Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 44

EXANA440 – EXANA449

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Novembre 2016

EXANA440 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

1. Calculer la limite suivante pour $a;\ b > 0$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}$$

2. Considérons la fonction

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

Donner le domaine de définition de f et démontrer que f est impaire.

3. Soient $a > 0$ et $f\ :\ [0;\ a] \to \mathbb{R}$ continue telle que pour tout $x \in [0;\ a]$,

$$\begin{cases} f'(x)\neq -1 \\ f(x)\,f(a-x)=1 \end{cases}$$

Calculer

$$\int_0^a \frac{1}{1+f(x)}\,dx$$

Indication : utiliser le changement de variable $y=a-x$

Solution proposée par Nicole Berckmans

1. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]\xrightarrow{Hospital}\lim_{x\to 0}\frac{a^x\ln a-b^x\ln b}{1}=\ln\frac{a}{b}$

2. Domaine de $f=\mathbb{R}$ car $\forall x\quad 0<x+\sqrt{1+x^2}$

f est impaire car $f(x)+f(-x)=\ln\left[\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]=\ln 1=0$

3. $I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\,dx$ On pose $y=a-x\Rightarrow\begin{cases}\text{si } x=0\Rightarrow y=a\\ \text{si } x=a\Rightarrow y=0\\ dy=-dx\end{cases}$

$$\Rightarrow I=-\int_a^0\frac{1}{1+f(a-y)}\,dy=-\int_a^0\frac{1}{1+\frac{1}{f(y)}}\,dy=-\int_a^0\frac{f(y)}{1+f(y)}\,dy=\int_0^a\frac{f(y)}{1+f(y)}\,dy$$

Or y est une variable "muette". On peut donc écrire :

$$I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\,dx=\int_0^a\frac{f(x)}{1+f(x)}\,dx=\int_0^a\frac{f(x)+1-1}{1+f(x)}\,dx=\int_0^a 1dx-\underbrace{\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\,dx}_{=I}$$

$$\Rightarrow I=\int_0^a\frac{1}{1+f(x)}\,dx=\frac{1}{2}[x]_0^a=\frac{a}{2}$$

---

15 novembre 2016

EXANA441 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

On définit une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la maniere suivante :

$$F'(x) = \frac{1}{x^2+4} \quad \text{et} \quad F(0) = 0$$

On définit egalement la fonction G par $G(x) = F(x) + F(-x)$.

1. Démontrer que G est dérivable et calculer $G'(x)$.
2. Calculer $G(0)$, en déduire $G(x)$ et en tirer une conclusion sur F et sa courbe représentative.
3. Etudier les variations de F puis construire son tableau de variation.
4. Quel est le signe de $F(x)$ suivant les valeurs de x ?
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de F à l'origine.

Solution proposée par Nicole Berckmans

1. G est la somme de deux fonctions dérivables, donc G est dérivable.

$$G'(x) = F'(x) - F'(-x) = \frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{(-x)^2+4} = 0$$

De plus, on en déduit que $G(x)$ est une fonction constante.

2. $G(0) = F(0) + F(-0) = 0 \Rightarrow G(x) = 0 \Rightarrow F(x) = -F(-x)$

$F(x)$ est donc une fonction impaire. Son graphe admet un centre de symétrie $(0,0)$.

3. $F'(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$; $\quad F''(x) = -\dfrac{2x}{x^2+4}$

x		0	
F'	+	+	+
F''	+	0	−
F	$\nearrow$ $\cup$	PI	$\nearrow$ $\cap$

4. Signe de $F(x)$

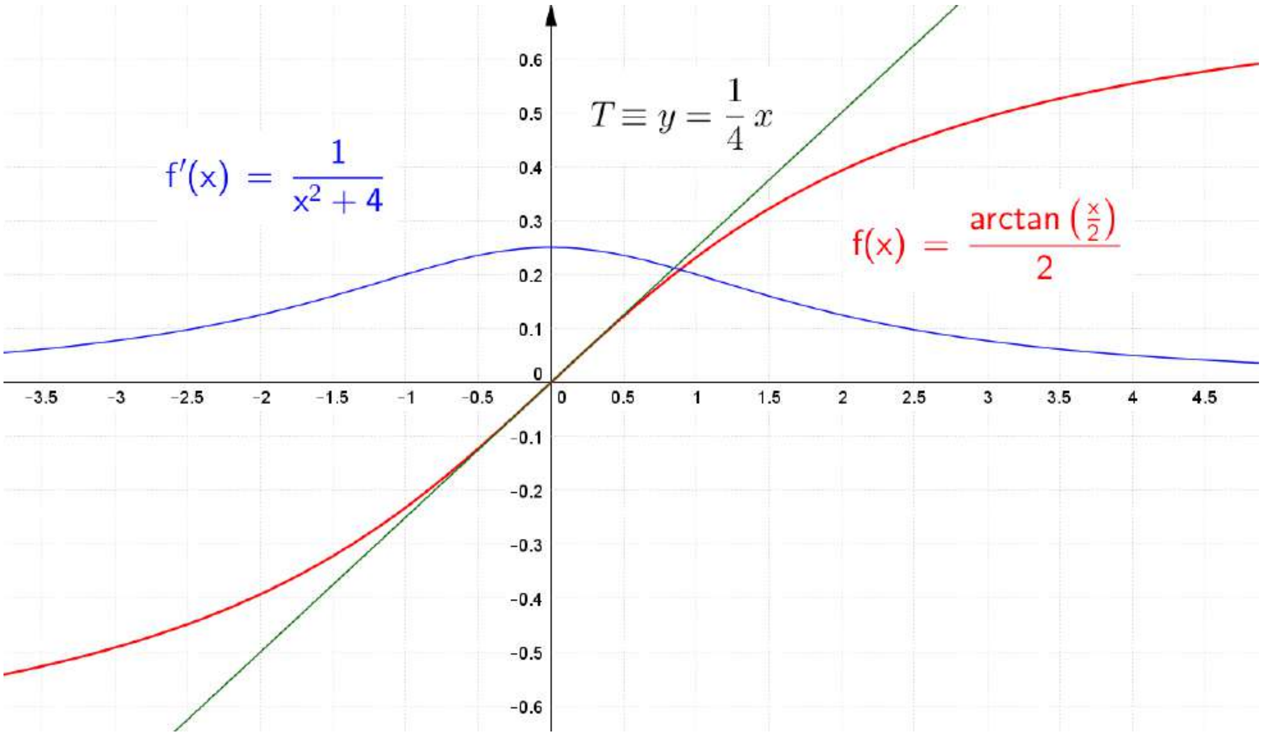
x		0	
$F(x)$	−	0	+

En effet, $F(x)$ est impaire

5. La pente de la tangente est donné par : $F'(x) = \dfrac{1}{4}$

L'équation de la tangente à la courbe en $(0,0)$ est alors : $T \equiv y = \dfrac{1}{4}x$

Remarque : $F(x) = \dfrac{1}{2}\arctan\dfrac{x}{2}$



15 novembre 2016

EXANA442 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Les forces nucléaires d'interaction entre les particules d'un noyau atomique peuvent être caractérisées au moyen du potentiel de Yukawa[1]. Dans cet exercice, nous allons travailler avec une version simplifiée qui permet d'effectuer les calculs analytiquement. Le potentiel (simplifié) de deux particules d'un noyau, séparées d'une distance d est donné par

$$V(d) = \frac{K}{d - d_0} - \frac{4K}{d}$$

ou K et d_0 sont des constantes strictement positives. Le potentiel est défini pour $d > d_0$ car, selon le principe d'exclusion de Pauli[1], deux particules d'un noyau ne peuvent pas se rapprocher trop près l'une de l'autre. La force d'attraction entre ces deux particules, séparés d'une distance d, peut être calculée comme la dérivée du potentiel:

$$F(d) = V'(d).$$

Une force F positive indique une attraction entre les deux particules, tandis qu'une force négative indique une répulsion.

Selon de modèle,

1) A quelle distance l'une de l'autre les deux particules vont-elles se stabiliser ? Prouvez que cette position est effectivement stable, c-a-d que la force est répulsive pour une distance un peu plus petite et attractive pour une distance un peu plus grande.
2) Quelles sont les caractéristiques du point correspondant de la courbe de potentiel $V(d)$?
3) A quelle distance la force d'attraction nucléaire est-elle maximale ?

Donnez tous vos resultats en fonction des constantes K et d_0.

----

[1]Ceci vous est donné à titre informatif. Il n'est bien sûr pas nécessaire de connaître les théories physiques sous-jacentes pour répondre aux questions.

Solution proposée par Nicole Berckmans

1. $V(d)=\dfrac{K}{d-d_0}-\dfrac{4K}{d}$ $\quad\begin{cases} K, d_0 \text{ constantes} > 0 \\ d>0\end{cases}$

$F(d)=\dfrac{dV}{dd}=-\dfrac{K}{(d-d_0)^2}+\dfrac{4K}{d^2}$

$F(d)$ s'annule en $d=2d_0$. A cette distance, les particules vont se stabiliser.

d	d_0		$2d_0$	
$\dfrac{dV}{dd}$		$-$	0	$+$
V	$+\infty$	$\searrow$	min	$\nearrow$

2. En $d=2d_0$, le potentiel $V(d)$ présente un minimum.

3. $\dfrac{dF}{dd}=...=2K\left[\dfrac{1}{(d-d_0)^3}-\dfrac{4}{d^3}\right]$ $\quad$ si $d=2d_0$: $\dfrac{dF(2d_0)}{dd}=2K\dfrac{1}{2d_0^3}>0$

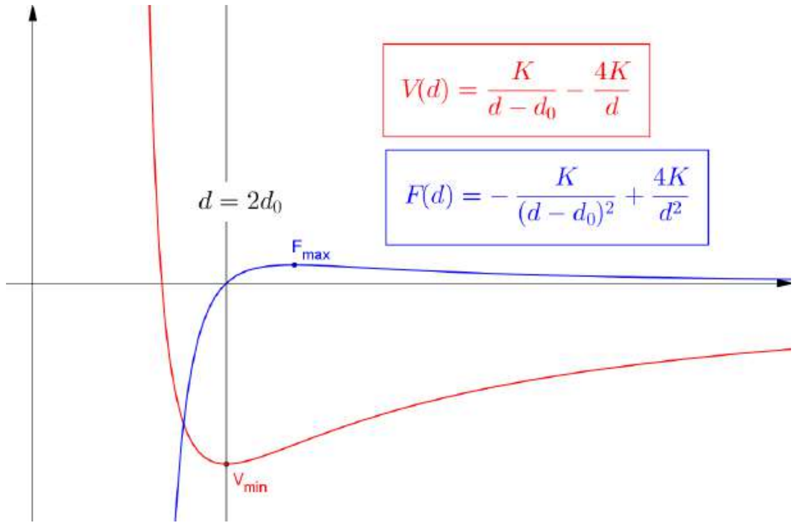
D'autre part : $\dfrac{dF}{dd}=0\Rightarrow\dfrac{1}{(d-d_0)^3}-\dfrac{4}{d^3}=0\Rightarrow\dfrac{d^3-4(d-d_0)^3}{d^3(d-d_0)^3}=0$

Le numérateur est un polynôme de degré 3 admettant une seule racine d^*

$$d^*=\sqrt[3]{4}\left(d^*-d_0\right)\Rightarrow d^*=\frac{\sqrt[3]{4}\,d_0}{\sqrt[3]{4}-1}$$

On peut donc dire que $\dfrac{dF}{dx}$ s'annule en d^* en changeant de signe.

d		$2d_0$		$d^*=\dfrac{\sqrt[3]{4}\,d_0}{\sqrt[3]{4}-1}$	
$\dfrac{dF}{dd}$		$+$	$+$	0	$-$
F	$-$ $\nearrow$	0 $\nearrow$	$+$ $\nearrow$	max	$\searrow$


$V(d) = \frac{K}{d - d_0} - \frac{4K}{d}$
$F(d) = -\frac{K}{(d - d_0)^2} + \frac{4K}{d^2}$
$d = 2d_0$
F_{max}
V_{min}

EXANA443 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 2.

1. Calculer la primitive suivante :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$$

2. Soient $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ R et $g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ telles que pour tout x, y :

   $|f(x)-f(y)| \le |x-y|g(|x-y|)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0.$

   Démontrer que f est constante.

3. Soient f et $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ continues telles que $f(0)=g(1)=0$ et $f(1)=g(0)=1.$

   Démontrer que pour tout $\lambda \ge 0$, il existe $x\in[0,1]$ tel que $f(x)=\lambda g(x)$.

Solution proposée par Nicole Berckmans

1. $I=\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$ On pose $t=\sqrt{e^{2x}-1}$ ou $e^{2x}=t^2+1 \Rightarrow 2e^{2x}dx=2tdt \Rightarrow dx=\frac{t}{t^2+1}dt$

   $I=\int \frac{tdt}{t(t^2+1)}=\int \frac{dt}{t^2+1}=\arctan t+k=\arctan\sqrt{e^{2x}-1}+k$

2. $\forall x,y: |f(x)-f(y)| \le |x-y|g(|x-y|) \Rightarrow \left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le g(|x-y|)$

   $\Rightarrow \lim\limits_{x\to y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \le \lim\limits_{x\to y} g(|x-y|) \Rightarrow |f'(y)| = \lim\limits_{h\to 0^+} g(h)$ avec $h=|x-y|$

   or $\lim\limits_{h\to 0^+} g(h)=0 \Rightarrow |f'(y)|\le 0$ pour toute valeur de $y \Rightarrow f'(y)=0$

   Dès lors f est constante.

3. Remarquons que la relation est vraie pour $\lambda=0$ car $f(0)=0.g(0)$

   Pour $\lambda>0$, posons $h(x)=\lambda g(x)-f(x)$.

   On a $h(0)=\lambda g(0)-f(0)=\lambda>0$ et $h(1)=\lambda g(1)-f(1)=0-1<0$

   En vertu du théorème des valeurs intermédiaires, pour h continue, il existe $c\in[0,1]$

   tel que $h(c)=0$. Donc $\lambda g(c)=f(c)$

EXANA444 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 2.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = x\ln^2 x$$

1. Donner le domaine de définition de f. Etudier les variations de f : on précisera les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrema eventuels (on n'étudiera *pas* la concavité ni les points d'inflexion).
2. Construire la courbe représentative de f.

Solution proposée par Nicole Berckmans

$f(x) = x\ln^2 x$

Domaine : $\mathbb{R}_0^+$

$G_f \cap OX : (1,0)$

Pas d'AV car $\lim\limits_{x\to 0} x\ln^2 x = [0\times\infty] = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2 x}{\frac{1}{x}} = \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{H} \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln x.\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$\xrightarrow{H} -2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim\limits_{x\to 0} x = 0$

Il existe un prolongement continu en $(0,0)$

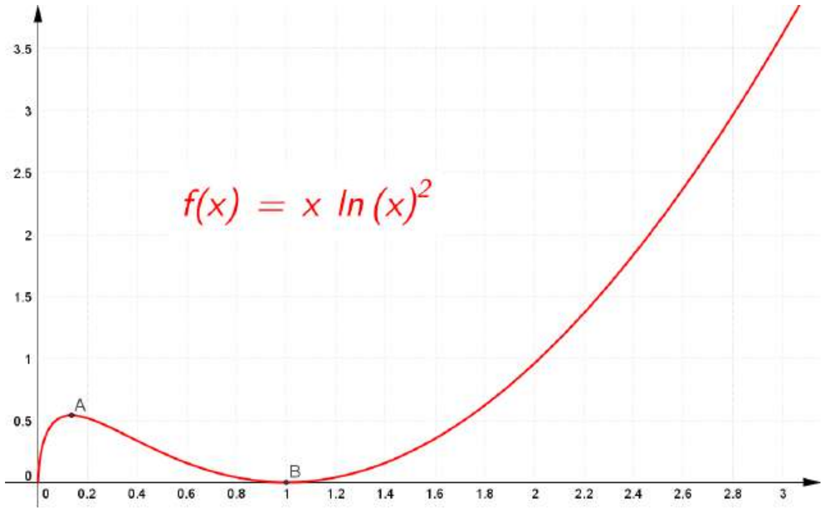
Pas d'AH : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Pas d'AO : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\ln^2 x = +\infty$

$f'(x) = \ln^2 x + 2x\ln x.\dfrac{1}{x} = \ln x(\ln x + 2)$ racines : $x = 1$ et $x = \dfrac{1}{e^2}$

	0		$\frac{1}{e^2}$		1	
f'	/	$+$	0	$-$	0	$+$
f	0	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Avec : $\max\left(\dfrac{1}{e^2},\dfrac{4}{e}\right)$ et $\min(1,0)$



22 novembre 2016

EXANA445 – EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

Dans le plan, on considère la courbe d'équation $x^4+y^4=1$. Déterminez les points de cette courbe les plus proches de l'origine et les points de cette courbe les plus éloignes de l'origine. Votre résultat doit être prouvé mathématiquement. Une intuition ou un dessin ne sont pas suffisants.

Indication 1: La courbe est symétrique, vous pouvez donc l'analyser sur un seul quadrant puis généraliser toutes les solutions.

Indication 2 : Une méthode possible pour arriver à la solution est d'écrire la distance à l'origine comme une fonction d'une seule des 2 variables x ou y.

Solution proposée par Nicole Berckmans

On travaille dans le premier quadrant.

Cherchons les extréma du carré de la distance de l'origine à un point de la courbe.

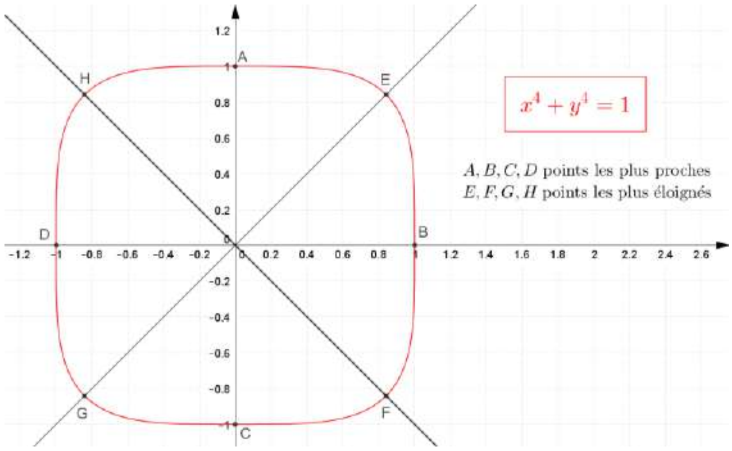
$$f(x)=x^2+y^2=x^2+\sqrt{1-x^4}$$

$$f'(x)=\ldots=\frac{2x\left(\sqrt{1-x^4}-x^2\right)}{\sqrt{1-x^4}}$$ s'annule en $x=0$ et $x=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$		1
f'	0	$+$	0	$-$	1
f	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\searrow$	1

Les points les plus proches sont $(\pm 1,0)$ et $(0,\pm 1)$

Les points les plus éloignés sont $\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};\pm\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$



EXANA446 EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

1. Calculer la primitive suivante $\left(\text{sur } \mathbb{R}^+\right)$

$$\int x\frac{x-1}{x+1}dx$$

2. Démontrer que l'équation

$$2x-5e^{-x}\left(1+x^2\right)=0$$

n'admet qu'une solution située dans l'intervalle $\left]0,2\right[$

3. Soit f une fonction dérivables sur $\mathbb{R}^+$, telle que $f(x)\geq x$ pour tout $x>0$ et telle que $f(0)=0$. Démontrer que $f'(0)\geq 1$.

Solution proposée par Nicole Berckmans

1. Notons : $\dfrac{x^2-x}{x+1}=x-2+\dfrac{2}{x-1}$

Donc : $\displaystyle\int x\frac{x-1}{x+1}dx=\int x-2+\frac{2}{x+1}dx=\frac{1}{2}x^2-2x+2\ln|x+1|+k$

2. $f(x)=2x-5e^{-x}\left(1+x^2\right)$ est continue sur $[0,2]$

$f(0)=-5$ et $f(2)=4-\dfrac{25}{e^2}>0$ car $5^2<(2e)^2$

En vertu du théorème des valeurs intermédiaires on peut dire sue f s'annule su $]0,2[$

Elle n'admet qu'une solution car sur cet intervalle f est strictement corissante.

En effet : $f'(x)=2+5e^{-x}(x-1)^2>2>0$

3. $\displaystyle f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\geq\lim_{x\to0}\frac{x}{x}=1$

EXANA447- EPL, UCL, LLN, septembre 2016.

On considere la fonction f définie par

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1}e^{\frac{1}{x}}$$

1. Donner le domaine de définition de f. Etudier les variations de f : on précisera les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrema éventuels (on n'etudiera *pas* la concavité ni les points d'inflexion).
2. Construire la courbe représentative de f.

Solution proposée par Nicole Berckmans

Domaine de $f=\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

$$\lim_{x\to1} f(x)=\left[\frac{e}{0}\right]\nexists \text{ car } \lim_{x\to1^+} f(x)=\left[\frac{e}{0^+}\right]=+\infty \text{ et } \lim_{x\to1^-} f(x)=\left[\frac{e}{0^-}\right]=-\infty$$

$\Rightarrow AV\equiv x=1$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\left[\frac{0\times e^{\frac{1}{0}}}{-1}\right]=\left[\frac{0\times e^{+\infty}}{-1}\right]=[0\times\infty]=-\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x^2}}=-\frac{\infty}{\infty}$$

$$\xrightarrow{H}-\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{-2}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}\xrightarrow{H}-\frac{1}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=-\infty$$

$\Rightarrow AV\equiv x=0$ à droite.

$$\lim_{x\to0^-} f(x)=\left[\frac{0}{-1}e^{\frac{1}{0^-}}\right]=\frac{0\times0}{-1}=0$$ prolongement continu en $x=0$ par la gauche.

pas d'AH car $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\times e^{\frac{1}{\infty}}=+\infty\times e^0=+\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\times e^{\frac{1}{\infty}}=-\infty\times e^0=-\infty$

On sait que $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\lim_{x\to\infty} x$

$AO \equiv y = x + 2$ car

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1} e^{\frac{1}{x}} = \left[1.e^{\frac{1}{\infty}}\right] = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2}{x-1} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x-1}}_{=1}$$

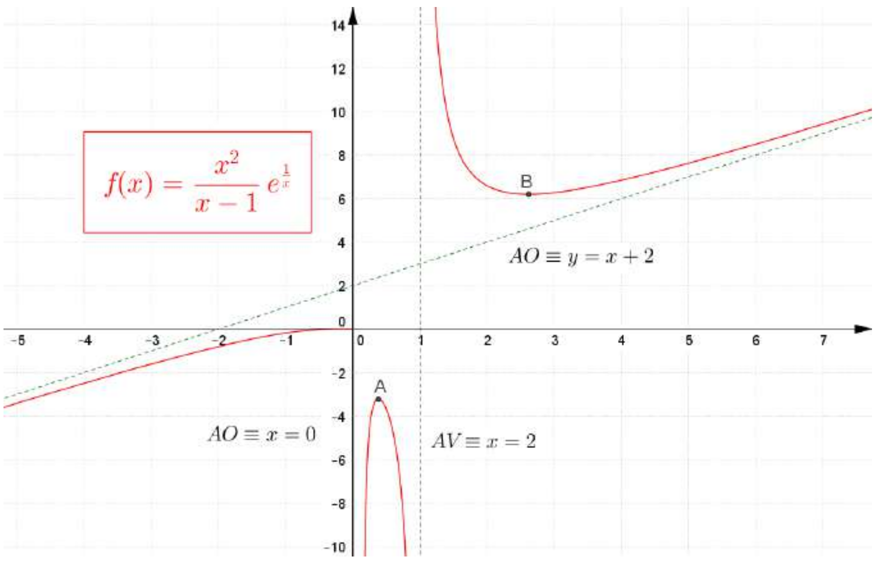
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{x-1}{x^2}} + 1 = \left[\frac{0}{0}\right] + 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}} + 1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1 - \frac{2}{x}} + 1 = \frac{e^{\frac{1}{\infty}}}{1-0} + 1 = 1 + 1 = 2$$

Idem en $-\infty$

$$f'(x) = \ldots = \frac{x^2 - 3x + 1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x}}$$

TS :

x		0		$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$		1		$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	
f'	$+$	$0 \mid -\infty$	$+$	0	$-$	$\mid$	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	$0 \mid AV$	$\nearrow$	max	$\searrow$	AV	$\searrow$	min	$\nearrow$



EXANA448 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2016.

Un ingénieur construit une piscine rectangulaire de $L = 30$ m de long et de $l = 15$ m de large. Pour le fond de la piscine, ilveut une faible pente au départ, qui s′accentue vers le milieu et redevient plus faible au bout de la piscine. Il a dès lors choisi de suivre une fonction mathématique précise de sorte que la profondeur de la piscine en fonction de la position (dans le sens de la longueur, voir Fig.I) peut être écrite comme

$$p(x) = A\arctan\left[\frac{4}{15}(x-15)\right] + H$$

pour $0 \le x \le L$. La profondeur ne dépend pas de la position dans le sens de la largeur, elle ne dépend donc pas de y (voir Fig. I). Pour choisir les valeurs des constantes A et H, il fixe la profondeur minimale a 1 m 20 cm et la profondeur maximale à 2 m.

IMPORTANT : Pour toutes les questions ci-dessous, il ne faut pas donner les valeurs numeriques, mais seulement fournir les expressions mathématiques des valeurs demandées. Pour simplifier ces expressions, vous pouvez utiliser la notation suivante :

$$\gamma = \arctan(4)$$

1. Prouvez que la surface du fond de la piscine admet comme centre de symétrie le (fond du) centre de la piscine (point C sur la figure).
2. Trouvez les expressions mathématiques des constantes A et H, exprimées en mètres, satisfaisant aux contraintes énoncées ci-dessus.
3. Donnez l'expression de la pente maximale du fond de la piscine, exprimée en %.
4. Donnez l'expression mathématique du volume d'eau de la piscine [en m^3].

Expliquez soigneusement vos développements et vos raisonnements.

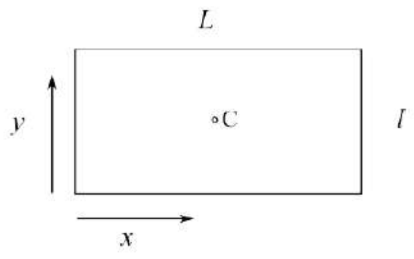
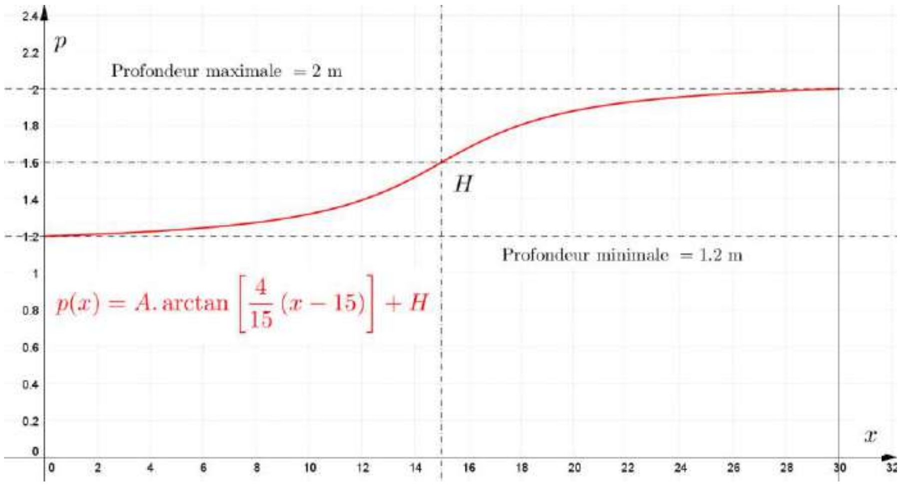


Fig. I : Schéma de la piscine.

Solution proposée par Nicole Berckmans

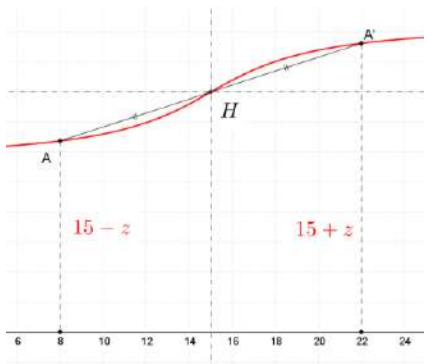


(1) La fonction arctan est une fonction impaire et donc $(0,0)$ est un centre de symétrie.

Cette fonction a été translatée suivant le vecteur $\overrightarrow{(15,H)}$.

Une autre manière de démontrer que $(15,H)$ est un centre de symétrie est de prouver que

$$\forall z: \frac{p(15-z)+p(15+z)}{2} = H$$



(2) $\begin{cases} p(0) = A.\arctan(-4) + H = -A\gamma + H = 1.2 \\ p(30) = A.\arctan(4) + H = A\gamma + H = 2 \end{cases}$

$\Rightarrow H = 1.6$ m et $A = \dfrac{0.4}{\gamma}$

(3) La pente maximale se trouve en $x = 15$ (point d'inflexion)

$$p'(x) = \frac{A}{1+\left[\frac{4}{15}(x-15)\right]^2}.\frac{4}{15} \Rightarrow p'(15) = A.\frac{4}{15} = \frac{0.4}{\gamma}.\frac{4}{15} = \frac{160}{15\gamma}\%$$

(4) Volume $= 15\int_0^{30} p(x)\,dx \quad (\mathrm{m}^3)$

EXANA449 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}1+2e^{\frac{1}{\ln|x|}} & \text{si} \quad x\neq 0, x\neq 1, x\neq -1;\\ 3 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$

a) La fonction f est-elle continue en $x=0$? Justifier votre réponse.

b) La fonction f est-elle dérivable à droite en $x=0$? Justifier votre réponse en utilisant la définition de la dérivée à droite de f en $x=0$.

c) Calculer la limite à gauche et la limite à droite de f en 1.

d) Déterminer les éventuelles asymptotes de f.

e) Calculer $f'(x)$

f) Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphique de f au point d'abscisse e.

g) Après avoir étudié le signe de $f'(x)$, tracer le graphique de f en utilisant les résultats précédents (on pourra éventuellement utiliser l'approximation $e^x \simeq 1+x+\frac{1}{2}x^2$).

Solution proposée par Jacques Collot

(a) Une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\to f(x)$ est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Ici : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+2e^{\frac{1}{\ln|x|}}\right)=1+2e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}}=1+2e^0=3$

Remarquons que la fonction f est paire. On a donc sans calcul $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=3$

En résumé, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=3.$ f est donc continue en $x=0$.

$$(b)\ f'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2e^{\frac{1}{\ln x}}-3}{x}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\frac{1}{\ln x}}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\xrightarrow{Hospital} f'(0)=2\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}}.\left(-\frac{1}{\ln^2 x}\right).\frac{1}{x}=-2\overbrace{\lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{\ln x}}}^{=1}.\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\ln^2 x}$$

$$\xrightarrow{Hos} f'(0)=-2\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{2\ln x.\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}\xrightarrow{Hos}\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=-\infty$$

Conclusion : f n'est pas dérivable à droite en $x=0$

Rappel : si une fonction est dérivable en a, alors elle est continue en a, mais la réciproque n'est pas vraie.

$$(c)\ \lim_{x\to 1^+}\left(1+2e^{\frac{1}{\ln x}}\right)=1+2e^{+\infty}=\infty; \qquad \lim_{x\to 1^-}\left(1+2e^{\frac{1}{\ln x}}\right)=1+2e^{-\infty}=1$$

(d) En vertu de (c), il y a 2 AV: $\begin{cases} AV_{1,G}\equiv x=-1\\ AV_{2,D}\equiv x=1\end{cases}$

<u>AH</u> $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+2e^{\frac{1}{\ln x}}\right)=1+2e^0=3\Rightarrow AH\equiv y=3$

$$(e)\ f'(x)=\left(1+2e^{\frac{1}{\ln|x|}}\right)'=2e^{\frac{1}{\ln|x|}}\left(-\frac{1}{\ln^2|x|}\right).\frac{1}{|x|}.\frac{x}{|x|}=-2\frac{e^{\frac{1}{\ln|x|}}}{|x|\ln^2|x|}.\frac{x}{|x|}$$

Rappel : $(|x|)'=\left(\sqrt{x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x^2}}.2x=\frac{x}{|x|}$

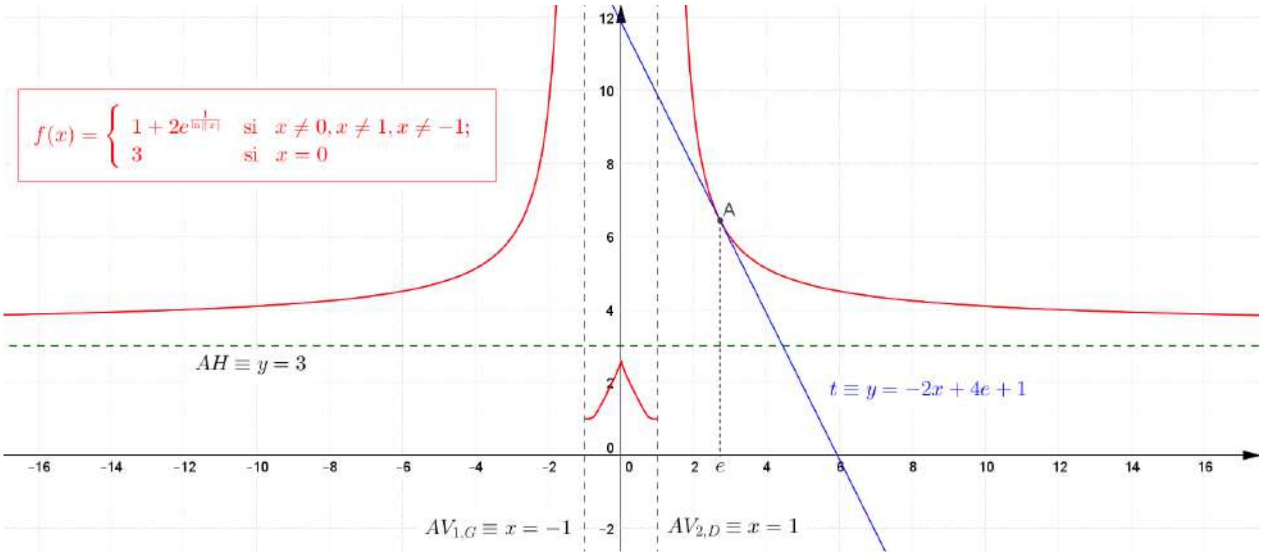
(f) $f(e)=1+2e,\quad f'(e)=-2\Rightarrow t\equiv y-(1+2e)=-2(x-e)\Rightarrow t\equiv y=-2x+4e+1$

(g) $f'(x)$ est toujours positif si $x<0$ $(x\neq -1)$, et est toujours négatif si $x>0$ $(x\neq 1)$

Remarquons que : $\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=0$. On a donc une demi-tangente horizontale à gauche en $x=1$ et à droite en $x=-1$.

<u>Tableau récapitulatif</u>

x	$-\infty$		-1		0		$+1$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$+\infty\|0$	$+$	$+\infty\|-\infty$	$-$	$0\|-\infty$	$-$	
$f(x)$	$+3$	$\nearrow$	$+\infty\|1$	$\nearrow$	$+3$	$\searrow$	$1\|+\infty$	$\searrow$	$+3$



21 janvier 2017. Modifié le 22 juin 2017 (Ionut Finta). Modifié le 24 avril 2018 (Paul Leblanc)