# Exercices résolus de mathématiques.

# Analyse

# ANA 48

**EXANA480 – EXANA489**

http://matheux.ovh

**Jacques Collot**
**Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck**
**Fabienne Zoetard**

Septembre 2017

**EXANA480 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017.**

1) Calculer $\int \arcsin 17x \, dx$.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'origine $O$ et d'axes $x$ et $y$, on considère la courbe $\mathscr{C}_1 \equiv y = 2x^3$ et la courbe $\mathscr{C}_2 \equiv 2x^3 + \dfrac{(\ln(2x-2))^5}{2x-2} \quad (x > 1)$

a) Calculer $\int \dfrac{(\ln(2x-2))^5}{2x-2} dx$.

b) Déterminer les coordonnées du point d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

c) Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la surface comprise entre les deux courbes et les droites $x = \dfrac{4}{3}$ et $x = 2$.

---

1) $I = \int \arcsin 17x \, dx$

Intégration par parties : $\begin{array}{lll} f' = 1 & \Rightarrow & f = x \\ g = \arcsin 17x & \Rightarrow & g' = \dfrac{17}{\sqrt{1-17^2x^2}} \end{array}$

$$\Rightarrow I = x.\arcsin 17x - \underbrace{\int \frac{17x}{\sqrt{1-17^2x^2}} dx}_{I_1}$$

$I_1 = \int \dfrac{17x}{\sqrt{1-17^2x^2}} dx$. On pose : $t = 1-17^2x^2 \Rightarrow -2 \times 17^2 x \, dx$

$$\Rightarrow I_1 = -\frac{1}{34}\int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{2}{34} t^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{17}\sqrt{1-17^2x^2}$$

$$\boxed{I = x.\arcsin 17x + \frac{1}{17}\sqrt{1-17^2x^2} + C}$$

2) a) $I=\int \dfrac{\left(\ln\left(2x-2\right)\right)^5}{2x-2}\,dx$ On pose : $t=\ln\left(2x-2\right)\Rightarrow dt=\dfrac{2dx}{2x-2}$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int t^5\,dt=\frac{t^6}{12}=\frac{1}{12}\left(\ln\left(2x-2\right)\right)^6+C$$

b) $\mathscr{C}_1\cap\mathscr{C}_2\Rightarrow 2x^3=2x^3+\dfrac{\left(\ln\left(2x-2\right)\right)^5}{2x-2}\Rightarrow\ln\left(2x-2\right)=0\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$

c) Il faut connaître la position relative des deux courbes dans l'intervalle considéré.

Si $x\in\left[\dfrac{4}{3};\dfrac{3}{2}\right[$, alors $\mathscr{C}_1$ est au-dessus de $\mathscr{C}_2$ et si $x\in\left[\dfrac{3}{2};2\right[$ $\mathscr{C}_2$ est au-dessus de $\mathscr{C}_1$

On calcule donc : $\mathscr{A}=\left[\mathscr{C}_1-\mathscr{C}_2\right]_{4/3}^{3/2}+\left[\mathscr{C}_2-\mathscr{C}_1\right]_{3/2}^{2}$ ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\mathscr{A}&=-\int_{4/3}^{3/2}\frac{\left(\ln\left(2x-2\right)\right)^5}{2x-2}\,dx+\int_{3/2}^{2}\frac{\left(\ln\left(2x-2\right)\right)^5}{2x-2}\,dx\\
&=-\frac{1}{12}\left[\left(\ln\left(2x-2\right)\right)^6\right]_{4/3}^{3/2}+\frac{1}{12}\left[\left(\ln\left(2x-2\right)\right)^6\right]_{3/2}^{2}\\
&=\frac{1}{12}\left\{-\left[0-\left(\ln\left(\frac{8}{3}-2\right)\right)^6\right]+\left[\left(\ln\left(4-2\right)\right)^6-0\right]\right\}\\
&=\frac{\ln^6\dfrac{2}{3}+\ln^6 2}{12}\simeq 9.6124\times10^{-3}
\end{aligned}$$

Cette faible valeur s'explique par le fait que dans l'intervalle considéré les deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont très proches l'une de l'autre.

## EXANA481 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017.

On dispose de deux sources lumineuses. L'une est placée en un point $P$ et est d'intensité lumineuse $p$ candelas et l'autre est placée en un point $Q$ et est d'intensité $q$ candelas. La distance entre les points $P$ et $Q$ est de 4 mètres. Sachant que l'éclairement $E$ en lux en un point de $[P,Q]$ situé à une distance $d$ d'un point d'intensité $I$ est donné par la formule $E=\dfrac{I}{d^2}$ ($E$ est lux, $I$ en candelas et $d$ en mètres) et que les éclairements des deux sources s'additionnent, déterminer à quelle distance du point $P$ est situé le point $A$ de $[P,Q]$ le plus faiblement éclairé.

---

Soit $x$ la distance de $A$ au point $P$, la distance de $A$ à $Q$ est alors de $4-x$.

Puisque les éclairements d'additionnent, on a : $E=\dfrac{p}{x^2}+\dfrac{q}{(4-x)^2}$

Pour déterminer le minimun, on dérive : $E'=-\dfrac{2p}{x^3}+\dfrac{2q}{(4-x)^3}$

On cherche les racines de $E'$: $\dfrac{q}{(4-x)^3}=\dfrac{p}{x^3}$

$$\Rightarrow qx^3-p(4-x)^3=0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{q}x-\sqrt[3]{p}(4-x)\right)\left(\sqrt[3]{q^2}x^2+\sqrt[3]{qp}(4-x)+\sqrt[3]{p^2}(4-x)^2\right)=0$$

- Le premier facteur donne : $\sqrt[3]{q}x=\sqrt[3]{p}(4-x)\Rightarrow x=\dfrac{4\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$
- Le deuxième facteur donne : $\sqrt[3]{q^2}x^2+\sqrt[3]{qp}(4-x)+\sqrt[3]{p^2}(4-x)^2=0$

  On développe et on réarrange pour obtenir une équation du second degré en $x$:

  $\left(\sqrt[3]{q^2}+\sqrt[3]{p^2}\right)x^2-\left(\sqrt[3]{qp}+8\sqrt[3]{p^2}\right)x+4\sqrt[3]{qp}+16\sqrt[3]{p^2}=0$

  Le discriminant vaut :

  $\Delta=\left(\sqrt[3]{qp}+8\sqrt[3]{p^2}\right)^2-4\left(\sqrt[3]{q^2}+\sqrt[3]{p^2}\right)\left(4\sqrt[3]{qp}+16\sqrt[3]{p^2}\right)$

  $=\ldots=-16\left(\sqrt[3]{q}+63\sqrt[3]{p}\right)\sqrt[3]{q^2}\sqrt[3]{p}<0$ puisque $p$ et $q$ sont positifs.

  Le deuxième facteur n'a donc pas de racine et est toujours positif.

Le signe de la dérivée est déterminé uniquement par le premier facteur. Ce qui donne le tableau de signe :

| | | $\dfrac{4\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$ | |
|---|---|---|---|
| $E'$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $E$ | $\searrow$ | min | $\nearrow$ |

. On a donc bien un minimum.

<u>Conclusion :</u> Minimum pour $x=\dfrac{4\sqrt[3]{p}}{\sqrt[3]{p}+\sqrt[3]{q}}$

---

Le 1 novembre 2017

# EXANA482 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.

On considère la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x - a}$$

ou $a$ désigne un paramètre réel strictement positif.

En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de $a$.

i. déterminez le domaine de définition de $f$ ;
ii. déterminez sa parité éventuelle;
iii. déterminez les éventuelles asymptotes de son graphe;
iv. étudiez la croissance/décroissance de $f$ et caractérisez ses éventuels extrema;
v. esquissez le graphique de $f$.

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ, Prof. Vincent DENOEL:** https://www.facsa.uliege.be/upload/docs/application/pdf/2018-09/question_analysesept2018_a_juillet_2010-2.pdf

i. Quelle que soit la valeur du paramètre $a$, la fonction

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x - a}$$

est définie partout sauf au point $x = a$ où son dénominateur s'annule. On a donc

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{a\}$$

ii. La fonction n'est ni paire ni impaire puisque, quelle que soit la valeur du paramètre $a$,

$$f(-x) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{-x - a} \begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases}$$

iii. Quelle que soit la valeur du paramètre $a$ :

- Au voisinage de $+\infty$, on a
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x-a}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$
Remarquons que la limite est approchée par valeurs supérieures car la fonction est supérieure à 1 dans le voisinage de $+\infty$.
La fonction présente donc l'asymptote horizontale $y=1$ en $+\infty$ qu'elle approche par le dessus.
- Au voisinage de $-\infty$, on a
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x-a}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x}=-1$$
Remarquons que la limite est approchée par valeurs supérieures car la fonction est supérieure à $-1$ dans le voisinage de $-\infty$.
La fonction présente donc l'asymptote horizontale $y=-1$ en $-\infty$ qu'elle approche par le dessus.
- Par ailleurs,
$$\lim_{x\to a^\pm}\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x-a}=\pm\infty$$
de sorte que la fonction présente une asymptote verticale en $x=a$.

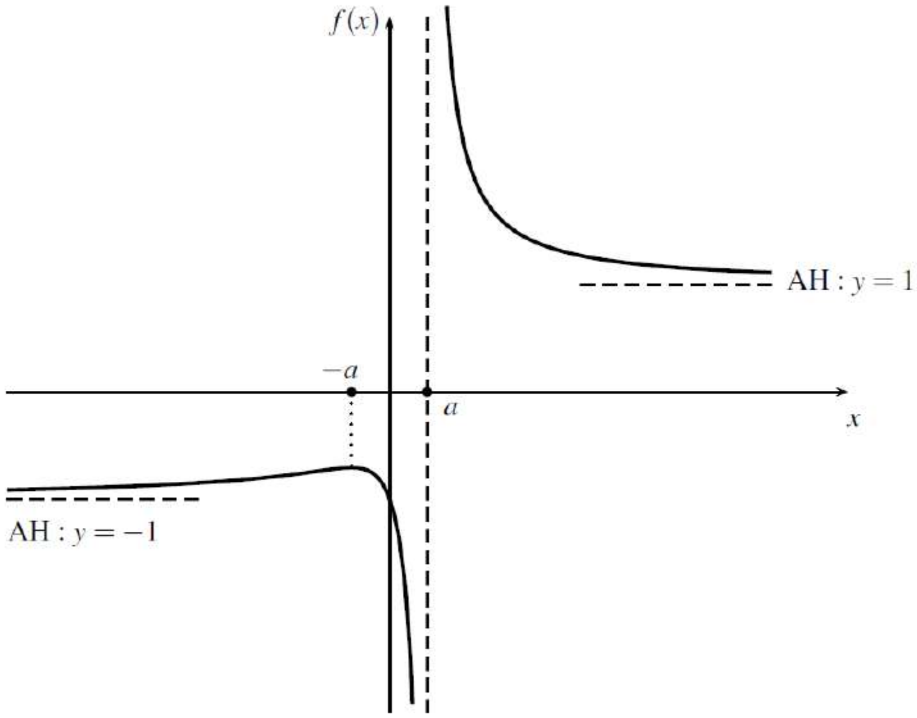
Il n'y a pas d'asymptote oblique puisque la fonction possède des asymptotes horizontales en $+\infty$ et $-\infty$.

iv. La dérivée de $f$ est donnée par
$$f'(x)=\frac{\dfrac{x(x-a)}{\sqrt{x^2+a^2}}-\sqrt{x^2+a^2}}{(x-a)^2}=\frac{x(x-a)-(x^2+a^2)}{(x-a)^2\sqrt{x^2+a^2}}$$
$$=\frac{-ax-a^2}{(x-a)^2\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{-a(x+a)}{(x-a)^2\sqrt{x^2+a^2}}$$
dont le seul zéro est $x=-a$. Les variations de $f$ sont décrites par

| $x$ | | $-a$ | | $a$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\nexists$ | $-$ |
| $f$ | $\nearrow$ | Max | $\searrow$ | $\nexists$ | $\searrow$ |

La fonction étant croissante à gauche de $-a$ et décroissante à droite, elle présente un maximum local en ce point avec $f(-a)=-\sqrt{2}/2>-1$.

v. En utilisant les résultats dégagés ci-dessus, le graphique de $f$ peut être esquissé de la façon suivante pour toutes les valeurs du paramètre $a$.




Le 8 septembre 2018

## EXANA483 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.

Soit

$$I_n = \int_1^{\sqrt{e}} x\left(\ln x^2\right)^n dx$$

i. Calculez $I_0$

ii Calculez $I_1$.

iii Montrez que, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, il existe une constante $\alpha$ telle que

$$I_n = \frac{1}{2}\int_1^{\alpha} (\ln x)^n \, dx$$

iv Montrez que, quel que soit $n \in \mathbb{N}_0$, $I_n = \frac{e}{2} - nI_{n-1}$

---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ, Prof. Vincent DENOEL:** https://www.facsa.uliege.be/upload/docs/application/pdf/2018-09/question_analysesept2018_a_juillet_2010-2.pdf

i.

$$I_0 = \int_1^{\sqrt{e}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{e}} = \frac{e}{2} - \frac{1}{2}$$

ii.

$$I_1 = \int_1^{\sqrt{e}} x \ln x^2 \, dx$$

En posant $x^2 = t$, $2x\,dx = dt$, l'intégrale peut être transformée en

$$I_1 = \frac{1}{2}\int_1^{e} \ln t \, dt$$

Par application de la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f g' \, dt = \left[fg\right]_a^b - \int_a^b f' g \, dt$$

avec

$$\begin{cases} f = \ln t \\ g' = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = \frac{1}{t} \\ g = t \end{cases}$$

iii. En posant $x^2 = t$, $2x\,dx = dt$, l'intégrale $I_n$ peut être transformée en

$$I_n = \int_1^{\sqrt{e}} x(\ln x^2)^n dx = \frac{1}{2}\int_a^b \ln^n t\; dt$$

où les bornes $a$ et $b$ sont données respectivement par

$$a = 1^2, \qquad b = (\sqrt{\mathrm{e}})^2 = \mathrm{e}$$

de sorte que, comme attendu,

$$I_n = \frac{1}{2}\int_1^{\alpha} \ln^n x\, dx \qquad \text{avec} \qquad \alpha = \mathrm{e}.$$

iv. Repartant de l'expression de $I_n$ obtenue ci-dessus, on a

$$I_n = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} \ln^n x\, dx$$

Par application de la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f g' dx = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f' g\, dx$$

avec

$$\begin{cases} f = \ln^n x \\ g' = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = \dfrac{n \ln^{n-1} x}{x} \\ g = x \end{cases}$$

on obtient

$$I_1 = \frac{1}{2}\left(\Big[t \ln t\Big]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} dt\right) = \frac{1}{2}\Big[t \ln t - t\Big]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}$$

De façon alternative, l'intégrale peut être transformée dès le départ selon

$$I_1 = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} x \,\ln x^2\, dx = 2\int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} x\, \ln x\, dx$$

Par application de la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f g' dx = \Big[fg\Big]_a^b - \int_a^b f' g\, dx$$

avec

$$\begin{cases} f = \ln x \\ g' = x \end{cases} \qquad \begin{cases} f' = \dfrac{1}{x} \\ g = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_1 &= 2\left(\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} - \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \frac{x}{2}\, dx\right) = \left[x^2 \ln x - \frac{x^2}{2}\right]_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} \\ &= \mathrm{e} \ln\sqrt{\mathrm{e}} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2}\left(\left[x \ln^n x\right]_1^{\mathrm{e}} - n\int_1^{\mathrm{e}} \ln^{n-1} x \, dx\right) \\ &= \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{n}{2}\int_1^{\mathrm{e}} \ln^{n-1} x \, dx \end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$I_{n-1} = \int_1^{\sqrt{\mathrm{e}}} x \, \left(\ln x^2\right)^{n-1} \, dx$$

peut s'écrire, en vertu du résultat obtenu en iii., sous la forme

$$I_{n-1} = \frac{1}{2}\int_1^{\mathrm{e}} \ln^{n-1} x \, dx$$

de sorte que

$$I_n = \frac{\mathrm{e}}{2} - n\, I_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

On peut vérifier que les valeurs calculées pour $I_0$ et $I_1$ vérifient la formule ci-dessus. On a en effet

$$I_1 = \frac{\mathrm{e}}{2} - I_0 = \frac{\mathrm{e}}{2} - \frac{\mathrm{e}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

---

Le 8 septembre 2018

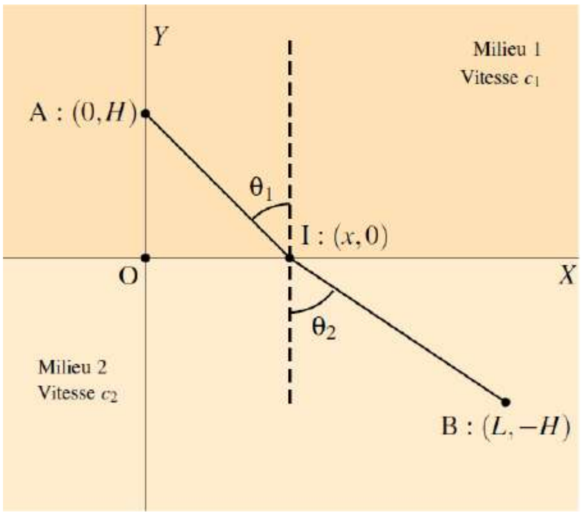
## EXANA484 – FACSA, ULiège, Liège, juillet 2018.

Pour aller d'un point à un autre, la lumière suit le chemin le plus rapide. Lorsque le milieu est homogène et que la vitesse de propagation de la lumière est donc constante, le rayon lumineux suit une trajectoire rectiligne entre les deux points. Dans ce cas le chemin le plus rapide est également le plus court. Dans un milieu non homogène, par contre, le chemin le plus rapide ne correspond pas nécessairement au chemin le plus court de sorte que la propagation n'a pas lieu en ligne droite.

La loi de la réfraction de Snell-Descartes peut être obtenue par application de ce principe. Pour établir cette loi, on considère deux milieux homogènes séparés par une interface plane d'équation $y = 0$. Dans les deux milieux, la lumière se propage en ligne droite à des vitesses $c_1$ et $c_2$. Au passge de l'interface plane entre les deux milieux, le rayon est réfracté et change de direction.

On considère en particulier le rayon lumineux allant du point $A$ de coordonnées $(O, H)$ au point $B$ de coordonnées $(L, -H)$ où $H$ et $L$ sont des constantes strictement positives.

Ce problème est donc caractérisé par les quatre paramètres $H, L, c_1$ et $c_2$. On note $x \in \mathbb{R}$, la coordonnée horizontale du point $I$ où le rayon est incident à l'interface.




i. Exprimez en focntion de $x$ et des quatre paramètre du problème le temps de parcours du rayon allant du point $A$ au point $B$.

ii. Montrez qu'il est nécessaire que le trajet du rayon lumineux soit tel que (voir figure).

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2}$$

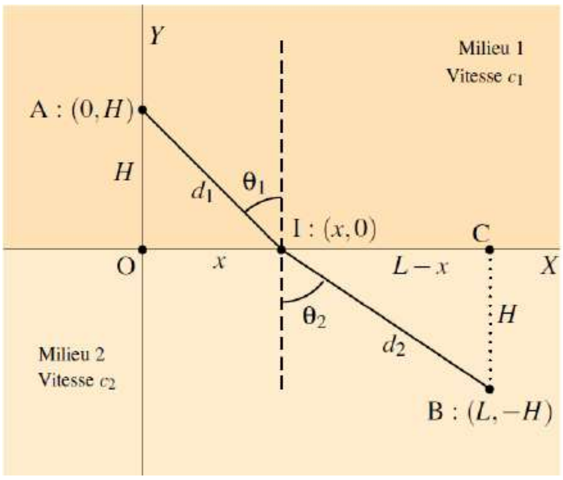
---

**Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof.Eric J.M. DELHEZ, Prof. Vincent DENOEL:** https://www.facsa.uliege.be/upload/docs/application/pdf/2018-09/question_analysesept2018_a_juillet_2010-2.pdf

i. Le temps de parcours dans un milieu donné est obtenu en divisant la distance parcourue par la vitesse. On a donc

$$t = \frac{d_1}{c_1} + \frac{d_2}{c_2}$$

où les distances parcourues dans les deux milieux correspondent respectivement aux hypothénuses des triangles AOI et BCI, le point C étant la projection sur l'axe $OX$ du point B.




Soit

$$t(x) = \frac{\sqrt{H^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2+H^2}}{c_2}$$

ii. Le chemin emprunté par la lumière minimise le temps $t$ de parcours. Pour étudier les variations de $t$ et identifier les éventuels extrema, on calcule

$$t'(x) = \frac{x}{c_1\sqrt{H^2+x^2}} - \frac{(L-x)}{c_2\sqrt{(L-x)^2+H^2}}$$

Les solutions de $t'(x) = 0$ (points stationnaires) sont telles que

$$\frac{x}{c_1\sqrt{H^2+x^2}} = \frac{(L-x)}{c_2\sqrt{(L-x)^2+H^2}}$$

ou encore

$$\frac{\sin\theta_1}{c_1} = \frac{\sin\theta_2}{c_2} \qquad (\dagger)$$

puisque

$$\sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{H^2+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta_2 = \frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+H^2}}$$

Puisque la fonction $t$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle ne peut présenter un minimum qu'en un point où sa dérivée s'annule. La condition $(\dagger)$ doit donc nécessairement être remplie par le rayon lumineux.

## EXANA485 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2018.

Soit la fonction $f$ définie par $f(x)=1+2\ln\left|\sqrt{|x|}-1\right|$.

a) Déterminer le domaine de définition et les zéros de la fonction $f$.

b) La fonction $f$ est-elle dérivable en $x=0$? Justifier votre réponse en utilisant la définition de la dérivée de $f$ en $x=0$.

c) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.

d) Déterminer une équation cartésienne de la tangente au graphique de $f$ au point d'abscisse 4.

e) Déterminer les coordonnées des points de maximum, des points de minimum et des points d'inflexion de $f$. Justifier vos réponses.

f) Tracer le graphique de $f$ en utilisant les résultats précédents.

Indication : on pourra utiliser l'approximation $e^x \simeq 1+x+\frac{1}{2}x^2 \quad (-1<x<1)$.

---

a) $dom\ f:\mathbb{R}\setminus\{\pm 1\}$

b) Remarquons que la fonction est paire. On étudiera donc pour $x\geq 0$.

Calculons la dérivée à droite.

$$f_D'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1+2\ln\left|\sqrt{x}-1+2\ln 1\right|}{x-0}=2\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left|\sqrt{x}-1\right|}{x}=\frac{0^-}{0^+}$$

Le dénominateur tend plus vite vers 0 que le numérateur. Il suffit de remplacer par $x=0.1, x=0.01,\ldots$pour le constater. On peut le vérifier aussi en comparant les valeurs absolues du numérateur et du dénominateur pour $0<x<1$:

$$\left|\ln\left|\sqrt{x}-1\right|\right|\overset{?}{<}x\Rightarrow\left|\underbrace{\sqrt{x}-1}_{<0}\right|\overset{?}{<}e^x\simeq 1+x+\frac{1}{2}x\Rightarrow 1-\sqrt{x}\overset{?}{<}1+x+\frac{1}{2}x\Rightarrow-\sqrt{x}<x+\frac{1}{2}x$$

La dernière relation est toujours vérifiée. On conclut que $f_D'(0)=-\infty$

En répétant le même raisonnement pour la dérivée à gauche, on a

$$f_G'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1+2\ln\left|\sqrt{x}-1+2\ln 1\right|}{x-0}=2\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln\left|\sqrt{x}-1\right|}{x}=\frac{0^-}{0^-}=+\infty$$

Les dérivées à droite et à gauche étant différentes, la fonction $f$ n'est pas dérivable en $x=0$

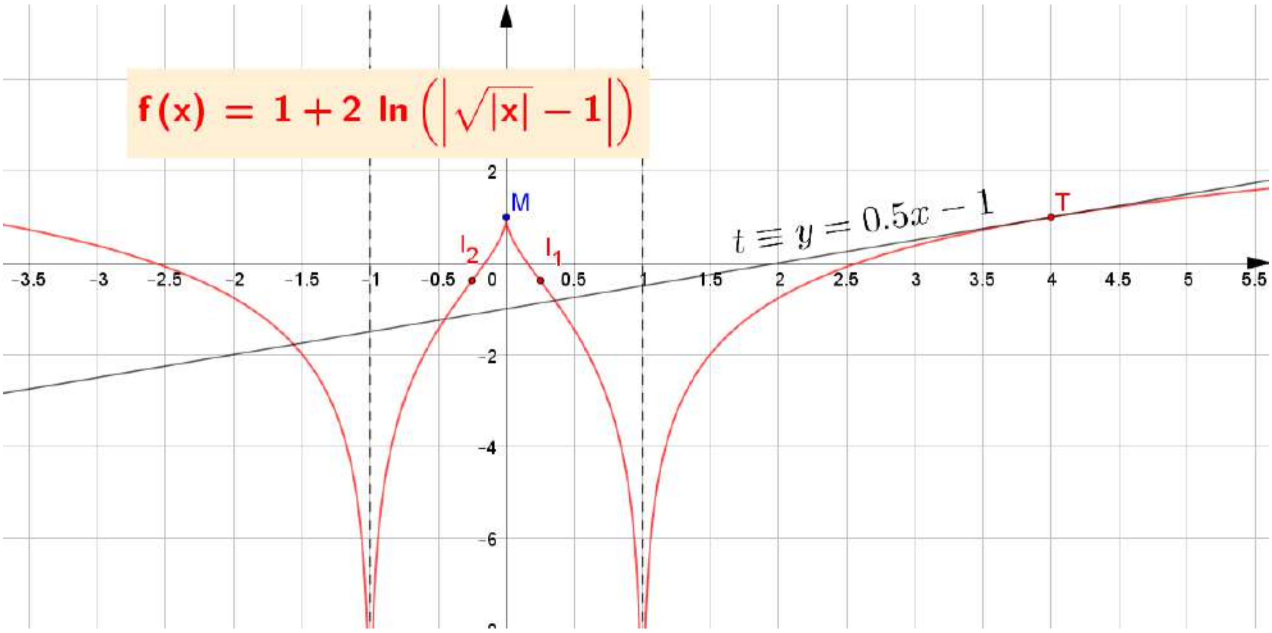
c) Pour $x>0$, $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x}-1}.\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{x-\sqrt{x}}$. $f'$ n'est pas définie pour $x=0$ ou 1 et n'est jamais nulle.

$$f''(x)=\frac{-1}{\left(x+\sqrt{x}\right)^2}.\left(1-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{-2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}\left(x-\sqrt{x}\right)^2}$$

d) $f(4)=1+2\ln\left|\sqrt{4}-1\right|=1,\ f'(4)=\frac{1}{4-\sqrt{4}}=\frac{1}{2}\Rightarrow t\equiv y-1=\frac{1}{2}(x-4)\Rightarrow t\equiv y=\frac{1}{2}x-1$

e) Tableau des variations

| | | $-1$ | | $-1/4$ | | $0$ | | $1/4$ | | $1$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $-$ | $\vert$ | $+$ | $+$ | $+$ | $+\infty \vert -\infty$ | $-$ | $-$ | $-$ | $\vert$ | $+$ |
| $f''$ | $-$ | $\vert$ | $-$ | $0$ | $+$ | $\vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\vert$ | $-$ |
| $f$ | $\searrow$ | $-\infty \vert -\infty$ | $\nearrow$ | $I$ | $\nearrow$ | $Max$ | $\searrow$ | $I$ | $\searrow$ | $-\infty \vert -\infty$ | $\nearrow$ |
| | $\cap$ | $AV$ | $\cap$ | $(-0.25;-0.386)$ | $\cup$ | $(0,1)$ | $\cup$ | $(0.25;-0.386)$ | $\cap$ | $AV$ | $\cap$ |




Le 20 septembre 2017

## EXANA486- EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2018.

a) Calculer :

a) $\int_{-\pi/10}^{\pi/10} \left| \sin(30x) \right| dx;$

b) $\int_{-\pi/10}^{\pi/10} \sin|30x|\, dx;$

c) $\int_{-\pi/10}^{\pi/10} \sin^7(30x)\, dx;$

d) $\int_{-\pi/10}^{\pi/10} \left| \cos|30x| \right| dx.$

b) Soit l'intégrale $I_{p,q} = \int_0^2 x^p (2-x)^q\, dx \qquad (p,q \in \mathbb{N})$

a) Calculer $I_{0,8}$.

b) Etablir une formule exprimant $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p-1,q+1}$, $p$ et $q$.

c) En déduire $I_{2,6}$

---

a) $\sin(30x)$ est de période $\dfrac{\pi}{15}$; $\sin|30x|$ est de période $\dfrac{\pi}{30}$.

a) $f_1(x) = |\sin(30x)|$ est toujours $\geq 0$ et est une fonction paire de période $\dfrac{\pi}{30}$.

Sur l'intervalle, $\left[-\dfrac{\pi}{10}, \dfrac{\pi}{10}\right]$, il y a 6 périodes. (Voir figure 1)

$$I_1 = \int_{-\pi/10}^{\pi/10} \left| \sin(30x) \right| dx = 6\int_0^{\pi/30} \sin(30x)\, dx = -6\left[\frac{\cos(30x)}{30}\right] = -\frac{1}{5}(-1-1) = \boxed{\frac{2}{5}}$$

b) $f_2(x) = \sin|30x|$ est une fonction paire de période $\dfrac{\pi}{15}$ (Voire figure 2)

$$I_2 = \int_{-\pi/10}^{\pi/10} \sin|30x|\, dx = 2\int_0^{\pi/10} \sin|30x|\, dx = 2\left[\int_0^{\pi/30} \sin|30x|\, dx + \underbrace{\int_{\pi/30}^{\pi/10} \sin|30x|\, dx}_{=0}\right]$$

$$= -2\left[\frac{\cos(30x)}{30}\right]_0^{\pi/30} = -\frac{1}{10}(-1-1) = \boxed{\frac{2}{15}}$$

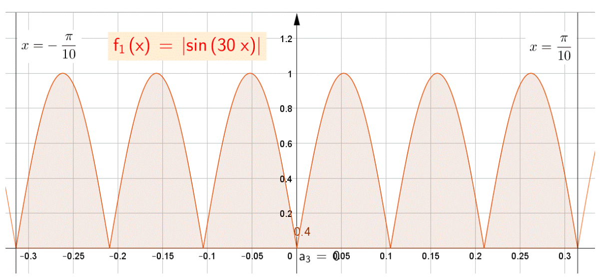


Figure 1

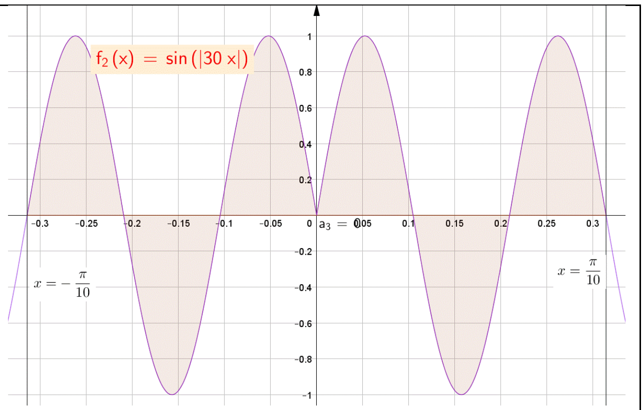


Figure 2

c) $f_3(x)=\sin^7(x)$ est une fonction impaire de période $\dfrac{\pi}{15}$.

Sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{10},\dfrac{\pi}{10}\right]$, il y a 3 périodes. (Voir figure 3)

$$I_3=\int_{-\pi/10}^{\pi/10}\sin^7(x)\,dx=\boxed{0}$$

d) $f_4(x)=\left|\cos|30x|\right|$ est une fonction paire toujours positive de période $\dfrac{\pi}{30}$

Sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{10},\dfrac{\pi}{10}\right]$, il y a 12 demi-périodes. (Voir figure 3)

$$I_4=\int_{-\pi/10}^{\pi/10}\left|\cos|30x|\right|dx=12\int_0^{\pi/60}\cos(30x)\,dx=12\left[\frac{\sin(30x)}{30}\right]_0^{\pi/60}$$

$$=\frac{12}{30}(1-0)=\boxed{\frac{2}{5}=I_1}$$

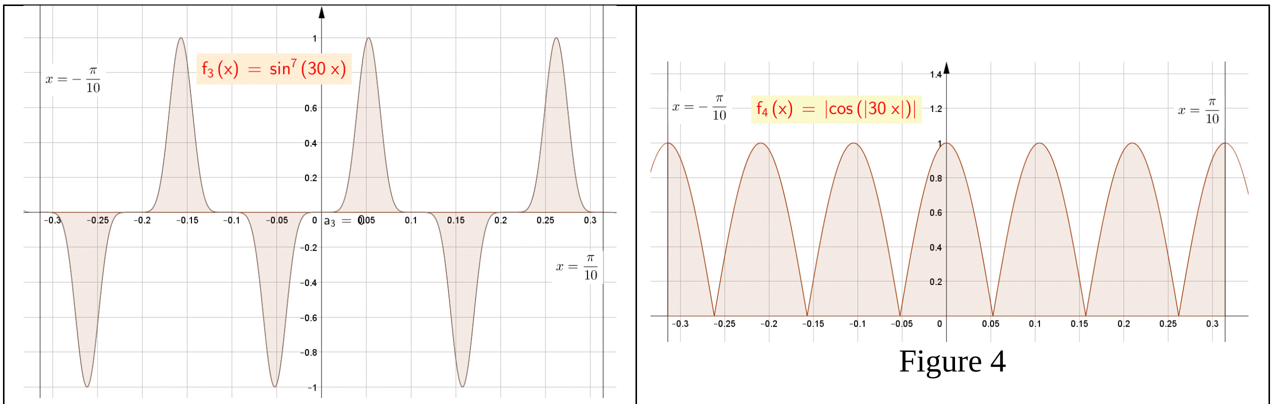



Figure 3 Figure 4

b) $I_{p,q}=\int_0^2 x^p(2-x)^q\,dx$

a) $I_{0,8}=\int_0^8(2-x)^8\,dx=-\left[\frac{(2-x)^9}{9}\right]_0^9=-\frac{1}{9}\left(0-2^9\right)=\boxed{\frac{2^9}{9}}$

b) Faisons une intégration par parties :

$$I_{p,q}=\int_0^2 x^p(2-x)^q\,dx$$

$$f=x^p \qquad f'=px^{p-1}$$

$$g'=(2-x)^q \qquad g=-\frac{(2-x)^{q+1}}{q+1}$$

$$\Rightarrow \qquad I_{p;q}=\underbrace{-\left[\frac{x^p(2-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^2}_{=0}+\frac{p}{q+1}\int_0^2 x^{p-1}(2-x)^{q+1}\,dx=\boxed{\frac{p}{q+1}I_{p-1,q+1}}$$

c) $I_{2,6}=\frac{2}{7}I_{1,7}=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{8}I_{0,8}=\frac{2}{7}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{2^9}{9}=\boxed{\frac{128}{63}}$

## EXANA487- EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2018.

Soit la fonction $f$ définie par $f(x) = 2\sin\left(\dfrac{2\pi}{2}\cos x\right)$

a) Déterminer le domaine de définition, la parité éventuelle et la période $A$ de $f$.

b) Déterminer les zéros de $f$ sur $[0, \pi]$

c) Calculer $f'(x)$

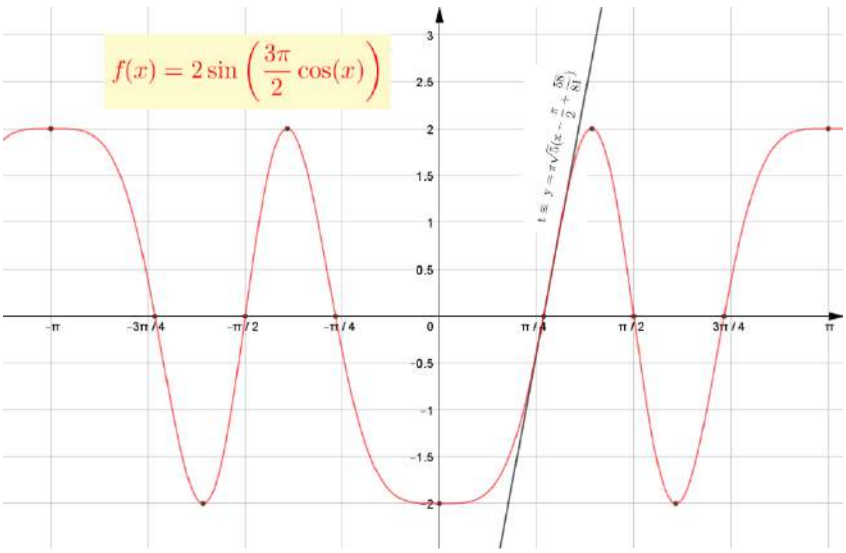
d) Déternmier sur $[0, \pi]$ les coordonnées des points de maximum de $f$ et les coordonnées des points de minimum de $f$. Justifier votre réponse.

e) Déterminer, sous la forme la plus simple possible, une équation cartésienne de la tangente au graphique de $f$ au point abscisse $\arccos\dfrac{2}{3}$.

f) Tracer le graphique de $f$ dans $[-\pi, \pi]$ en utilisant les résultats précédents.

Indication : on pourra utiliser l'approximation $\arccos x \simeq \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{1}{6}x^3 \quad \left(-\dfrac{3}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4}\right)$.

---



a) $Dom\ f = \mathbb{R}$

Parité : $f(-x) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\cos(-x)\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\cos x\right) = f(x) \Rightarrow f$ est paire.

Période : $T = 2\pi$ car cos est une fonction de période $2\pi$.

b) $2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\cos x\right) = 0$

b.1) $\frac{3\pi}{2}\cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$

b.2) $\frac{3\pi}{2}\cos x = k\pi \Rightarrow \cos x = \frac{2k}{3}$

- $\cos x = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow x = \arccos\frac{2}{2} \simeq 0.841$ rad ($48.19°$)
- $\cos x = -\frac{2}{3} \Rightarrow x = \arccos -\frac{2}{3} \simeq 2.301$ rad ($131.81°$)

Dans $[0,\pi]$, les racines sont donc $\left\{0.841, \frac{\pi}{2}, 2.301\right\}$

c) $f'(x) = 2\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos x\right).\frac{3\pi}{2}(-\sin x) = -3\pi\sin x.\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos x\right)$

c.1) $\sin x = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $\pi$

c.2) • $\frac{3\pi}{2}\cos x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x = \arccos\frac{1}{3} \quad \simeq 1.231$ rad ($70.53°$)

• $\frac{3\pi}{2}\cos x = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \arccos -\frac{1}{3} \simeq 1.911$ rad ($109.47°$)

Tableau des variations

| | 0 | | 1.231 | | 1.911 | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | 0 | + | 0 | − | 0 | + | 0 |
| $f$ | $m$ $(0,0)$ | ↗ | $M$ $(1.231, 2)$ | ↘ | $m$ $(1.911, -2)$ | ↗ | $M$ $(\pi, 2)$ |

e) L'équation de la tangente à $f$ en $x = a$ est donnée par $t \equiv y - f(a) = f'(a)(x-a)$ avec $a = \arccos\frac{2}{3}$.

Appliquons l'approximation proposée : $\arccos\frac{2}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{\pi}{2} - \frac{58}{81}$.

D'autre part, pour $a = \arccos\frac{2}{3}$ :

$f(a) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\cos\arccos\frac{2}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}.\frac{2}{3}\right) = 2\sin\pi = 0$

$f'(a) = -3\pi\sin\arccos\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos\arccos\frac{2}{3}\right)$.

- $\sin\arccos\frac{2}{3} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$ car $\sin\arccos\alpha = \sqrt{1-\alpha^2}$
- $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\cos\arccos\frac{2}{3}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2}.\frac{2}{3}\right) = \cos\pi = -1$

$\Rightarrow f'(a) = -3\pi.\frac{\sqrt{5}}{3}.(-1) = \pi\sqrt{5}$

L'équation de la tangente est donc : $t \equiv y = \pi\sqrt{5}\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{58}{81}\right) \simeq 7.025x - 6.004$

(L'équation sans l'approximation est $y = 7.025x - 5.9084$)

## EXANA488 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2018.

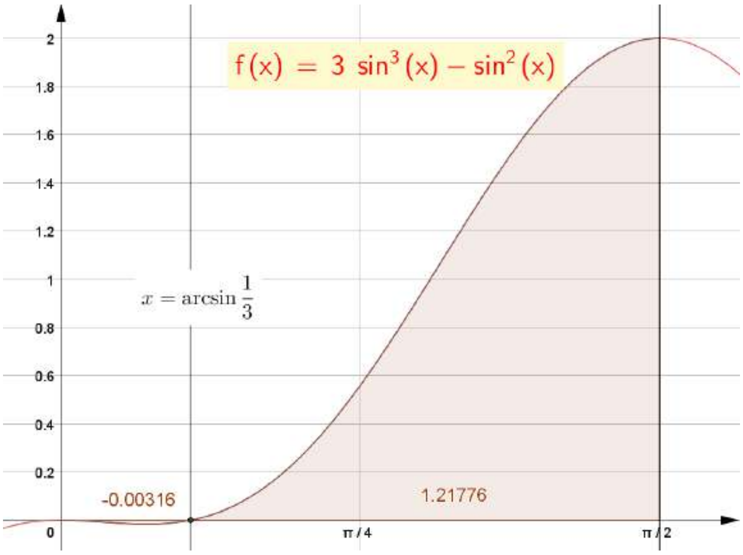
a) Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine $O$ et d'axes $x$ et $y$, on considère le graphique de la fonction $f$ définie par $f(x) = -3\sin^3 x - \sin^2 x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$

1) Calculer $\int f(x)\,dx$.

2) Calculer l'aire $A$ de la surface comprise entre la droite $y = 0$, le graphique de $f$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

b) Calculer $\int \frac{\left(\ln \sqrt[3]{x}\right)}{x^5}\,dx$

---



a) 1) $I=\int 3\sin^3 x-\sin^2 x\,dx=3\underbrace{\int \sin^3 x\,dx}_{I_1}-\underbrace{\int \sin^2 x\,dx}_{I_2}$

$I_1=\int \sin^3 x\,dx=\int \sin x\left(1-\cos^2 x\right)dx=\int \sin x\,dx-\int \sin x\cos^2 x\,dx=-\cos x+\dfrac{1}{3}\cos^3 x$

$I_2=\int \sin^2 x\,dx=\int \dfrac{1-\cos 2x}{2}dx=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{4}\sin 2x$

$\Rightarrow I=-3\cos x+\cos^3 x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x+C$

2) Notons que la fonction s'annule dans $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. En effet,

$$3\sin^3 x-\sin^2 x=0\Rightarrow \sin^2 x\left(3\sin x-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\arcsin\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$f$ est négative sur $\left]0,\arcsin\dfrac{1}{3}\right[$ et positive sur $\left]\arcsin\dfrac{1}{3},\dfrac{\pi}{2}\right[$

On aura donc : $A=-\int_0^{\arcsin\frac{1}{3}} f(x)\,dx+\int_{\arcsin\frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$

• $A_1=-\left[-3\cos x+\cos^3 x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\arcsin\frac{1}{3}}$

Or $-3\cos\arcsin\dfrac{1}{3}=-3\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=-2\sqrt{2}$

$+\cos^3\arcsin\dfrac{1}{3}=\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}\right)^3=\dfrac{16\sqrt{2}}{27}$

$+\dfrac{1}{4}\sin 2x=\dfrac{1}{2}\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}\sin\arcsin\dfrac{1}{3}.\cos\arcsin\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{3}.\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{9}$

$A_1=-\left(-2\sqrt{2}+\dfrac{16\sqrt{2}}{27}-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{9}\right)+\left(-3+1+0+0\right)$

$=-\left(-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}-\dfrac{35\sqrt{2}}{27}\right)-2=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}-\dfrac{54-35\sqrt{2}}{27}\simeq 3.158\times 10^{-3}$

• $A_2=\left[-3\cos x+\cos^3 x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x\right]_{\arcsin\frac{1}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

$=\left(0+0-\dfrac{\pi}{4}+0\right)-\left(-\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}-\dfrac{35\sqrt{2}}{27}\right)=\dfrac{35\sqrt{2}}{27}-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}\simeq 1.21776$

$\Rightarrow A=\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}-\dfrac{54-35\sqrt{2}}{27}+\dfrac{35\sqrt{2}}{27}-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{1}{3}$

$=\boxed{\arcsin\dfrac{1}{3}+\dfrac{70\sqrt{2}-54}{27}-\dfrac{\pi}{4}\simeq 1.220918}$

b) $I=\int \frac{\left(\ln\sqrt[3]{x}\right)^2}{x^5}\,dx=\frac{1}{9}\int \frac{\ln^2 x}{x^5}\,dx$

$$I_1=\int \frac{\ln^2 x}{x^5}\,dx \qquad \begin{array}{ll} f=\ln^2 x & f'=2\ln x.\frac{1}{x} \\ g'=\frac{1}{x^5} & g=-\frac{1}{4x^4} \end{array}$$

$$\Rightarrow I_1=-\frac{\ln^2 x}{4x^4}+\frac{1}{2}\int \frac{\ln x}{x^5}\,dx$$

$$I_2=\int \frac{\ln x}{x^5}\,dx \qquad \begin{array}{ll} f=\ln x & f'=\frac{1}{x} \\ g'=\frac{1}{x^5} & g=-\frac{1}{4x^4} \end{array}$$

$$\Rightarrow I_2=-\frac{\ln x}{4x^4}+\frac{1}{4}\int \frac{1}{x^5}\,dx=-\frac{\ln x}{4x^4}-\frac{1}{4}.\frac{1}{4x^4}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{9}\left[-\frac{\ln^2 x}{4x^4}+\frac{1}{2}\left(-\frac{\ln x}{4x^4}-\frac{1}{16x^4}\right)\right]=\boxed{-\frac{8\ln^2 x+4\ln x+1}{288x^4}+C}$$

Le 23 septembre 2018

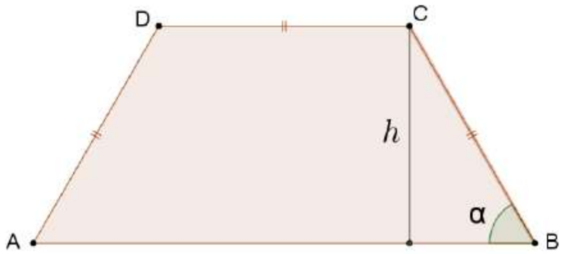
# EXANA489 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2018.

Un trapèze isocèle $ABCD$ dont les côtés $AB$ et $DC$ sont parallèles est tel que les longueurs de ses côtés satisfont :

$$\|BC\| = \|CD\| = \|DA\| = 20 < \|AB\|$$

Soit $\alpha = ABC$. Pour quelle valeur de $\alpha$ l'aire de ce trapèze est-elle maximale et quelle est la valeur de cette aire maximale?

---




A partir de la figure, on voit immédiatement que

$$h = \|CD\| \sin\alpha \text{ et } \|AB\| = \|DC\| + 2\|CB\|\cos\alpha$$

L'aire est alors :

$$A = \frac{\|CD\|\sin\alpha\left(\|AB\| + \|DC\|\right)}{2} = \frac{\|CD\|\sin\alpha\left(2\|DC\| + 2\|CB\|\cos\alpha\right)}{2}$$
$$= 20\sin\alpha(20 + 20\cos\alpha) = 400\sin\alpha(1 + \cos\alpha)$$

Pour trouver le maximum, on dérive :

$$A' = 400\left[\cos\alpha(1+\cos\alpha) - \sin^2\alpha\right]$$
$$\Rightarrow \cos\alpha(1+\cos\alpha) - \sin^2\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$$
$$\Rightarrow \cos 2\alpha = -\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \cos(180° - \alpha)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha = 180° - \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 60°} \\ 2\alpha = -180° + \alpha \Rightarrow \alpha = -180° \text{ A rejeter.} \end{cases}$$

C'est bien un maximum.

| $\alpha$ | 0° | | 60° | | 180° |
|---|---|---|---|---|---|
| $A'$ | 800 | + | 0 | − | 0 |
| $A$ | 0 | ↗ | $M$ | ↘ | 0 |

$$\Rightarrow A = 400\sin 60°(1 + \cos 60°) = \boxed{300\sqrt{3} \simeq 519.615}$$

---

Le 23 septembre 2018