = 0, \end{cases}$$

on peut conclure que ε doit nécessairement être non nul. La fonction que nous cherchons s'écrit donc

$$f(I) = \beta \frac{I}{1 + \delta I + \varepsilon I^2}$$

avec $\beta \neq 0$ et $\varepsilon \neq 0$. On sait également que $f(I)$ présente un optimum qui vaut $\mu_{\max}$ en $I = I_{opt}$, soit deux informations supplémentaires qui devraient réduire de deux unités le nombre de paramètres de ce problème. La dérivée première

$$f'(I) = \beta \frac{1 + \delta I + \varepsilon I^2 - I(\delta + 2\varepsilon I)}{(1 + \delta I + \varepsilon I^2)^2} = \beta \frac{1 - \varepsilon I^2}{(1 + \delta I + \varepsilon I^2)^2}$$

doit s'annuler lorsque $I = I_{opt}$ et donc il faut que $\varepsilon = 1/I_{opt}^2$. Par ailleurs, la valeur de la fonction $f(I)$ prise en I_{opt} vaut $\mu_{\max}$, donc

$$f(I_{opt}) = \beta \frac{I_{opt}}{1 + \delta I_{opt} + \varepsilon I_{opt}^2} = \beta \frac{I_{opt}}{2 + \delta I_{opt}} = \mu_{\max}.$$

Ceci conduit à

$$\delta = \frac{\beta}{\mu_{\max}} - \frac{2}{I_{opt}}.$$

Finalement, on obtient l'expression paramétrique suivante pour $f(I)$, avec β comme seul et unique paramètre,

$$f(I) = \beta \frac{I}{1 + \left(\frac{\beta}{\mu_{\max}} - \frac{2}{I_{opt}}\right) I + \frac{I^2}{I_{opt}^2}} = \beta \frac{I}{\left(1 - \frac{I}{I_{opt}}\right)^2 + \frac{\beta}{\mu_{\max}} I}$$

où la seule restriction est $\beta > 0$, pour que le taux de croissance à modéliser soit positif. Notons qu'en posant $\beta = \mu_{\max} b^2 / I_{opt}$ et $i = I/I_{opt}$, on peut également écrire cette loi sous une forme *adimensionnelle*

$$\frac{f(I)}{\mu_{\max}} = \frac{i}{\left(\frac{i-1}{b}\right)^2 + i}$$

et le paramètre b apparaît comme un paramètre d'étalement autour du pic de croissance.

EXANA432 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2015.

On considère les intégrales

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n}\,dx, \qquad n \in \mathbb{Q}.$$

i. Calculer $I_0, I_{1/2}, I_2$ et I_4.

ii. Montrez que

$$I_n \le I_{n+1} \le \frac{1}{2}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2015-08/admission_analyse_se15.pdf

i. On trouve les trois intégrales correspondant à $n = 0$, 1 et 2 par intégration directe

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{1+1}\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x} - \frac{1}{1+x}\mathrm{d}x = [x - \ln(1+x)]_0^1 = 1 - \ln 2 \simeq 0.307,$$

$$I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2\% \simeq 0.347.$$

On évalue $I_{1/2}$ à l'aide du changement de variable $t = 1 + \sqrt{x}$, soit $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\left(2\sqrt{x}\right)$, ce qui donne

On évalue $I_{1/2}$ à l'aide du changement de variable $t = 1 + \sqrt{x}$, soit $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\left(2\sqrt{x}\right)$, ce qui donne

$$I_{1/2} = \int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\int_1^2 \frac{(t-1)^3}{t}\mathrm{d}t == 2\int_1^2 t^2 - 3t + 3 - \frac{1}{t}\mathrm{d}t = 2\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 3t - \ln t\right]_1^2 = \frac{5}{3} - 2\ln 2 \simeq 0.280.$$

Quant à I_4, on l'évalue à l'aide du changement de variable $t = x^2$, soit $\mathrm{d}t = 2x\mathrm{d}x$, ce qui donne

$$I_4 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\frac{1}{2}\mathrm{arctg}\, t\right]_0^1 = \frac{\pi}{8} \simeq 0.393.$$

ii. On peut démontrer que $I_n \leq I_{n+1}$ est observant que

$$\frac{x}{1+x^n} \leq \frac{x}{1+x^{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lorsque $x \in [0,1]$ (puisque $1 \geq x^n \geq x^{n+1} \geq 0$ dans ces conditions). On peut intégrer cette inégalité membre à membre, ce qui donne le résultat cherché. Une autre méthode consisterait à démontrer que $I_n - I_{n+1} \leq 0$. Il convient alors de calculer

$$I_n - I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x}{1+x^n} - \frac{x}{1+x^{n+1}}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{x\left(1+x^{n+1}-1-x^n\right)}{(1+x^n)\left(1+x^{n+1}\right)}\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)}{(1+x^n)\left(1+x^{n+1}\right)}\mathrm{d}x,$$

qui est bien négatif, puisque la fonction à intégrer est partout négative sur l'intervalle $[0;1]$.

On démontre maintenant que $I_n \leq \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$. Les résultats du point (i.) montrent que $I_n \leq \frac{1}{2}$ pour $n \in \{0, 1, 2, 4\}$. Par ailleurs, comme démontré ci-dessus, la suite des I_n est croissante, i.e. $I_n \leq I_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$. Lorsque n est grand, x^n devient petit par rapport à 1 au dénominateur de l'intégrand. Pour toutes les valeurs entières de n, on a

$$1 + x^n \geq 1 \qquad \forall x \in [0, 1]$$

Dès lors

$$\frac{x}{1 + x^n} \leq x \qquad \forall x \in [0, 1]$$

et

$$I_n = \int_0^1 \frac{x}{1 + x^n} \mathrm{d}x \leq \int_0^1 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

EXANA433 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2014, groupe A.

Déterminer la fonction $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que :

- $f'(x)$ est un polynôme de degré 2
- $f'(x)$ est une fonction impaire
- $f'(x)$ admet une racine en $x=2$
- $f(\sqrt{2})=-7$ et $f(4)=133$

Solution proposée par Antoine Randour

De la deuxième condition on a :

$f'(x) impaire$

$\Rightarrow f'(-x)=-f'(x)$

$\Rightarrow f'(0)=0$

De la troisième condition on a :
étant donné que la dérivée de la fonction est impaire, cela implique qu'il y a une symétrie pour toutes les racines.

$f'(2)=0 \Rightarrow f'(-2)=0$

$\Rightarrow 3 racines$

$\Rightarrow f'(x)=ax(x-2)(x+2)=ax(x^2-4)=ax^3-4ax$

$\Rightarrow f(x)=\int ax^3-4ax=\frac{ax^4}{4}-2ax^2+C$

De la dernière condition on a :

$f(\sqrt{2})=-7$

$\Rightarrow -7=a-4a+C$

$(1) \Rightarrow C=-7+3a$

$f(4)=133$

$\Rightarrow 133=64a-32a+C$

$(2) \Rightarrow C=133-32a$

$(1)-(2) \Rightarrow -140+35a=0$

$\Rightarrow a=4$

$\Rightarrow C=5$

Et donc :

$\Rightarrow f(x)=x^4-8x^2+5$

---

12 mai 2016

EXANA434 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2016.

Soit la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - a^2}{x^3 - a^3}$$

où a représente un paramètre réel on nul.

En discutant s'il y a lieu en fonction de a,

i. déterminez le domaine de définition de la fonction f et ses évantuelles asymptotes;

ii. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses évantuels extrema;

iii. sur base des informations receuillies esquissez le graphe de f.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2016-07/admission_ju16.pdf

i. La fonction est définie pour tous les x tels que

$$x^3 - a^3 \neq 0$$

soit

$$(x-a)(x^2+ax+a^2) \neq 0$$

Dans les conditions envisagées ($a \neq 0$), le discriminant du trinôme du second degré est toujours négatif, *i.e.*

$$\rho = a^2 - 4a^2 = -3a^2 < 0$$

Dès lors,

$$\text{dom } f = \mathbb{R} \backslash \{a\}$$

On peut cependant remarquer que

$$f(x) = \frac{(x-a)(x+a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} = \frac{x+a}{x^2+ax+a^2}$$

et

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{x+a}{x^2+ax+a^2} = \frac{2}{3a}$$

de sorte que la fonction ne possède pas d'asymptote verticale mais peut être prolongée continûment en $x = a$ en posant $f(a) = 2/(3a)$.

Les éventuelles asymptotes horizontales peuvent être identifiées en calculant

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+a}{x^2+ax+a^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

ce qui montre que f approche l'asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Notons que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^- \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0^+$$

L'asymptote horizontale est donc approchée par valeurs inférieures au voisinage de $-\infty$ et par valeurs supérieures au voisinage de $+\infty$.

Comme f admet une asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$, il n'y a pas d'asymptote oblique.

ii. Pour identifier les éventuels extrema, on calcule

$$f'(x) = \left(\frac{x+a}{x^2+ax+a^2}\right)' = \frac{x^2+ax+a^2-(2x+a)(x+a)}{(x^2+ax+a^2)^2} = \frac{-x(x+2a)}{(x^2+ax+a^2)^2}$$

La dérivée première s'annule en $x_1 = 0$ et $x_2 = -2a$.

- Si $a > 0$, on a $x_2 < x_1 < a$ et on peut dresser le tableau de variation suivant

x		$-2a$		0		a	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	$\nexists$	-
$f(x)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$

  La fonction étant décroissante à gauche de $x_2 = -2a$ et croissante à droite, elle y présente un minimum local. De même, f étant croissante à gauche de $x_1 = 0$ et décroissante à droite, elle présente un maximum local en $x = 0$. On calcule aisément

$$f(-2a) = -\frac{1}{3a} < 0, \qquad f(0) = \frac{1}{a} > 0$$

- Si $a < 0$, on a $a < x_1 < x_2$ et on peut dresser le tableau de variation suivant

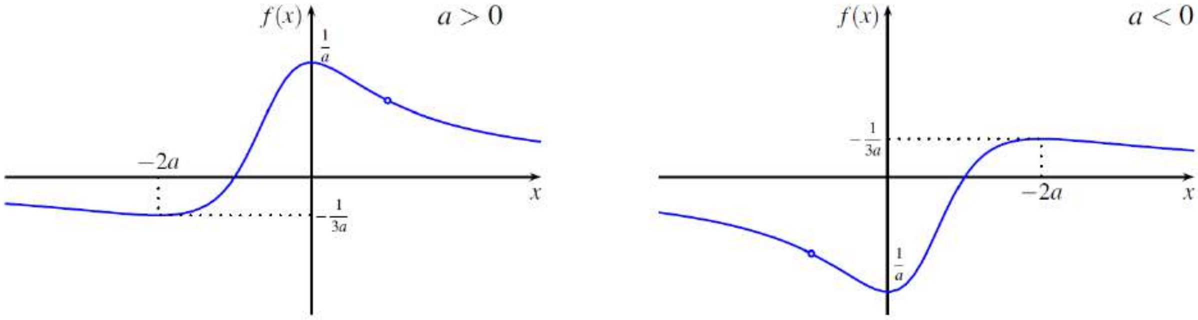
x		a		0		$-2a$	
$f'(x)$	-	$\nexists$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

La fonction étant décroissante à gauche de $x_1 = 0$ et croissante à droite, elle y présente un minimum local. De même, f étant croissante à gauche de $x_2 = -2a$ et décroissante à droite, elle présente un maximum local en cette abscisse.

On a

$$f(-2a) = -\frac{1}{3a} > 0, \qquad f(0) = \frac{1}{a} < 0$$

iii. En rassemblant les résultats obtenus précédemment, on peut esquisser le graphe de f en distinguant les cas $a > 0$ et $a < 0$.



EXANA435 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2016.

i. Calculez

$$I_0 = \int \ln x \, dx \qquad \text{et} \qquad I_1 = \int x \ln x \, dx$$

ii. Pour tout $l \in]0,1]$, on définit

$$J_n(l) = \int_l^1 x^n \ln x \qquad \text{où} \ \ n \in N$$

Calculez

$$\lim_{l \to 0^+} J_n(l)$$

iii. Calculez

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2} \, dx$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2016-07/admission_ju16.pdf

i. On calcule les primitives demandées par primitivation par parties

$$I_0 = \int (x)' \ln x \mathrm{d}x = x \ln x - \int \mathrm{d}x = -x + x \ln x + C$$

où C est une constante arbitraire.

$$I_1 = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \mathrm{d}x = -\frac{x^2}{4} + \frac{x^2}{2} \ln x + C$$

où C est une constante arbitraire.

ii. On peut calculer les intégrales demandées en intégrant à nouveau par parties

$$\begin{aligned} J_n(\ell) = \int_\ell^1 \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' \ln x\, dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_\ell^1 - \int_\ell^1 \frac{x^n}{n+1}\, dx \\ &= -\frac{\ell^{n+1}}{n+1}\ln \ell - \left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_\ell^1 \\ &= -\frac{\ell^{n+1}}{n+1}\ln \ell + \frac{\ell^{n+1}-1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Cette expression n'est pas définie pour $\ell = 0$. On peut cependant calculer

$$\lim_{\ell \to 0^+} J_n(\ell) = -\lim_{\ell \to 0^+}\left[\frac{\ell^{n+1}}{n+1}\ln \ell\right] - \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{(n+1)^2}$$

puisque, par le théorème de l'Hospital, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{\ell \to 0^+} \ell^{n+1}\ln \ell = \lim_{\ell \to 0^+} \frac{\ln \ell}{\ell^{-(n+1)}} = \lim_{\ell \to 0^+} \frac{\frac{1}{\ell}}{-(n+1)\ell^{-(n+2)}} = -\frac{1}{n+1}\lim_{\ell \to 0^+} \ell^{n+1} = 0$$

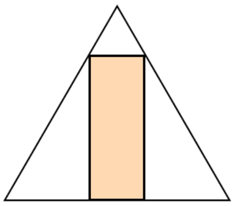
iii. Posant $t^2 = 1 - x^2$ avec $t > 0$, il vient $t\,dt = -x\,dx$ et

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\, dx = -\int_1^0 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

13 septembre 2016

EXANA436 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2016.

On inscrit un rectangle dans un triangle équilatéral en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur un côté du triangle comme illustré ci-contre.
Quelle est la fraction maximale de la surface du triange qui peut être ainsi recouverte?



Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2016-07/admission_ju16.pdf

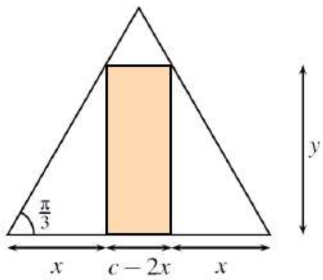
Soit c le côté du triangle et x la longueur laissée libre sur le demi-côté de ce triangle (voir figure). La base du rectangle mesure $c-2x$. L'autre côté du rectangle a une longueur notée y telle que

$$y = x \text{ tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}x$$

L'aire du rectangle s'exprime donc par

$$S(x) = y(c-2x) = \sqrt{3}x(c-2x)$$

où seules les valeurs de x dans l'intervalle $[0, c/2]$ doivent être prises en compte.



Remarquons qu'on retrouve bien $S(0) = 0$ (le rectangle dégénère en un segment de droite correspondant à la base du triangle) et $S(c/2) = 0$ (le rectangle dégénère en un segment de droite correspondant à la hauteur du triangle). Entre ces deux extrêmes, l'aire du rectangle est naturellement positive et possède un extremum.

On calcule aisément

$$S'(x) = \sqrt{3}(-2x + c - 2x) = \sqrt{3}(c - 4x)$$

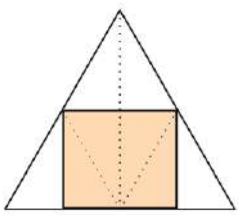
qui s'annule uniquement pour $x = c/4$. Les variations de S sont décrites par

x	0		c/4		$c/2$
$S'(x)$	+	+	0	−	−
$S(x)$	0	↗	Max	↘	0

La surface est donc maximale pour $x = c/4$. Dans ce cas,

$$S(c/4) = \frac{c}{2}\frac{c}{4}\sqrt{3} = \frac{c^2\sqrt{3}}{8}$$

que l'on peut comparer à $c^2\sqrt{3}/4$, l'aire du triangle équilatéral. On dégage donc ainsi un taux de recouvrement du triangle de 50%, comme illustré ci-dessous.



Solution optimale

---

13 septembre 2016

EXANA437- FACSA, ULG, Liège, septembre 2016.

Soit la fonction

$$f(x) = \ln \frac{a^2 + x^2}{ax}$$

où a représente un paramètre réel strictement positif.

En discutant, s'il y a lieu, en fonction de a,

i. déterminez le domaine de définition de la fonction f et ses éventuelles asymptotes ;

ii. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;

iii. étudiez la concavité de f et identifiez ses éventuels points d'inflexion ;

iv. sur base des informations recueillies, esquissez le graphique de f.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2016-12/admission_se16.pdf

i. La fonction ln étant définie sur $]0,+\infty[$ et le paramètre a étant strictement positif, la fonction

$$f(x) = \ln \frac{a^2 + x^2}{ax}$$

est définie sur $]0,+\infty[$.

On a

$$\lim_{x \to 0^+} \ln \frac{a^2 + x^2}{ax} = +\infty \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{a^2 + x^2}{ax} = +\infty$$

Dès lors, le graphique de f présente une asymptote verticale $x = 0$.

Pour examiner l'existence d'une éventuelle asymptote horizontale, on calcule

$$\lim_{x \to +\infty} \ln \frac{a^2 + x^2}{ax} = +\infty \qquad \text{puisque} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{a^2 + x^2}{ax} = +\infty$$

Il n'y a donc pas d'asymptote horizontale.

Pour identifier une éventuelle asymptote oblique, on évalue

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln \dfrac{a^2+x^2}{ax}}{x} = \left[\frac{+\infty}{+\infty}\right]$$

qui est indéterminée. On lève l'indétermination en utilisant le théorème de L'Hospital, soit

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\left[\ln \dfrac{a^2+x^2}{ax}\right]'}{[x]'} = \lim_{x\to+\infty} \left[\ln(a^2+x^2)-\ln(ax)\right]' = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2x}{a^2+x^2} - \frac{1}{x}\right] = 0$$

Le résultat étant nul, il n'existe pas d'asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

ii. La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = \left[\ln(a^2+x^2)-\ln(ax)\right]' = \frac{2x}{a^2+x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2-a^2}{x(a^2+x^2)}$$

Le seul point du domaine de définition où f' s'annule est situé en $x=a$. Les variations de f sont décrites par

x	0		a	
x^2-a^2	$-$	$-$	0	$+$
x	0	$+$	$+$	$+$
a^2+x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
f'	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nexists$	$\searrow$	min	$\nearrow$

La fonction étant décroissante à gauche de $x=a$ et croissante à droite, elle présente un minimum local en ce point. On note que

$$f(a) = \ln 2 > 0$$

iii. La dérivée seconde de f est donnée par

$$\begin{aligned} f''(x) = \left(\frac{x^2-a^2}{a^2x+x^3}\right)' &= \frac{2x(a^2x+x^3)-(x^2-a^2)(a^2+3x^2)}{x^2(a^2+x^2)^2} \\ &= \frac{a^4+4a^2x^2-x^4}{x^2(a^2+x^2)^2} \end{aligned}$$

Les zéros de f'' à considérer sont les solutions réelles et positives de l'équation bicarrée

$$x^4-4a^2x^2-a^4=0$$

Posant $z=x^2$, celle-ci peut s'écrire

$$z^2-4a^2z-a^4=0$$

dont les solutions sont

$$z_{1,2} = \frac{4a^2 \pm \sqrt{16a^4+4a^4}}{2} = (2\pm\sqrt{5})a^2$$

Le seul zéro positif de f'' est donc $\sqrt{2+\sqrt{5}}a$.

La concavité du graphe peut être étudiée à partir du signe de f'', soit

x	0		$\sqrt{2+\sqrt{5}}a$	
f''	$\nexists$	$+$	0	$-$
f	$\nexists$	$\smile$	P.I.	$\frown$

La concavité changeant de part et d'autre de $\sqrt{2+\sqrt{5}}a$, la fonction présente un point d'inflexion en ce point. On note que

$$f(\sqrt{2+\sqrt{5}}a) = \ln \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}$$

iv. Sur base des informations recueillies plus haut, on peut dresser le tableau récapitulatif suivant :

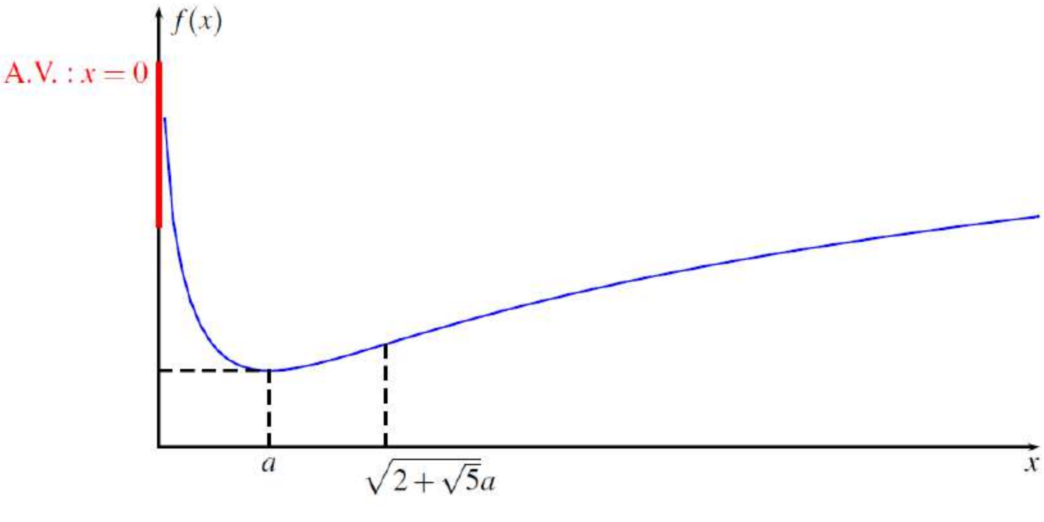
x	0		a		$\sqrt{2+\sqrt{5}}a$		
f'	$\nexists$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	
f''	$\nexists$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$: A.V.		$\ln 2$		$\ln \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}}$		$+\infty$
		$\searrow$	min	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	
		$\smile$	$\smile$	$\smile$	P.I.	$\frown$	

Remarquons que la fonction est toujours positive puisque sa valeur minimale est égale à $\ln 2$. On peut aussi vérifier directement que l'équation

$$\ln \frac{x^2+a^2}{ax} = 0 \qquad \text{soit} \qquad x^2+a^2 = ax$$

ne possède pas de solution réelle (le discriminant, $-3a^2$, est strictement négatif) de sorte que f ne s'annule pas sur son domaine de définition.

On peut donc esquisser le graphe de f de la façon suivante :



EXANA438 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2016.

On considère les intégrales du type $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \ d\theta \qquad n \in \mathbb{N}$

i. Calculez I_0 , I_1 , I_2 et I_3.

ii. Montrez que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

iii. Utilisez les résultats ci-dessus pour calculer

$$I_7 = \int_0^{\pi/2} \sin^7 \theta \ d\theta$$

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

i. **Calcul de I_0 , I_1 , I_2 et I_3.**

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin\theta \ d\theta = [-\cos\theta]_0^{\pi/2} = 0 - (-1) = 1$$

$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \ d\theta &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos 2\theta \ d(2\theta) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}[\sin 2\theta]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(\sin\pi - \sin 0) = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3\theta \ d\theta &= \int_0^{\pi/2} (1-\cos^2\theta)\sin\theta \ d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin\theta \ d\theta - \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \sin\theta \ d\theta \\ &= 1 - \left[-\frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{\pi/2} = 1 - (0 + 1/3) = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

ii. **Relation de récurrence.**

$$\begin{aligned} I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}\theta \ d\theta &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+1}\theta \,.\sin\theta \ d\theta \\ &\quad \text{IPP avec } \begin{cases} f'(\theta) = \sin\theta & \Leftrightarrow \quad f(\theta) = -\cos\theta \\ g(\theta) = \sin^{n+1}\theta & \Leftrightarrow \quad g'(\theta) = (n+1)\sin^n\theta\cos\theta \end{cases} \\ &= [-\sin^{n+1}\theta\cos\theta]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n\theta\cos^2\theta \ d\theta \\ &= (0-0) + \int_0^{\pi/2} (n+1)\sin^n\theta\,(1-\sin^2\theta)\, d\theta \\ &= (n+1)\left(\int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \ d\theta - \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}\theta \ d\theta\right) = (n+1)(I_n - I_{n+2}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n \quad \Leftrightarrow \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

iii. **Calcul de I_7.**

$$I_7 = \frac{6}{7} I_5 = \frac{6}{7}\frac{4}{5} I_3 = \frac{6}{7}\frac{4}{5}\frac{2}{3} = \frac{48}{105}$$

Nous reprenons la solution proposée par l’université : Prof. Vincent DENOEL.
http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2015-07/admission_analyse_ju15.pdf

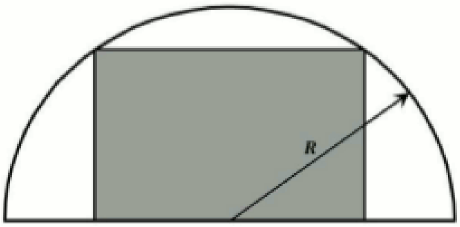
---

21 janvier 2016

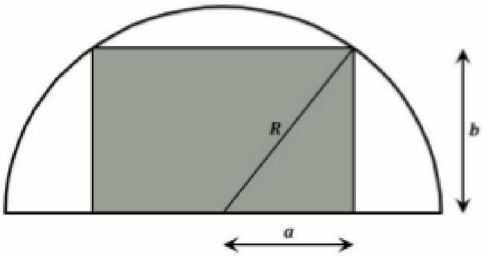
EXANA439 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2016.

On inscrit un rectangle dans un demi-cercle de rayon R en faisant en sorte qu'un côté du rectangle s'appuie sur le diamètre du demi-cercle, comme illustré ci-contre.

Quelle est la fraction maximale de la surface du demi-cercle qui peut être ainsi recouverte ?



Solution proposée par Jan Frans Broeckx



Aire du rectangle :

$$\mathrm{A}(a,b) = 2ab \qquad (a,b > 0)$$

Contrainte :

$$a^2 + b^2 = R^2 \qquad \Rightarrow \qquad b = \sqrt{R^2 - a^2}$$

Fonction objectif :

L'aire du rectangle en fonction de a seulement est

$$\mathrm{A}(a) = 2a\sqrt{R^2 - a^2}$$

Nous choisissons comme fonction objectif *le quart du carré* de l'aire du rectangle :

$$f(a) = a^2(R^2 - a^2) = R^2a^2 - a^4$$

Optimisation :

$$\begin{aligned}
f'(a) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 2R^2a - 4a^3 = 0 \\
&\Rightarrow \quad 2a(R^2 - 2a^2) = 0 \qquad \text{et } a \neq 0 \\
&\Rightarrow \quad 2a^2 = R^2 \qquad \text{et } a > 0 \\
&\Rightarrow \quad a_{\mathrm{opt}} = R/\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Il s'en suit que $b_{\mathrm{opt}} = R/\sqrt{2}$ et que $\mathrm{A}_{\max} = R^2$.

Réponse :

La fraction maximale de la surface du demi-cercle qui peut être recouverte par le rectangle inscrit est

$$\frac{\mathrm{A}_{\max}}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{2}{\pi} = 63{,}66\%$$

21 janvier 2016