Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 47

EXANA470 – EXANA479

http://matheux.ovh

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Septembre 2017

EXANA470 – Polytech, Umons, Mons, juillet 2017.

Soient les courbes d'équation

$$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2\lambda} \quad \text{et} \quad y=\frac{2\lambda}{e^x+e^{-x}}$$

1. Déterminer les valeurs du paramètre réel $\lambda>0$ pour lesquelles les courbes se coupent en deux points distincts.
2. Esquissez l'allure des courbes pour une de ces valeurs de λ au choix.
3. Calculer en fonction de λ l'aire de la surface comprise entre les courbes.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

$$f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2\lambda} \qquad g(x)=\frac{2\lambda}{e^x+e^{-x}}$$

Remarquons que ce sont deux faonctions paires, définies sur $\mathbb{R}$ et inverses l'une de l'autre.

1) $f\cap g$

$$\frac{e^x+e^{-x}}{2\lambda}=\frac{2\lambda}{e^x+e^{-x}} \Rightarrow \left(e^x+e^{-x}\right)^2=4\lambda^2$$

$\Rightarrow e^x+e^{-x}=2\lambda$ car $e^x+e^{-x}>0$ et $\lambda>0$

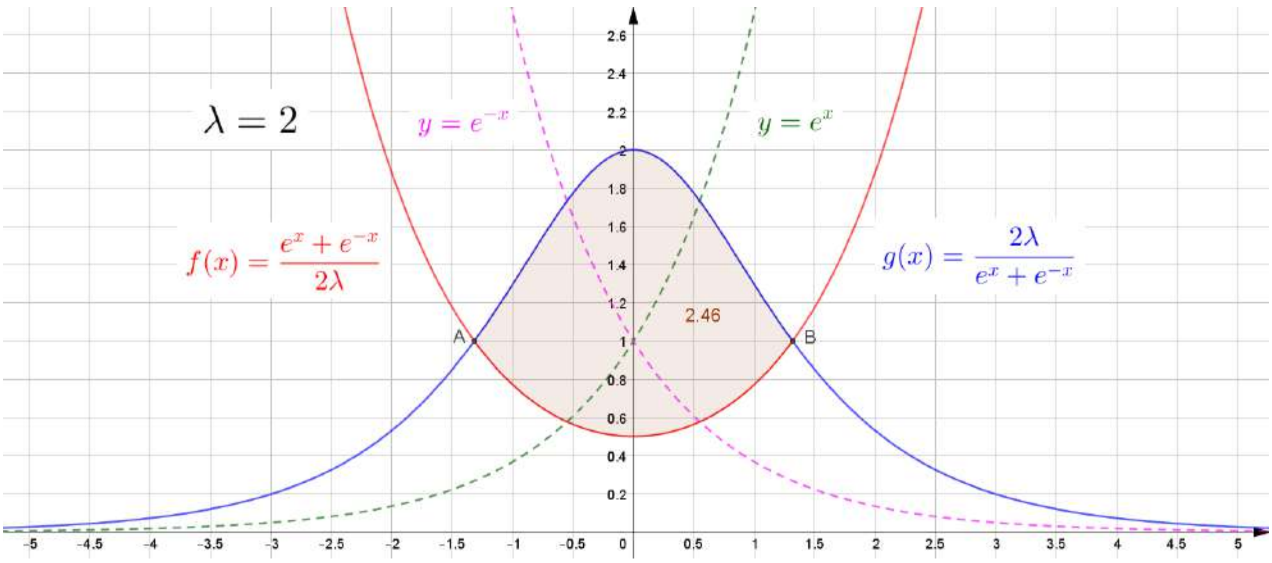
$\Rightarrow e^{2x}-2\lambda e^x+1=0$ et on a $\Delta=4\left(\lambda^2-1\right)$

Δ est nul si $\lambda=1$. En conclusion, les deux courbes se coupent en 2 points distincts si $\lambda>1$

2) Allure des courbes pour $\lambda=2$

L'allure du graphe de $y=e^x+e^{-x}$ peut s'obtenir facilement à partir de de ceux de e^x et e^{-x}, selon les techniques vues en 5ème.

On obtiendra donc facilement $f(x)$ et celui de $g(x)$ s'obtient facilement aussi car $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$



3) Calculons les abscisses des intersections A et B des deux courbes, pour λ=2

$$\Rightarrow e^{2x}+4e^{x}+1=0\Rightarrow e^{x}=2\pm\sqrt{3}\Rightarrow x=\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$$

Et donc : $x_A=\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$ et $x_B=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$

Calcul préliminaire : $\int \dfrac{1}{e^{x}+e^{-x}}\,dx=\int \dfrac{e^{x}}{e^{2x}+1}dx \xrightarrow{t=e^{x}} \int \dfrac{dt}{1+t^{2}}=\arctan t=\arctan e^{x}+C$

La surface cherchée est donnée par :

$$S=\int_{\ln\left(2-\sqrt{3}\right)}^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}\left(g\left(x\right)-f\left(x\right)\right)dx=2\int_{0}^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}\left(g\left(x\right)-f\left(x\right)\right)dx$$

$$=2\left[\left(4\arctan e^{x}\right)-\left(\frac{1}{4}e^{x}-\frac{1}{4}e^{-x}\right)\right]_{0}^{\ln\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$=2\left[\left(4\arctan\left(2+\sqrt{3}\right)-\frac{1}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)+\frac{1}{4}.\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)-\left(4\arctan 1\right)-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right]$$

Ou encore après simplification :

$$S=8\arctan\left(2+\sqrt{3}\right)-\sqrt{3}-2\pi\simeq 2.4567 \text{ ua}$$

Pour un λ quelconque $\left(\lambda>1\right)$, on obtiendra *mutatis mutandis* et après simplification l'expression suivante :

$$S\left(\lambda\right)=4\lambda\arctan\left(\lambda+\sqrt{\lambda^{2}-1}\right)-\frac{2\left(\lambda^{2}+\lambda\sqrt{\lambda^{2}-1}-1\right)}{\lambda\sqrt{\lambda^{2}-1}+\lambda^{2}}-\lambda\pi$$

15 septembre 2017

EXANA471 – FACSA, ULG Liège, juillet 2017.

La fonction coth, appelée cotangente hyperbolique, peut être définie par

$$\coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

i. Déterminez son domaine de définition.
ii. Déterminez sa parité éventuelle.
iii. Déterminez les éventuelles asymptotes de son graphe.
iv. Etudiez la croissance/décroissance de coth et caractérisez ses éventuels extrema.
v. Etudiez la concavité du graphe et déterminez ses éventuels points d'inflexion.
vi. Esquissez le graphe de coth.
vii. Sans calcul supplémentaire, esquissez le graphe de la fonction réciproque de la fonction coth. Précisez son domaine de définition.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ,Dr. Francine MONJOIE : http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2017-09/question_analysesept2017_a_juillet_2010-2.pdf

Soit la fonction à étudier

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

i. La fonction exponentielle étant définie sur $\mathbb{R}$, il faut seulement exclure les points où le dénominateur de la fraction s'annule, c'est-à-dire tels que $e^x = e^{-x}$ ou encore $x = -x$ soit $x = 0$. Le domaine est donc $\mathbb{R}_0$.

ii. La fonction est définie sur un domaine symétrique par rapport à l'origine et

$$\coth(-x) = \frac{e^{-x} + e^x}{e^{-x} - e^x} = -\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -\coth x$$

La fonction est donc impaire et toutes ses caractéristiques sur $\mathbb{R}_0^-$ pourront être déduites de celles sur $\mathbb{R}_0^+$.

iii. • On a

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{e^{2x} - 1} = +\infty$$

et aussi

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = -\infty$$

La fonction présente donc une asymptote verticale en $x = 0$.

• On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = 1$$

La fonction présente donc une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ pour $x \to +\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs supérieures car

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1} = 1^+$$

puisque le numérateur est toujours plus grand que le dénominateur.

Vu son caractère impair, la fonction présente aussi une asymptote horizontale d'équation $y = -1$ pour $x \to -\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs inférieures.

- Il n'y a pas d'asymptote oblique puisqu'il y a déjà des asymptotes horizontales pour $x \to \pm\infty$.

iv. Pour rechercher les éventuels extrema, on calcule

$$\begin{aligned} \coth'(x) &= \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2} \\ &= -\frac{4}{(e^x - e^{-x})^2} < 0 \end{aligned}$$

La fonction est donc strictement décroissante sur son domaine de définition et ne présente pas d'extremum.

v. Une nouvelle dérivation conduit à

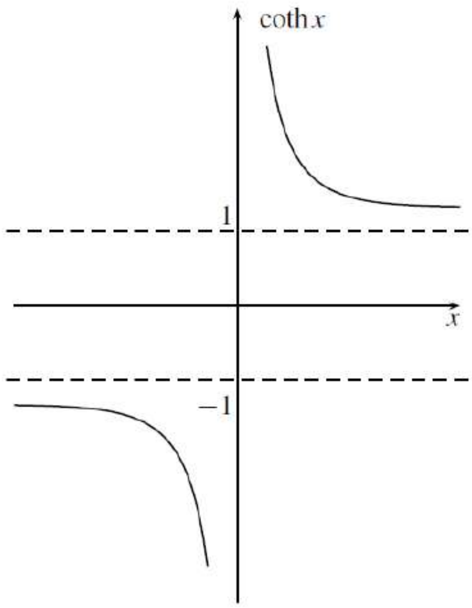
$$\coth''(x) = 8\,\frac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^3}$$

dont les caractéristiques sont reportées dans le tableau ci-dessous.

x		0	
$\coth''(x)$	$-$	$\nexists$	$+$
$\coth(x)$	$\frown$	$\nexists$	$\smile$

La dérivée seconde change de signe en $x = 0$ et le graphe tourne sa concavité vers le bas à gauche de $x = 0$ et vers le haut à droite de $x = 0$. Il n'y a cependant pas de point d'inflexion puisque la fonction n'est pas définie en $x = 0$.

vi. Rassemblant les informations obtenues ci-dessus, on peut représenter le graphe de la fonction coth.



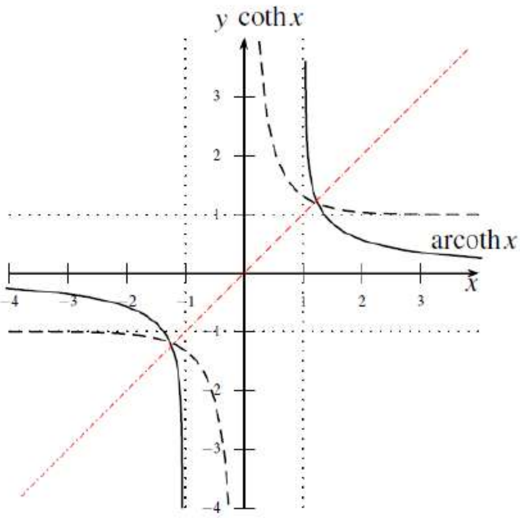
vii. La fonction coth étant injective, c'est-à-dire telle que

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0, x_1 \neq x_2, \quad \coth x_1 \neq \coth x_2,$$

on peut définir la fonction réciproque arcoth sur le domaine des valeurs de coth,

$$]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Les graphes de coth et arcoth peuvent être déduits l'un de l'autre par une symétrie orthogonale utilisant la bissectrice principale $y = x$ comme axe.



EXANA472 – FACSA, ULG Liège, juillet 2017.

Calculez les intégrales et primitives suivantes où R est une constante strictement positive.

i $\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$

ii $\quad \int x\sqrt{R^2 - x^2} \, dx$

iii $\quad \int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ,Dr. Francine MONJOIE : http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2017-09/question_analysesept2017_a_juillet_2010-2.pdf

i.

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

ii.

$$\int x\sqrt{R^2 - x^2} \, dx = -\frac{1}{2}\frac{2}{3}(R^2 - x^2)^{3/2} + C = -\frac{(R^2 - x^2)^{3/2}}{3} + C$$

où C est une constante.

iii.

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx$$

On pose $x = R\sin t$, $dx = R\cos t \, dt$, ce qui transforme la primitive à calculer en

$$\int R^2 \cos^2 t \, dt = R^2\left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right) + C$$

où C est une constante et où on a utilisé un résultat du point i.

Remplaçant t par $\arcsin\left(\frac{x}{R}\right)$, on peut alors écrire successivement

$$\int \sqrt{R^2 - x^2} \, dx = \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R} + \frac{R^2}{4}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{R}\right) + C$$

$$= \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R} + \frac{R^2}{2}\sin\left(\arcsin\frac{x}{R}\right)\cos\left(\arcsin\frac{x}{R}\right) + C$$

$$= \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R} + \frac{Rx}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} + C$$

Le 20 septembre 2017

EXANA473 – FACSA, ULG Liège, juillet 2017.

Une citerne à gaz en tôle a la forme d'un cylindre à base circulaire de rayon r soudé à deux demi-sphères de même rayon.

Sachant que le prix de la tôle est de γ euros par mètre carré et que le prix de la soudure (aux jonctions entre le cylindre et les demi-sphères) est de γl euros par mètre, où γ et l sont des constantes strictement positives, montrez qu'il existe un rayon optimum r^* permettant de minimiser le coût de réalisation de cette citerne pour un volume $V = \dfrac{2\pi l^3}{3}$ donné.

Exprimez r^* en fonction de l.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ,Dr. Francine MONJOIE : http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2017-09/question_analysesept2017_a_juillet_2010-2.pdf

Notant r le rayon du cylindre et des demi-sphères et introduisant la variable h comme hauteur du cylindre, le volume V de la citerne et son aire latérale A sont donnés respectivement par

$$V = \frac{4\pi r^3}{3} + \pi r^2 h \quad \text{et} \quad A = 4\pi r^2 + 2\pi r h$$

L'expression du volume V permet d'écrire

$$h = \frac{V}{\pi r^2} - \frac{4}{3} r$$

En injectant ce résultat dans l'expression de A, on peut exprimer l'aire comme fonction de la seule variable r, soit

$$A(r) = 4\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{V}{\pi r^2} - \frac{4}{3} r \right) = \frac{4\pi r^2}{3} + \frac{2V}{r}$$

soit, en utilisant la valeur $V = 2\pi\ell^3/3$ donnée dans l'énoncé,

$$A(r) = \frac{4\pi r^2}{3} + \frac{4\pi\ell^3}{3r} = \frac{4\pi}{3}\left(r^2 + \frac{\ell^3}{r} \right)$$

Le coût de fabrication incluant le prix de la tôle et celui des soudures est donc de

$$C(r) = \frac{4\pi}{3}\left(r^2 + \frac{\ell^3}{r} \right)\gamma + 4\pi r\,\ell\,\gamma$$

Pour étudier les variations de C et identifier les éventuels extrema, on calcule

$$C'(r) = \frac{4\pi}{3}\left(2r - \frac{\ell^3}{r^2}\right)\gamma + 4\pi\ell\,\gamma = \frac{4\pi\gamma}{3}\left(2r - \frac{\ell^3}{r^2} + 3\ell\right)$$

Les points stationnaires sont donc solutions de

$$2r - \frac{\ell^3}{r^2} + 3\ell = 0$$

ou encore

$$2\left(\frac{r}{\ell}\right)^3 + 3\left(\frac{r}{\ell}\right)^2 - 1 = 0$$

Cette cubique admet de façon évidente le zéro $r/\ell = -1$. La règle de Horner permet alors de transformer l'équation à résoudre en

$$\left(\frac{r}{\ell}+1\right)\left[2\left(\frac{r}{\ell}\right)^2 + \frac{r}{\ell} - 1\right] = 0$$

soit, finalement,

$$\left(\frac{r}{\ell}+1\right)^2\left(\frac{r}{\ell} - \frac{1}{2}\right) = 0$$

Le seul point stationnaire qui a un sens dans ce problème est donc $r = \ell/2$.

L'étude du signe de la dérivée

r	0		$\ell/2$		$+\infty$
C'		$-$	0	$+$	
C		$\searrow$	min	$\nearrow$	

montre que la fonction est décroissante à gauche de $r = \ell/2$ et croissante à droite.

Dès lors le coût est minimum pour

$$r^* = \ell/2$$

et la hauteur h correspondante vaut 2ℓ.

Le 20 septembre 2017

EXANA474 – FACSA, ULG Liège, septembre 2017.

On considère la fonction

$$f(x) = e^{-x}(x^2 + a)$$

où a d´esigne un paramètre réel strictement positif. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

i. déterminez le domaine de définition de f ;
ii. déterminez sa paritè éventuelle ;
iii. déterminez les éventuelles asymptotes du graphe de f ;
iv. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;
v. esquissez le graphe de f .

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ,Dr. Francine MONJOIE : http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2017-09/question_analysesept2017_a_juillet_2010-2.pdf

i. Quelle que soit la valeur du paramètre a, la fonction $f(x) = e^{-x}(x^2 + a)$ est définie $\forall x \in \mathbb{R}$. On a donc $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

ii. Puisque, quelle que soit la valeur du paramètre a,

$$f(-x) = e^{x}(x^2 + a) \begin{cases} \neq +f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$

la fonction n'est ni paire, ni impaire.

iii.
- La fonction ne présente pas d'asymptote verticale puisque son domaine est $\mathbb{R}$.
- Au voisinage de $+\infty$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} e^{-x}(x^2 + a) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + a}{e^x} = \text{“} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{”} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{e^x} = \text{“} \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \text{”} \\ &= \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{e^x} = 0 \end{aligned}$$

où les indéterminations successives sont levées en appliquant la règle de l'Hospital. De façon alternative, ce résultat peut être obtenu en se basant sur le fait que l'exponentielle e^{-x} décroît plus vite que n'importe quelle puissance de x au voisinage de l'infini.

Plus précisément, la fonction f étant strictement positive sur son domaine de définition, on a, quelle que soit la valeur du paramètre a,

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-x}(x^2 + a) = 0^+$$

La fonction présente donc l'asymptote horizontale $y = 0$ en $+\infty$ qu'elle approche par le dessus.

- Au voisinage de $-\infty$, on a, quelle que soit la valeur du paramètre a,

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}(x^2+a) = +\infty$$

La fonction ne présente donc pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.
Pour identifier la présence d'une éventuelle asymptote oblique, on calcule

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\frac{x^2+a}{x} = +\infty$$

et la fonction ne présente donc pas non plus d'asymptote oblique en $-\infty$.

iv. La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = -e^{-x}(x^2+a) + e^{-x}(2x) = e^{-x}(-x^2+2x-a)$$

Ses zéros sont obtenus en résolvant l'équation du second degré

$$-x^2+2x-a = 0$$

dont le discriminant est donné par

$$\rho = 4-4a = 4(1-a)$$

On distingue donc les cas suivants.

$\boxed{0 < a < 1}$ Le discriminant est positif et f' possède les deux zéros

$$x_1 = 1-\sqrt{1-a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = 1+\sqrt{1-a}$$

Les variations de f sont décrites par

x		x_1		x_2	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	min	$\nearrow$	Max	$\searrow$

La fonction étant décroissante à gauche de x_1 et croissante à sa droite, elle présente un minimum local en ce point. La fonction f présente un maximum local en x_2 puisqu'elle est croissante à gauche et décroissante à droite.

$\boxed{a = 1}$ Dans ce cas, le discriminant est nul et la dérivée s'annule uniquement en $x = 1$. On a

x		1	
f'	$-$	0	$-$
f	$\searrow$	Tangente horizontale	$\searrow$

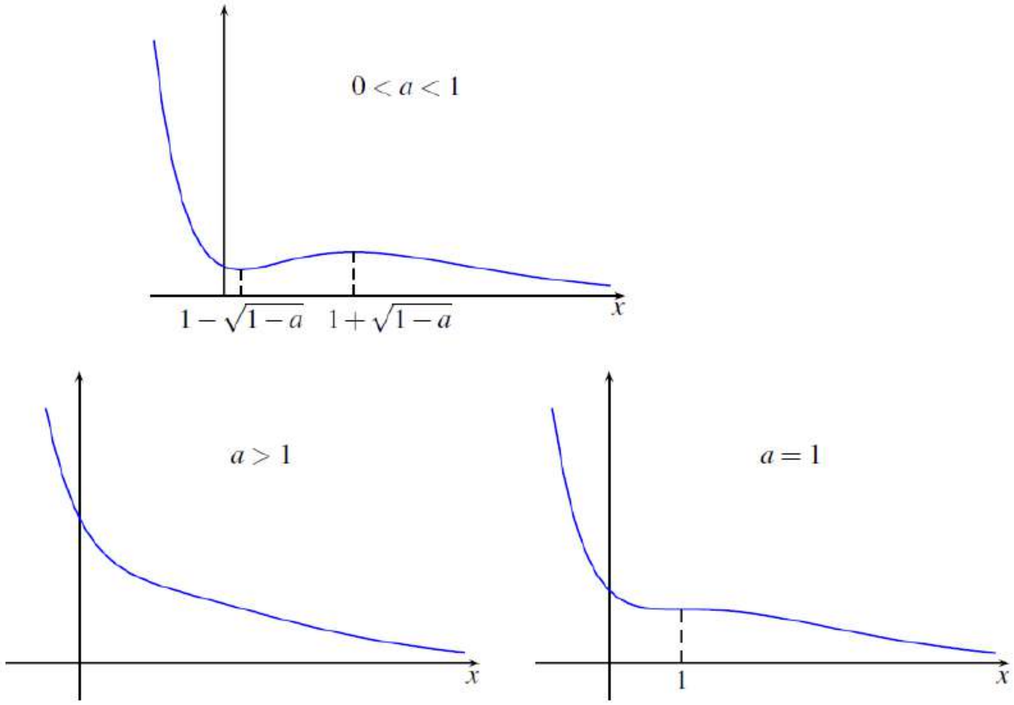
La fonction ne présente aucun extremum local. Elle est décroissante sur l'ensemble de son domaine.

$\boxed{a > 1}$ Dans ce cas, le discriminant est négatif et la dérivée ne s'annule pas. On a

x			
f'	$-$	$-$	$-$
f	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$

La fonction ne présente aucun extremum local. Elle est décroissante sur l'ensemble de son domaine.

v. En fonction des résultats précédents et, en particulier, de la discussion menée au point précédent, on peut esquisser le graphe de f de la façon suivante en tenant compte du fait que $f > 0$ sur $\mathbb{R}$ et en distinguant les cas $0 < a < 1$, $a = 1$ et $a > 1$:



Le 20 septembre 2017

EXANA475 – FACSA, ULG Liège, septembre 2017.

On considère les intégrales

$$S_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x \, dx \qquad \text{et} \qquad C_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \cos x \, dx$$

i. Calculez C_0.

ii. Calculez S_1.

iii. Montrez que, pour tout n > 0,

$$C_n = \alpha^n - nS_{n-1}$$

où α désigne une constante à déterminer.

iv. De ce qui précède, déduisez la valeur de l'intégrale $\int_0^1 (\arcsin x)^2 \, dx$

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ,Dr. Francine MONJOIE : http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2017-09/question_analysesept2017_a_juillet_2010-2.pdf

i.

$$C_0 = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \Big[\sin x\Big]_0^{\pi/2} = 1$$

ii.

$$S_1 = \int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$$

Par application de la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f g' \, dx = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f' g \, dx$$

avec

$$\begin{cases} f = x \\ g' = \sin x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = 1 \\ g = -\cos x \end{cases}$$

on obtient

$$S_1 = \Big[-x\cos x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = C_0 = 1$$

iii. $\forall n > 0$,

$$C_n = \int_0^{\pi/2} x^n \cos x \, dx$$

Par application de la formule d'intégration par parties avec

$$\begin{cases} f = x^n \\ g' = \cos x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = nx^{n-1} \\ g = \sin x \end{cases}$$

on obtient

$$C_n = \Big[x^n \sin x\Big]_0^{\pi/2} - n \int_0^{\pi/2} x^{n-1} \sin x \, dx = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n - nS_{n-1}$$

qui est la relation donnée avec $\alpha = \pi/2$.

iv. L'intégrale

$$\int_0^1 \left(\arcsin x\right)^2 dx$$

peut être transformée par le changement de variable $x = \sin t$, $(dx = \cos t \, dt)$ en

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\arcsin(\sin t)\right]^2 \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2 \cos t \, dt = C_2$$

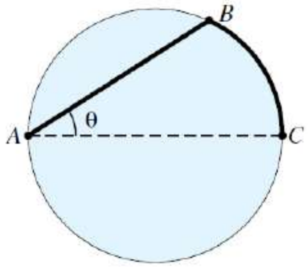
où, en utilisant les résultats des points ii. et iii.,

$$C_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 - 2S_1 = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

Le 20 septembre 2017

EXANA476- FACSA, ULG Liège, septembre 2017.

Un canard se trouvant en A au bord d'un lac circulaire de rayon R souhaite atteindre le point C diamétralement opposé du lac. Pour ce faire, il peut nager en ligne droite de A à C, marcher le long de la berge de A à C ou nager en ligne droite depuis son point de départ jusqu'à un point intermédiaire B situé sur la berge puis marcher le long du bord de B à C (voir figure). Sachant que ce canard marche deux fois plus vite qu'il ne nage, d'terminez la trajectoire la plus rapide pour atteindre le point C.
Justifiez.



Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ,Dr. Francine MONJOIE : http://www.facsa.ulg.ac.be/upload/docs/application/pdf/2017-09/question_analysesept2017_a_juillet_2010-2.pdf

En s'appuyant sur la signification de l'angle θ, on remarque tout d'abord que seules les valeurs de $\theta \in [0, \pi/2]$ doivent être considérées. Le cas $\theta = 0$ correspond à la nage en ligne droite de A à C, alors que, pour $\theta = \pi/2$, le canard ne fait que marcher le long de la berge.

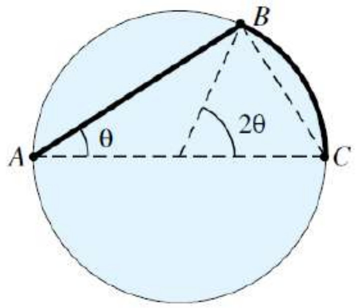
Conformément à l'énoncé du problème, on note v la vitesse de nage du canard et $2v$ sa vitesse de marche.

D'une part, le triangle ABC étant rectangle en B, on a

$$|AB| = |AC| \cos\theta = 2R\cos\theta$$

et le temps de parcours du segment AB à la vitesse v est donné par

$$t_{AB} = \frac{|AB|}{v} = \frac{2R\cos\theta}{v}$$



D'autre part, l'angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{BC}$ étant le double de l'angle inscrit θ, la longueur de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ est égale à $2\theta R$ et le temps de parcours correspondant, à la vitesse $2v$ est donné par

$$t_{BC} = \frac{2\theta R}{2v} = \frac{\theta R}{v}$$

Au total, le temps de parcours le long de la trajectoire ABC est donc égal à

$$t(\theta) = t_{AB} + t_{BC} = \frac{2R\cos\theta}{v} + \frac{\theta R}{v}$$

Afin d'identifier la trajectoire la plus rapide, étudions les variations de cette fonction pour $\theta \in [0, \pi/2]$. On calcule

$$t'(\theta) = -\frac{2R\sin\theta}{v} + \frac{R}{v}$$

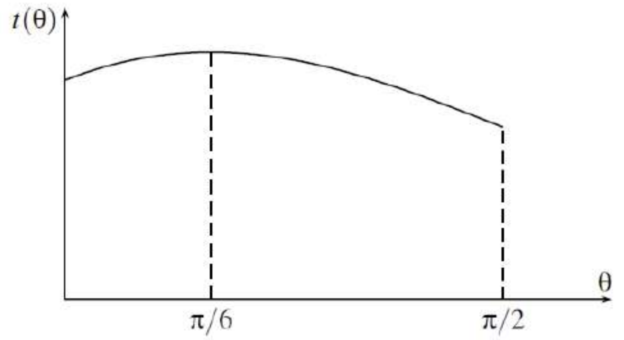
dont le seul zéro dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ est donné par dont le seul zéro dans l'intervalle $[0, \pi/2]$ est donné par

$$\sin\theta^\star = \frac{1}{2} \qquad \text{soit} \qquad \theta^\star = \frac{\pi}{6}$$

Les variations de $t(\theta)$ sont donc décrites par

θ	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$t'(\theta)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
t	$\nearrow$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	$\searrow$

De ce tableau, il ressort que le temps de parcours est maximum pour $\theta = \pi/6$ et présente l'allure suivante



Le minimum recherché est donc réalisé aux bornes de l'intervalle, *i.e.* pour $\theta = 0$ ou $\theta = \pi/2$. En comparant les valeurs correspondantes du temps de parcours

$$t(0) = \frac{2R}{v} \qquad \text{et} \qquad t(\pi/2) = \frac{\pi R}{2v}$$

on en déduit que celui-ci est minimum pour $\theta = \pi/2$. Le trajet le plus rapide est donc réalisé en marchant le long de la berge du point A au point C.

EXANA477- POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2017.

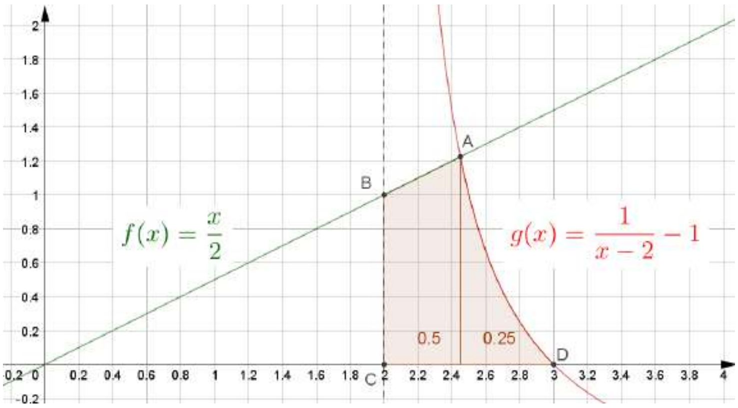
Soient

$$f(x)=\frac{1}{2}x \qquad \text{et} \qquad g(x)=\frac{1}{x-2}-1.$$

1. Représenter $f(x)$ et $g(x)$, sans nécessairement faire une étude de fonction détaillée.
2. Calculer l'aire comprise entre le fonction $\mathrm{h}(x)=\min(f(x),g(x))$ et l'axe Ox pour $x\geq 0$ et $h(x)\geq 0$

Note : on peut utiliser $\ln\left(\sqrt{6}-2\right)\simeq -0.8$ et $\sqrt{6}\approx 2.45$ pour fournir une valeur numérique approchée.

Solution proposée par Fabienne Zoetard



Il faut donc trouver l'aire de *ABCD*.

On trouve facilement : $x_C=x_D=2$ et $x_B=3$

Pour x_A, on résoud : $\frac{1}{2}x=\frac{1}{x-2}-1\;(x\neq 2)\Rightarrow(x-2)x=2-2x+4\Rightarrow\ldots\Rightarrow x=\pm\sqrt{6}$

On garde : $x_A=\sqrt{6}.$

$$\mathscr{A}_{ABCD}=\int_2^{\sqrt{6}}\frac{1}{2}x\,dx+\int_{\sqrt{6}}^{3}\left(\frac{1}{x-2}-1\right)=\left[\frac{1}{4}x^2\right]_2^{\sqrt{6}}+\left[\ln|x-2|-x\right]_{\sqrt{6}}^{3}$$

$$=\frac{1}{4}(6-4)+(\ln 1-3)-\left(\ln\left(\sqrt{6}-2\right)-\sqrt{6}\right)=\frac{1}{2}-3-\ln\left(\sqrt{6}-2\right)+\sqrt{6}$$

$$\simeq -2.5+0.8+2.45\simeq 0.75$$

Le 16 octobre 2017

EXANA478 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2017.

Soit la fonction $f(x) = 3\sin x + \sin 3x$

1) Déterminer la plus petite période de f.

2) Calculer $f\,'$ et situer les extrema avec précision.

3) Situer les points d'inflexion de manière approximative.

4) Réaliser une esquisse du graphe sur une période

Solution proposée par Fabienne Zoetard

1) Période de $\sin x$: 2π

Période de $\sin 3x$: $\dfrac{2\pi}{3}$ $\Rightarrow$ Période de f : 2π

Remarquons de plus que f est une fonction impaire cr $f(-x) = -f(x)$

2) $f\,'(x) = 3\cos x + 3\cos 3x = 3(\cos x + \cos 3x) = 6\cos 2x \cos x$

Racines : $\cos x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\cos 2x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \qquad (k \in \mathbb{Z})$

Pour étudier la croissance de f, on peut se contenter de prendre comme domaine une demi période : $[0, \pi]$

x	... 0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π ...
$\cos x$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$\cos 3x$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f\,'$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	M_1	$\searrow$	m_1	$\nearrow$	M_2	$\searrow$	

On établit alors le tableau pour une periode $[-\pi, \pi]$

x	...	$-\pi$		$-\frac{3\pi}{4}$		$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		π	...
f		0	$\searrow$	m_2'	$\nearrow$	M_1'	$\searrow$	m_1'	$\nearrow$	0	$\nearrow$	M_1	$\searrow$	m_1	$\nearrow$	M_2	$\searrow$	0	

3) $f''(x)=-3\sin x-9\sin 3x=-3(\sin x+3\sin 3x)=-3(\sin x+3(\sin 2x\cos x+\sin x\cos 2x))$

$$=-3(\sin x+6\sin x\cos^2 x+6\sin x\cos^2 x-3\sin x)\quad \text{car } \cos 2x=2\cos^2 x-1$$

$$=-3(-2\sin x+12\sin x\cos^2 x)=-6\sin x(6\cos^2 x-1)$$

Racines : • $\sin x=0\Rightarrow x=k\pi$

$$\bullet\ 6\cos^2 x-1=0\Rightarrow \cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow\begin{cases}x=\varphi \quad \text{avec } \varphi=\arccos\frac{1}{\sqrt{6}}\approx 1.15 \text{ rad}\\ x=\pi-\varphi\end{cases}$$

Signe de $6\cos^2-1$

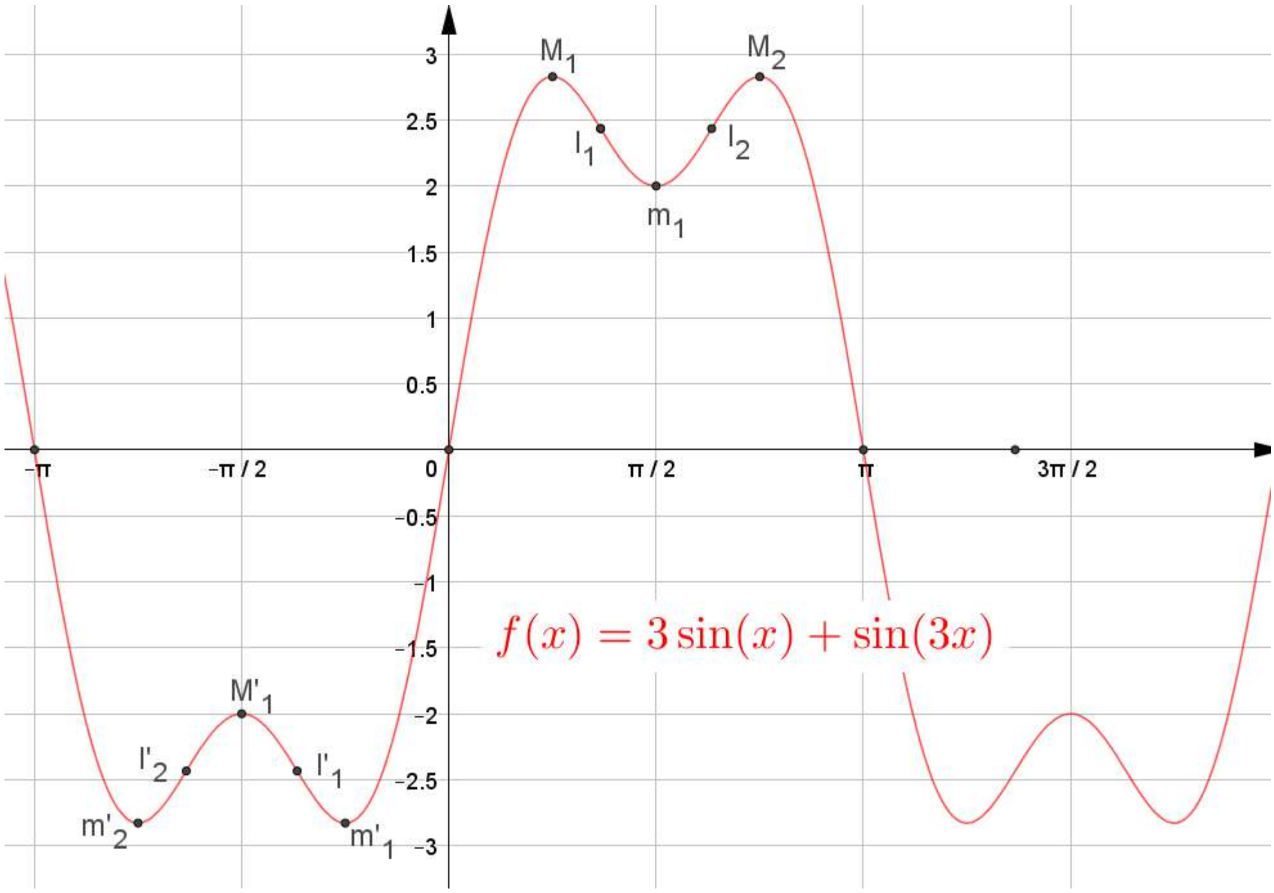
$$6\cos^2 x-1\le 0\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{6}}\le x\le\frac{1}{\sqrt{6}}\Rightarrow \text{pour } x\in[0,\pi]:\pi-\varphi\le x\le\varphi$$

Signe de f'' sur $[0,\pi]$

x	...	0		φ		$\pi-\varphi$		π
$-\sin x$		0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0
$6\cos^2 x-1$		$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
f''		0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
		I_0	$\cap$	I_1	$\cup$	I_2	$\cap$	I_3

4) Tableau récapitulatif sur une demi-période $[0,\pi]$

x	...	0		$\frac{\pi}{4}$		φ		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\varphi$		$\frac{3\pi}{4}$		π	...
f'		$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
f''		0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	
f		I_0	$\nearrow$ $\cap$	M_1	$\searrow$ $\cap$	I_1	$\searrow$ $\cup$	m_1	$\nearrow$ $\cup$	I_2	$\nearrow$ $\cap$	M_2	$\searrow$ $\cap$	I_3	



Le 16 octobre 2017

EXANA479 – EPB, UCL, LLN, septembre 2017.

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{4x^2-3}{4} e^{\frac{1}{1-x^2}}$.

1) Déterminer le domaine de défnition de la fonction f.

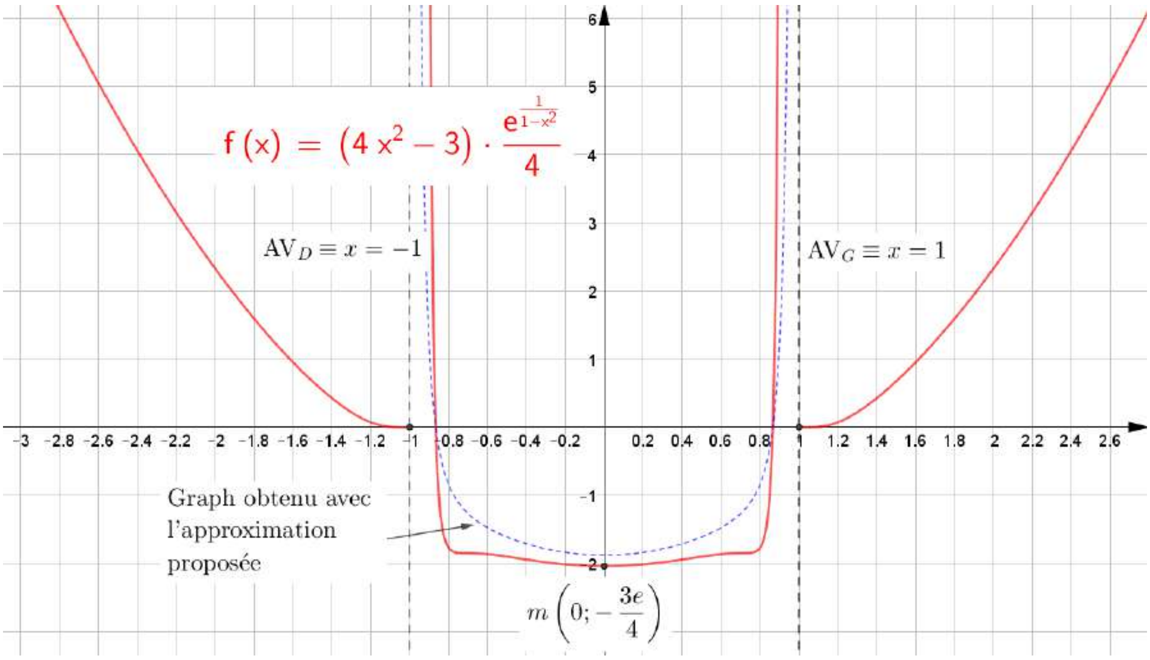
2) Calculer les limites à gauche et à droite de f en $+1$ et -1.

3) Calculer $f'(x)$.

4) Déterminer les équations des éventuelles asymptotes de f.

5) Après avoir étudier le signe de $f'(x)$, déterminer les coordonnées des points de maximum et des points de minimum de f.

6) Tracer le graphique de f en utilisant les résultats précédents (on pourra éventuellement utiliser l'approximation $e^x \simeq 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2$ si $-1 < x < 1$



1) Domaine $\mathbb{R}\backslash\{-1,+1\}$

2) Remarquons que f est une fonction paire. Il suffit dnc de calculer les limites en $x=1$.

$$\lim_{x\to+1^+}\frac{4x^2-3}{4}e^{\frac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to+1^+}\frac{4x^2-3}{4}\lim_{x\to+1^+}e^{\frac{1}{1-x^2}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+1^+}e^{\frac{1}{0^-}}=0$$

$$\lim_{x\to+1^-}\frac{4x^2-3}{4}e^{\frac{1}{1-x^2}}=\lim_{x\to+1^-}\frac{4x^2-3}{4}\lim_{x\to+1^-}e^{\frac{1}{1-x^2}}=\frac{1}{4}\lim_{x\to+1^-}e^{\frac{1}{0^+}}=+\infty$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{4x^2-3}{4}e^{\frac{1}{1-x^2}}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}\frac{4x^2-3}{4}e^{\frac{1}{1-x^2}}=0$

3) $$f'(x)=2x.e^{\frac{1}{1-x^2}}+\frac{4x^2-3}{4}e^{\frac{1}{1-x^2}}\left(-\frac{1}{(1-x^2)^2}\right)(-2x)$$

$$=\ldots=\frac{x(2x^2-1)^2}{(1-x^2)^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}$$

Les racines de f' sont $x=0,\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2}, x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) En $x=1$, une asymptote verticale à gauche : $\text{AV}_1 \equiv x=1$

En $x=-1$, une asymptote verticale à droite : $\text{AV}_1 \equiv x=-1$

Pas de AH et pas de AO

5) Tableau de f'

x		-1		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+1$	
x	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\frac{(2x^2-1)^2}{(1-x^2)^2}e^{\frac{1}{1-x^2}}$	$+$	$\nexists$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$\nexists$	$+$
f'	$-$	$\nexists$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	$\nexists$	$+$
f	$\searrow$	$0 \vert AV$	$\searrow$	I	$\searrow$	m	$\nearrow$	I	$\nearrow$	$AV \vert 0$	$\nearrow$

Le 28 octobre 2017