Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 46

EXANA460 – EXANA469

http://matheux.ovh

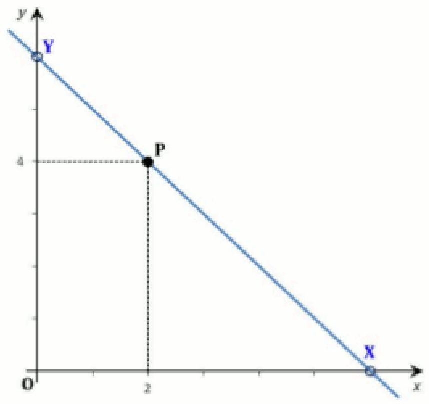
Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Septembre 2017

EXANA460 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2017.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes x et y, on considère le point P(2,4). Déterminer l'équation de la droite de coefficient angulaire négatif et passant par P qui délimite avec les axes x et y une surface d'aire minimale.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx



Equation de la droite passant par P :

$$d \equiv y - 4 = -a(x - 2) \quad (a \in \mathbb{R}_0^+)$$

Aire du triangle OXY :

$$d \cap Ox : \quad x_X = \frac{4}{a} + 2 \quad y_X = 0$$

$$d \cap Oy : \quad x_Y = 0 \quad y_Y = 2a + 4$$

$$\mathrm{A}(a) = \frac{1}{2}\,\overline{\mathrm{OX}}\,\overline{\mathrm{OY}} = \left(\frac{4}{a} + 2\right)(a + 2)$$

$$\mathrm{A}(a) = 2\left(a + 4 + \frac{4}{a}\right)$$

Optimisation :

$$\mathrm{A}'(a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(a + 4 + \frac{4}{a}\right)' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{4}{a^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow \quad a_{\mathrm{opt}} = 2$$

Réponse :

L'équation de la droite passant par P pour laquelle l'aire du triangle OXY est minimale est

$$d \equiv y - 4 = -2(x - 2)$$

ou encore

$$\boxed{d \equiv y = -2x + 8}$$

L'aire minimale correspondante est de $\mathrm{A}_{\mathrm{min}} = 16$ UA.

---

6 septembre 2017

EXANA461 – EPB, UCL, LLN, juillet 2017 série1.

1. La fonction

$$f(x)=\frac{e^{\frac{1}{x}}+1}{e^{\frac{1}{x}}-1}$$

est-t-elle paire ou impaire? Justifier.

2. Démontrer que $1+x\le e^x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$

3. trouvez toutes les fonctions dérivables $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ telles que

$$\int_0^x f(t)\,dt=\left(f(x)\right)^2$$

pour tout $x\ge 0$.

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) Cette fonction est impaire car

$$f(-x)=\frac{e^{-\frac{1}{x}}+1}{e^{-\frac{1}{x}}-1}\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}=-f(x)$$

2) La tangente à la courbe $y=e^x$ au point $(0,1)$ est la droite $y=1+x$. De plus la concavité de cette courbe est tournée vers le haut $f''(x)=e^x>0$. Dès lors, la tangente est située sous la courbe et donc $1+x\le e^x$ (Fig 1)

Une autre manière de démontrer cette inégalité serait d'étudier la fonction

$f(x)=e^x-1-x\Rightarrow f'(x)=e^x-1\Rightarrow f''(x)=e^x$

x		0	
f'	$-$	0	$+$
f''	$+$	$+$	$+$
f	$\searrow$ $\cup$	$\min(0,0)$	$\nearrow$ $\cup$

Et de remarquer que $\forall x: f(x)\ge 0$ (Fig 2)

3) Dérivons les 2 membres de cette équation par x.

On obtient : $f(x)=2f(x).f'(x)$

1er cas $f(x)=0 \quad \forall x$

2ème cas $f'(x)=\frac{1}{2}\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}x+k$

Vérifions

$$\int_0^x \frac{1}{2}t+k\,dt=\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}+kx\overset{?}{=}\left(\frac{1}{2}x+k\right)^2=\frac{x^2}{4}+kx+k^2$$

Expression qui est vraie si $k=0$

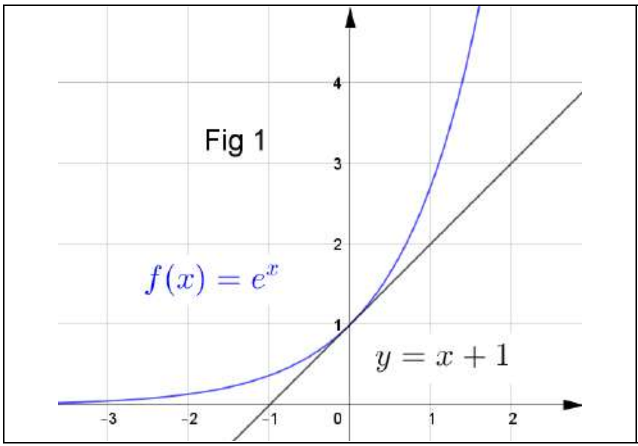
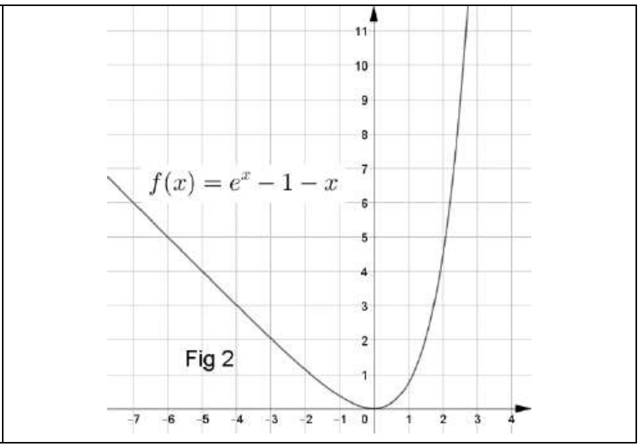


Fig 1
$f(x) = e^x$
$y = x + 1$



$f(x) = e^x - 1 - x$
Fig 2

EXANA462 – EPB, UCL, LLN, juillet 2017 série1.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$$

1. Donner le domaine de définition de f. Etudier les variations de f : on précisera les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrema éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion).
2. Construire la courbe représentative de f.

Solution proposée par Nicole Berckmans

Domaine de f : $\mathbb{R}_0$

De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \left[e^{-\frac{1}{0^+}} \right] = e^{-\infty} = 0$

f admet donc un prolongement continu en $x = 0$

Asymptote horizontale

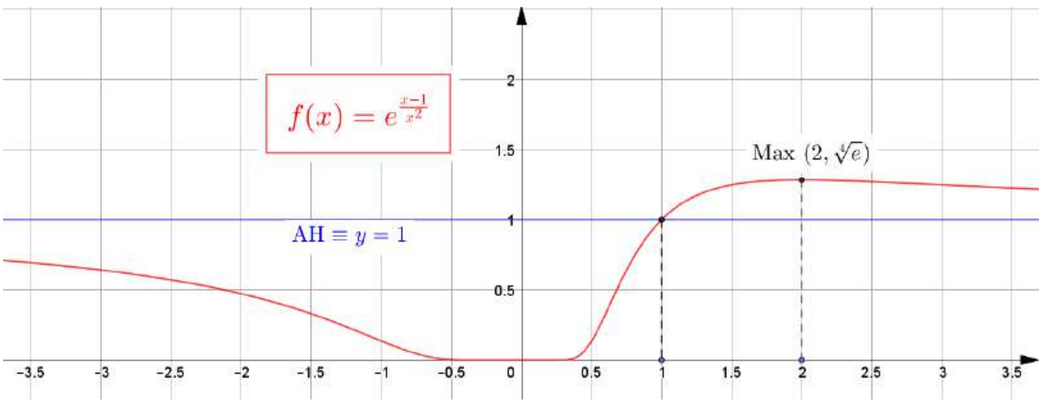
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \left[e^{\frac{\infty}{\infty}} \right] = \left[e^{\frac{1}{\infty}} \right] = e^0 = 1 \Rightarrow AH \equiv y = 1$$

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = e^0 = 1$

$$f'(x) = \left(e^{\frac{x-1}{x^2}} \right)' = \ldots = e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{2-x}{x} \right)$$

D'où le tableau de variations

x		0		2	
f'	$-$	$[0]$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$[Min]$	$\nearrow$	$Max(2, \sqrt[4]{e}$	$\searrow$



Le 15 septembre 2017

EXANA463 – EPB, UCL, LLN, juillet 2017 série1.

Un radar est positionné sur le bord d'une route et mesure la vitesse des voitures. le radar fonctionne par *effet Doppler* et mesure donc, en réalité, la composante de leur vitesse en *direction du radar lui – même* et non pas le long de la route. Celle-ci peut être obtenue en calculant la variation de distance entre le véhicule et le radar. Dans cette question, on va étudier la mesure que le radar effectue e, fonction du temps pour une voiture roulant à une vitesse constante de 108 km/h (soit 30 m/s) le long de la route. On approxime la voiture et le radar par des points, et la route par une droite. On suppose que le radar et situé sur le bord de la route, à une distance de 5 m de celle-ci. On prend comme point de référence $(x=0)$ le point de projection du radar sur la route (voir schéma), et comme référence de temps $(t=0)$, le moment où la voiture passe à ce même point. La position de la voiture dans ce repère est donnée (en mètres), en fonction du temps t (en secondes), par

$$x(t) = -30t$$

1. Calculez la distance entre la voiture et le radar en fonction du temps.
2. Calculez la vitesse mesurée par le radar[1] en fonction du temps.
3. Montrez que cette vitesse (calculée au point précédent) est strictement croissante en fonction de temps.
4. En pratique, le radar ne s'intéresse qu'à la valeur absolue de cette vitesse. Quelle est la vitesse maximale mesurée (en valeur absolue), et à quelle position est-elle obtenue?
5. Quelle est la vitesse minimale mesurée (en valeur absolue), et à quelle position est-elle obtenue?
6. S'il voulait un radar de haute précision, connaisant la configuration des lieux (position du radar par rapport à la route), et en supposant que le radar est aussi capable d'évaluer la distance qui le sépare du véhicules observé, il serait possible de trouver une formule de correction pour retrouver la formule réelle de la voiture, quelle que soit cette vitess. Proposez une telle formule.

----

[1] Celle-ci peut être positive ou négative suivant que la voiture s'éloigne ou s'approche du radar.

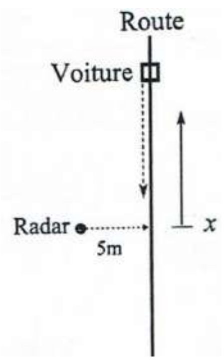
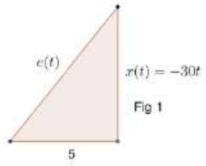


Fig : Schéma de la situation

Solution proposée par Nicole Berckmans



1) $e(t)=\sqrt{25+900t^2}$ (Voir Fig 1)

2) $\dfrac{de(t)}{dt}=\dfrac{900t}{\sqrt{25+900t^2}}$ m/s

3) $\dfrac{d^2e(t)}{dt^2}=\ldots=\dfrac{25\times 900}{\left(25+900t^2\right)\sqrt{25+900t^2}}>0$

Puisque celle-ci est strictement positive, on en déduit que $\dfrac{de(t)}{dt}$ est croissante.

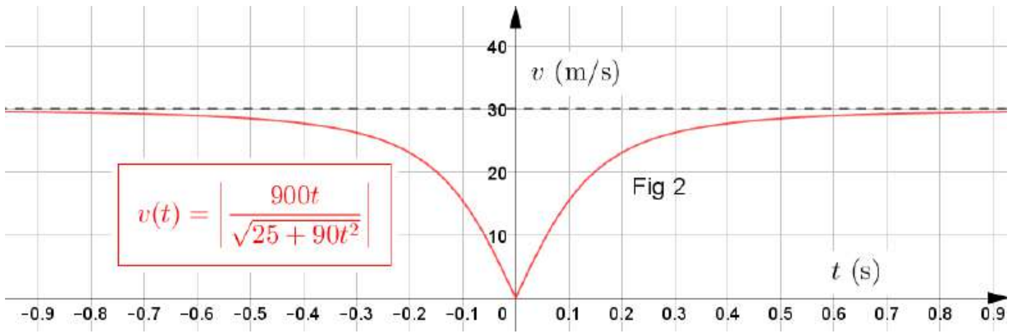
4) $v(t)=\left|\dfrac{900t}{\sqrt{25+900t^2}}\right|$ (Voir Fig 2)

$\lim\limits_{x\to\infty}\left|\dfrac{900t}{\sqrt{25+900t^2}}\right|=\dfrac{900t}{\sqrt{900}.t}=30$ m/s qui est obtenu à l'infini.

5) En $t=0, v(t)=0$ est la vitesse minimale.

6) $e(t)=\sqrt{25+x^2}$, $x=\sqrt{e(t)^2-25}$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx}{de}\cdot\dfrac{de(t)}{dt}=\pm\dfrac{e(t)}{\sqrt{e(t)^2-25}}\cdot\dfrac{de(t)}{dt}$



Le 15 septembre 2017

EXANA464 – EPB, UCL, LLN, juillet 2017 série2.

1. Calculer l'intégrale impropre suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$$

2. Soit f une fonction continue défnie sur $\mathbb{R}$. On pose, pour $x \neq 0$

$$g(x) = \frac{1}{x^2}\int_0^x t\ f(t)\,dt$$

Calculer $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

3. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = 1 + x + x^3 + e^x$$

Démontrer que f est bijective et calculer le nombre dérivé $\left(f^{-1}\right)'(2)$

Solution proposée par Nicole Berckmans

1. $e^{-|x|}$ est une fonction paire.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2\left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 2$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \left[\frac{0}{0}\right] \xrightarrow{Hospital} \lim\limits_{x\to 0} \frac{xf(x)}{2x} = \frac{f(0)}{2}$

3. $f'(x) = 1 + 3x^2 + e^x > 0$ donc f est strictement croisante sur $\mathbb{R}$, et dès lors f est bijective.

Puisque $f(0) = 2 \Rightarrow f^{-1}(2) = 0$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}\right)'(2) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(2)\right)} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

Le 15 septembre 2017

EXANA465 – EPB, UCL, LLN, juillet 2017 série2.

On considère la fonction f définie par

$$f(x)=e^{-x}\sin x$$

1. Donner le domaine de définition de f. Etudier les variations de f : on précisera les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extrema éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points 'inflexion).
2. Construire la courbe représentative de f.

Solution proposée par Nicole Berckmans

$-$ Dom $f=\mathbb{R}$

$$-\lim_{x\to-\infty} f=\left[e^{+\infty}.\nexists\right]= \text{ n'existe pas.}$$

$$-\lim_{x\to+\infty} f=\left[e^{-\infty}.\nexists\right]=0.\left[-1,+1\right]=0$$

Par le théorème du sandwich, on a, en effet :

$$\lim_{x\to+\infty}-e^{-x}\le\lim_{x\to+\infty}e^{-x}.\sin x\le\lim_{x\to+\infty}e^{-x}$$

$$\Rightarrow 0\le\lim_{x\to+\infty}e^{-x}.\sin x\le 0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}e^{-x}.\sin x=0$$

$-$Il y a une AH pour $x\to+\infty$, et pas de AH pour $x\to-\infty$

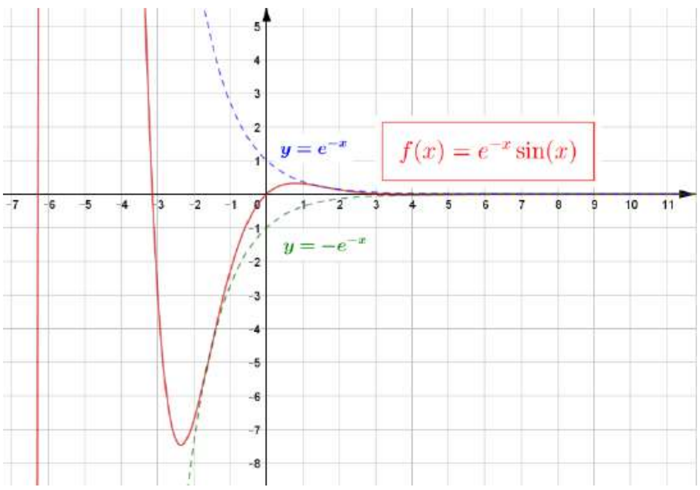
$-$ Racines : $x=k\pi$

$-$ $f'(x)=e^{-x}(\cos x-\sin x)$

Racine : $\tan x=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

$-$ Max en $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$ Max $=e^{-\frac{\pi}{4}-2k\pi}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$-$ Min en $x=\dfrac{5\pi}{4}+2k\pi$ Min $=e^{-\frac{5\pi}{4}-2k\pi}.\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$



Le 15 septembre 2017

EXANA466- EPB, UCL, LLN, juillet 2017 série2.

Un client demande à une entreprise de matériaux, de créer une plaque de forme quasi-rectangulaire, mais dont un côté suit une forme sinusoïdale, de période 40 cm et de hauteur 20 cm (entre le point le plus haut et le poinst le plus bas). La plaque doit faire 1 m de hauteur (mesurée par rapport au milieu de la sinusoïde). La forme de cette plaque est représentée schématiquement à la figure ci-dessous. En outre le client demande de choisir la largeur L de la plaque de façon à obtenir une surface égale à 4.2 m^2.

Pour réaliser cette plaque, l'entreprise utilise des plaques rectangulaires de 1.5 m de haut et les coupe à l'aide d'une scie actionnée par un robot. La plaque est déplacée progressivement à une vitesse constante de 5 cm/s (de la droite vers la gauche), et la scie effectue uniquement des déplacement verticaux bien choisis de façon à obtenir la forme désirée.

1. Ecrivez la fonction décrivant la position de la scie en fonction du temps, mesuré par rapport au bas de la plaque. On suppose que le début de la coupe correspond à l'instant $t = 0$ et que la scie commence toujours sa coupe à 1 cm du bas de la plaque[1].
2. Quelle est la vitesse de déplacement maximale de la scie?
3. Ecrivez la fonction décrivant la surface de la plaque en fonction de sa largeur L.
4. Trouvez une approximation de la largeur désirée L à 0.5 cm près. En d'autres mots, forunissez un intervalle de largeur maximale 1 cm à l'intérieur duquel vous pouvez prouver que la largeur désirée se trouve.

----

[1] Pour cette question, il n'est pas nécessaire de déterminer à quel moment la scie doit s'arrêter.

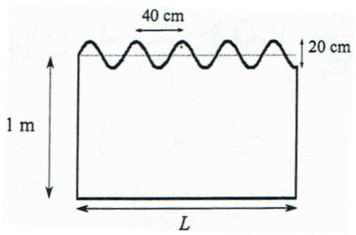


Fig 1 : Géométrie de la plaque (les proportions ne sont pas nécessairement respectées).

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) $y(x)=100+10\sin\frac{\pi x}{20},\quad \frac{dx}{dt}=5 \text{ cm/s}$

$y(t)=100+10\sin\frac{\pi t}{4}$

2) $\frac{dy}{dt}=\frac{10\pi}{4}\cos\frac{\pi t}{4}=\frac{5\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{4}$ Vitesse maximum $=\frac{5\pi}{2}$ cm/s

3) $S(L)=\int_0^L\left(100+10\sin\frac{\pi}{20}x\right)=\left[100x-\frac{200}{\pi}\cos\frac{\pi x}{20}\right]_0^L=100L-\frac{200}{\pi}\cos\frac{\pi L}{20}+\frac{200}{\pi}$

4) $S(L)=42000=100L-\frac{200}{\pi}\cos\frac{\pi L}{20}+\frac{200}{\pi}$

$L=420+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi L}{20}\right)-\frac{2}{\pi}$

Min $\simeq 418.73$, Max $\simeq 420$. $L\in[418.5;419.5]$

Le 15 septembre 2017

EXANA467- EPB, UCL, LLN, septembre 2017.

1. Calculer

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$$
$$\lim_{x\to 0} x\ln x$$

2. Etant donné une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, on s'intéresse à sa valeur absolue $|\ f\ |:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\to|\ f(x)\ |$. Supposons que f soit dérivable en un certain point x_0. Peut-on affirmer que $|\ f\ |$ est dérivable en x_0 ? Justifier.

3. Pour quelle(s) valeur(s) de n (entier naturel), l'intégrale

$$\mathrm{I}=\int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{x^4+a^4}}\,dx$$

est-elle indépendante de a $(a>0)$.

Indication : Utiliser le changement de variable $x=at$

Solution proposée par Nicole Berckmans

1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\left[\frac{\nexists}{\infty}\right]=0$ en vertu du théorème de l'étau : $\displaystyle -\frac{1}{x}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{1}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\pm\frac{1}{x}=0$

$$\lim_{x\to 0} x\ln x=[0\times\infty]=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\xrightarrow{H}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}-x=0$$

2) Si f est dérivable en $x=x_0$, on ne peut pas affirmer que $|f|$ est dérivable en $x=x_0$.

Exemple : $f(x)=x$ est dérivable en $x=0$ et $|x|$ est non dérivable en $x=0$.

3) $\displaystyle\int_0^a \frac{x^n}{\sqrt{x^4+a^4}}\,dx \qquad x=at\Rightarrow dx=a\,dt$

$$\Rightarrow\int_0^1\frac{a^{n+1}t^n}{\sqrt{a^4\left(t^4+1\right)}}\,dt=a^{n-1}\int_0^1\frac{t^n}{\sqrt{t^4+1}}\,dt$$

La fonction $\dfrac{t^n}{\sqrt{t^4+1}}$ est strictement positive sur $[0,1]$. Dès lors, son intégration sur $[0,1]$ est strictement positive (dès lors non nulle).

Finalement, il faut donc $n=1$ car alors $a^{n-1}=a^0=1$ qui est indépendant de a.

Le 15 septembre 2017

EXANA468 – EPB, UCL, LLN, septembre 2017.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = e^{-x} \cos x$$

a) Etudier les variation de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$: on précisera les éventuelles asymptotes, les domaines de croissance et de décroissance et les extréma éventuels (on n'étudiera pas la concavité ni les points d'inflexion). Ensuite, tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de f sur cet intervalle

b) Trouver deux réels a et b tels que la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = (a \cos x + b \sin x)\, e^{-x}$$

soit une primitive de f.

c) Calculer l'aire délimitée par $\mathscr{C}$, les droites d'équations $x = -\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$ et l'axe des abscisses.

Solution proposée par Nicole Berckmans

a) Pas d'asymptotes. $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0,\;\; f(0) = 1$

$$f'(x) = -e^{-x}(\cos x + \sin x)$$

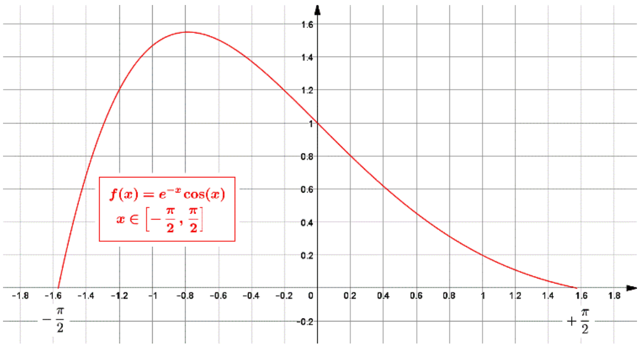
x	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	Max $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{\pi}{4}}\right)$	$\searrow$	0

b) $F'(x) = (-a \sin x + b \cos x - a \cos x - b \sin x)e^{-x}$

$$= \left[(b-a)\sin x + (b-a)\cos x\right]e^{-x}$$

$$F'(x) = f(x) \;\text{ si }\; a = -\frac{1}{2};\; b = \frac{1}{2}$$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos x \, dx = \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}}\right)$



Le 15 septembre 2017

EXANA469 – EPB, UCL, LLN, septembre 2017.

Un vase est formé[1] par la rotation, autour de l'axe Oy, de la courbe d'équation

$$x=\sqrt{\frac{y\,e^{\frac{y^2}{40}}}{\pi}}$$

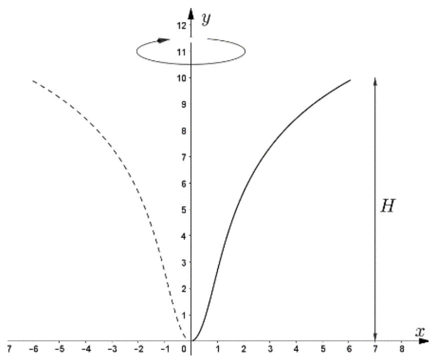
où x et y sont exprimés en cm, et pour y allant de 0 à $H=10\ [\text{cm}]$ (voir figure ci-dessous). On verse du liquide dans ce vase, avec une débit constant de 1 cl/s, jusqu'à ce que le vase soit rempli à ras bord. Le liquide est versé très délicatement de façon à ce qu'on puisse négliger toute effet de turbulence. On s'intéresse à l'évolution de la hauteur du liquide en fonction du temps.

1. Calculer le volume correspondant à une hauteur h de liquide dans le vase pour $0\le h\le H$.
2. Ecrivez la fonction $V(t)$ qui décrit le volume de liquide dans le vase en fonction du temps. On définit l'instant $t=0$ comme le moment où on commence à verser le liquide.
3. A partir des deux points précédents, déduisez une fonction $h(t)$ qui décrit la hauteur de liquide dans le vase en fonction du temps.
4. Quelle est la vitesse de montée du liquide dans le vase, 2 secondes après avoir commencé à verser? Idem pour 1 minute après avoir commencé à verser? (Il n'est pas nécessaire de donner les valeurs numériques, des expressions suffisent).

Expliquez soigneusement vos développements et vos raisonnements. Préciser les unités correspondant à chacune de vos expressions et notations.

----

[1] Le vase possède bien entendu un pied mais qui n'intervient pas dans ce problème.



Solution proposée par Nicole Berckmans

1) Volume : $V(h)=\pi\int_0^h y\frac{e^{\frac{y^2}{40}}}{\pi}\,dy=20\int_0^h \frac{y}{20}e^{\frac{y^2}{40}}\,dy=20\left[e^{\frac{y^2}{40}}\right]_0^h=20\left[e^{\frac{h^2}{40}}-1\right]$ cm^3

2) $V(t)=10\,t$ cm^3

3) $20\left[e^{\frac{h^2}{40}}-1\right]=10t\Rightarrow\ldots\Rightarrow h(t)=2\sqrt{10\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}$ cm

4) $h'(t)=\ldots=\frac{\sqrt{10}}{t+2}.\frac{1}{\sqrt{\ln\left(1+\frac{t}{2}\right)}}$ cm/s

Si $t=2$ s alors $h'(t)=\frac{\sqrt{10}}{4\sqrt{\ln 2}}$ cm/s

Si $t=60$ s alors $h'(t)=\frac{\sqrt{10}}{62\sqrt{\ln 31}}$ cm/s

---

Le 15 septembre 2017