Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 49

EXANA490 – EXANA499

http://matheux.ovh

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Octobre 2018

EXANA490 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2018.

Etudier la fonction

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

avec $x \in \mathbb{R}_0^+$. Le calcul de la dérivée seconde n'est pas nécessaire.

---

1) Dom f $\mathbb{R}_0^+$

2) La fonction n'a pas de racine et est toujours positive.

3) Asymptotes

$$3.1)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\frac{-\infty}{0^+}} = e^{-\infty} = 0 \ \Rightarrow\ \text{Pas de AV en } x = 0$$

$$3.2)\ \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}}$$

$$\text{Or } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{\text{Hospital}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

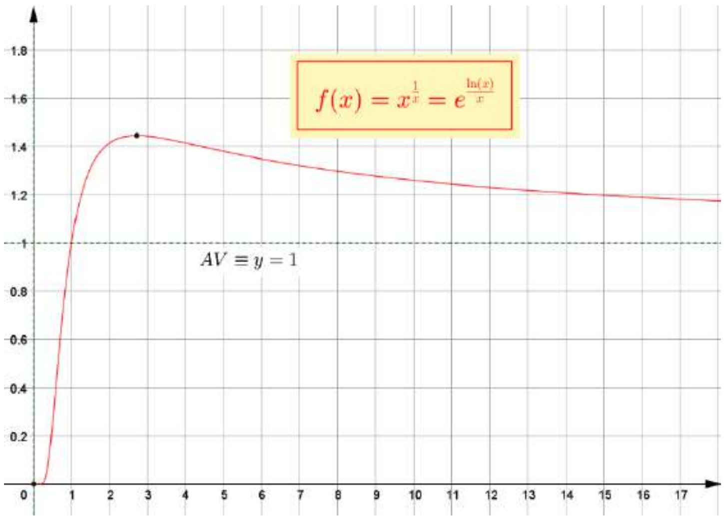
$$\Rightarrow e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Une asymptote horizontale } y = 1$$

4) $f' = e^{\frac{\ln(x)}{x}} \cdot \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ La dérivée première est nulle pour $x = e$

Tableau de signes

	0		e	
$1-\ln(x)$	/	+	0	−
f'	/	+	0	−
f	/	↗	Max	↘

$\Rightarrow$ Un maximum de coordonnées $\left(e, e^{\frac{1}{e}}\right)$



---

2 octobre 2018

EXANA491 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2018.

Soit

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx$$

avec $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer I_0 et I_1

2) Démontrez la relation suivante :

$$I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$$

3) Calculer I_6

---

1) $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 1.dx = [x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}.dx = -\left[\ln|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\ln 2$

2) Démonstration par récurrence.

Montrons que la relation est vraie pour $n = 0$, c'est-à-dire que :

$$I_2 = 1 - I_0 = 1 - \frac{\pi}{4}$$

En effet, $I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \, dx$

$$= [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

Montrons que si la relation est vraie pou n, elle est vraie pour $n+2$

$$I_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \tan^n x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \tan^n \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \, dx = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - I_n = \frac{1}{n+1} - I_n$$

3) $I_6 = \frac{1}{5} - I_4 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} - I_2\right) = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3} - (1 - I_0)\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{13}{15} - \frac{\pi}{4}$

Le 3 octobre 2018

EXANA492 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 1.

(1) Déterminer les intervalles de croissance de la fonction $f(x)=x^2\ln x$

(2) Calculer la limite suivante pour une constante réelle t

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{xt}-1-xt}{x^2}$$

(3) Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$ une fonction définie par

$$f(x)=\frac{x-1}{1+|x-1|}$$

(a) Démontrer que f est dérivable en $x=1$ et donner la valeur de $f'(1)$.

(b) La fonction f est-elle continue en $x=1$? Justifier.

(4) Calculer la primitive suivante :

$$\int\frac{dx}{x^2+4x+5}$$

Solution proposée par Nicole Berckmans

(1) $f'(x)=x(2\ln x+1)$ $\quad f\searrow$ sur $\left]0,e^{-1/2}\right]$ et $f\nearrow$ sur $\left[e^{-1/2},\to\right[$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{xt}-1-xt}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim_{x\to 0}\frac{te^{xt}-t}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\xrightarrow{\text{Hospital}}\lim_{x\to 0}\frac{t^2e^{xt}}{2}=\frac{t^2}{2}$

(3) (a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{x-1}{1+|x-1|}-0}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+|x-1|}=1$

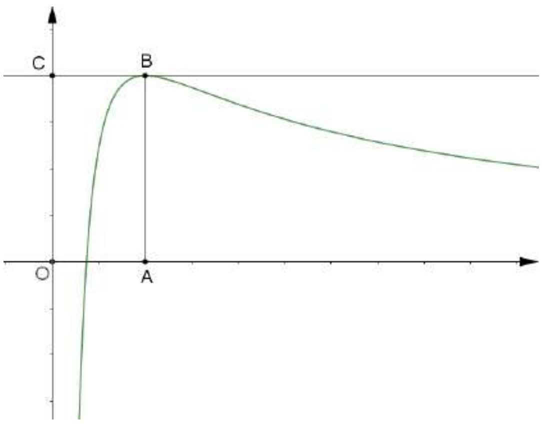
(b) Toute fonction dérivable est continue.

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int\frac{dx}{(x+2)^2+1}=\arctan(x+2)+k$

Le 14 octobre 2018

EXANA493 - EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 1.

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative C d'une fonction $f: \left]0,\infty\right[\Rightarrow \mathbb{R}$ dérivable



On dispose des informations suivantes :

– Les points A, B, C ont pour coordonnées $(1,0);(1,2);(0,2)$.

– La courbe C passe par le point B, et la droite BC est tangente à C en B.

– Il existe deux réels positifs a et b tels que pour tout réel strictement positif x,

$$f(x) = \frac{a + b\ln x}{x}$$

(1) En utilisant le graphique, donner les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$. En déduire les réels a et b.

(2) Démontrer que pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ a le même signe que $-\ln x$.

(3) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

(4) En déduire le tableau de variation de la fonction f.

(5) Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique sur l'intervalle $[0,1]$.

(6) Démontrer que la courbe C partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

Solution proposée par Nicole Berckmans

(1) $\left.\begin{array}{l} f(1)=2=a \\ f'(x)=\dfrac{b-(a+b)\ln x}{x^2};\ f'(1)=b-2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a=b=2$

(2) $f'(x)=-\dfrac{2\ln x}{x^2} \Rightarrow \text{sign}\left(f'(x)\right)=\text{sign}(-\ln x)$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} f=\left[\dfrac{-\infty}{0^+}\right]=(-\infty)(+\infty)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f=\left[\dfrac{+\infty}{+\infty}\right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2}{x}=0$

(4)

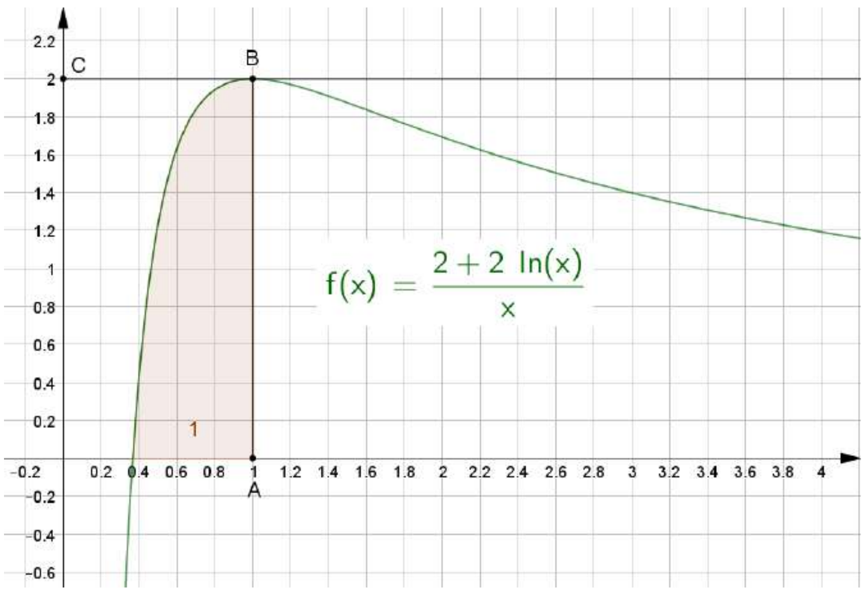
x	0		1	
$f(x)$	$/$ AV	$\nearrow$	MAX	$\searrow$ AH

(5) En vertu du théorème des valeurs intermèdiaires pour une fonction continue, elle s'annule une fois car $\lim\limits_{x\to 0} f=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} f=2$ sur $\left]0,1\right]$. Elle s'annule une seule fois car f est injective (strictement croissante).

(6) $\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{2+\ln x}{x}=\left[2\ln x+(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{1}=\left[2\ln 1+(\ln 1)^2\right]-\left[2\ln\frac{1}{e}+\left(\ln\frac{1}{e}\right)^2\right]$

$=0-(-2+1)=1$

C'est la moitié de l'aire du rectangle $OABC=2\times 1=2$



Le 14 octobre 2018

EXANA494 - EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 1.

Un panneau photovoltaïque $\ll$ monocristallin $\gg$ se compose de cellules individuels carrées de dimension x [cm], découpées dans un monocristal de silicium circulaire de diamètre d [cm]. Comme on utilise au mieux la surface disponible, $d = x\sqrt{2}$.

Le format utile des panneaux à construire est de 100×200 [cm^2], ce qui veut dire que l'on peut disposer 1×2, 2×4, 3×6... cellules carrées dans un panneau. Les cellules individuelles pourraient donc avoir comme dimensions: $x = 100; 50; 33.3; 25; 20; \ldots$ [cm].

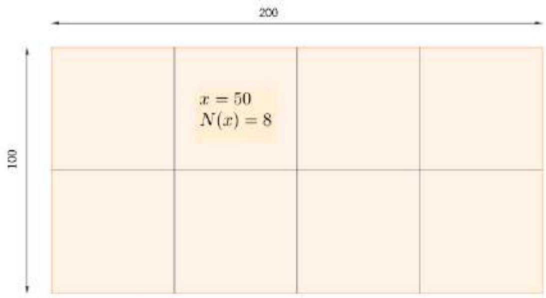
Le fabricant souhaite optimiser la dimension des cellules individuelles pour minimiser le coût de fabrication d'un panneau. Le coût lié aux cellules est la somme de deux composantes :

- La pose d'une cellule carrée par un robot à un coût fixe de 1 euro par cellule.
- La fabrication de grandes cellules est bie plus coûteux que celui de petites cellules car les conditions de croissance des cristaux sont beaucoup plus contraignantes. En pratique, le coût d'une cellule dépend non seulement de sa surface (variant en d^2), mais d'un autre facteur d^2 qui tient compte des coûts technologiques supplémentaires. En pratique, le coût d'un cellule en euros suit la loi :

  αd^4 ou $\dfrac{1}{\alpha} = 4000$ [cm^2]

Quelle valeur de x [cm] doit choisir notre fabricant?

Solution proposée par Nicole Berckmans



Nombre de carrés : $N(x) = \left(\dfrac{100}{x}\right)^2 \times 2$

La fonction coût est : $C(x) = N(x)\left[1 + \dfrac{(\sqrt{2}x)^4}{40000}\right] = \dfrac{20000}{x^2}\left(\dfrac{10000 + x^4}{10000}\right)$

La dérivée est $\dfrac{dC}{dx} = -\dfrac{4000}{x^3} + 4x$. Elle s'annule pour $x = 10$.

On a bien un minimum car la dérivée seconde est positive :

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{120000}{x^4} + 4 > 0$$

Conclusion : le coût est minimal pour $x = 10$

Le 14 octobre 2018

EXANA495 – EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 2.

(1) Déterminer le domaine de définition de la fonction $f(x)=\ln\left(\dfrac{\ln x}{x^2}\right)$

(2) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right).$$

(3) Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}$$

(4) Soit une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ayant les propriétés suivantes :

(a) $f(0)=0$

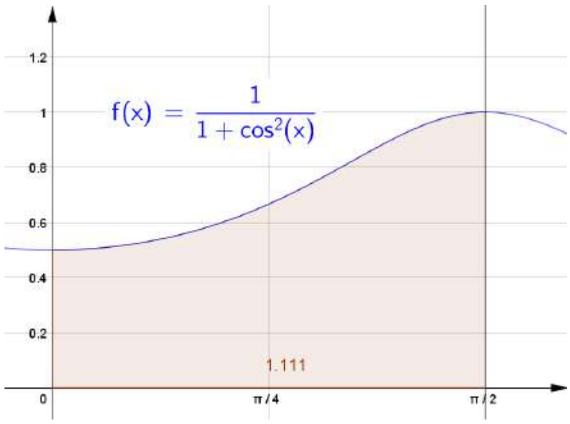
(b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$

(c) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$

(d) $\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)-x\right)=0$

Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$

Solution proposée par Marc Decoux



(1) CE: $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$ et $x > 0$ et $\dfrac{\ln x}{x^2} > 0 \Rightarrow \ln x > 0 \Rightarrow x > 1$

Donc : $\boxed{dom\ f :]1, \rightarrow[}$

$$(2) \lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x - x+1}{(x-1)\ln x}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x\to 1}\frac{\ln x + x.\frac{1}{x}-1}{1.\ln x+(x-1).\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x - 1-\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=\boxed{\frac{1}{2}}$$

(3) $(a)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}$

On pose $t=\tan x \Rightarrow dt=(1+\tan^2 x)\,dx=(1+t^2)\,dx \Rightarrow dx=\dfrac{dt}{1+t^2}$

De plus : $1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow \cos^2 x=\dfrac{1}{1+\tan^2 x}=\dfrac{1}{1+t^2}$

$$\Rightarrow 1+\cos^2 x = 1+\frac{1}{1+t^2}=\frac{2+t^2}{1+t^2}\Rightarrow \frac{1}{1+\cos^2 x}=\frac{1+t^2}{2+t^2}$$

$$(b)\int\frac{1+t^2}{2+t^2}.\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{dt}{2+t^2}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+k$$

(c) On en déduit que : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$=\lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right]_0^{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\left(\arctan\frac{\tan a}{\sqrt{2}}-\arctan\frac{0}{\sqrt{2}}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\lim_{a\to\frac{\pi}{2}}\arctan(+\infty)=\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\pi}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{2}\pi}{4}}$$

$$(4)\ f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-0}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\boxed{0}$$

EXANA496- EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 2.

Soit la fonction f définie sue $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+e^{-2x}}$$

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé la courbe représentative C de la fonction f et la droite Δ d'équation $y = 3$

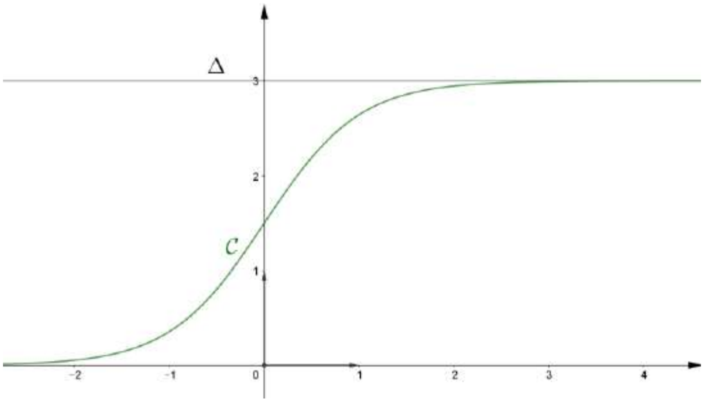


Fig 1 : Courbe représentative C.

On défnit également la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$hx = 3 - f(x).$$

(1) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

(2) Justifier que la droite Δ est asymptote à la courbe C.

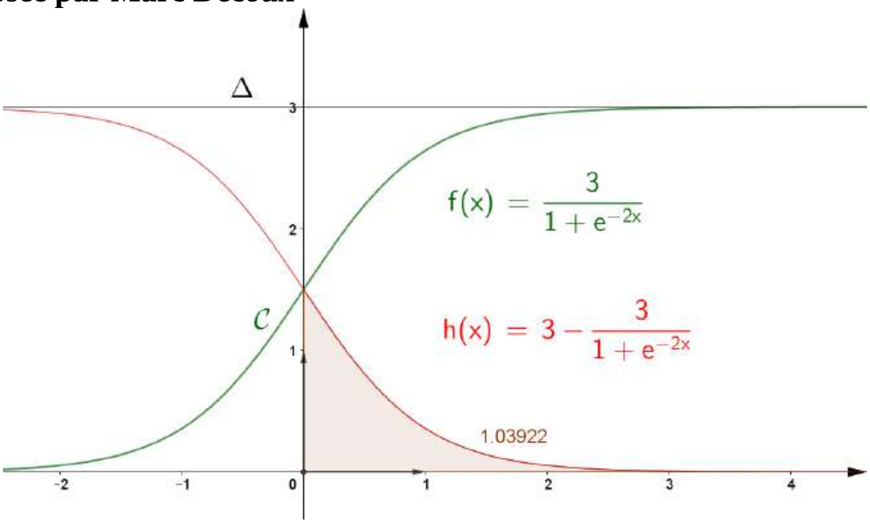
(3) Justifier que la fonction h est positive sur $\mathbb{R}$.

(4) Soit a un réel strictement positif

(a) Donner une interprétation graphique de l'intégrale $\int_0^a h(x)\, dx$ sur le graphique ci-dessus.

(b) Calculer $\int_0^4 h(x)\, dx$

Solution proposée par Marc Decoux



$(1)\ f(x)=3\left(1+e^{-2x}\right)^{-1}\Rightarrow f'(x)=-3\left(1+e^{-2x}\right)^{-2}.e^{-2x}.(-2)=\dfrac{6}{\left(1+e^{-2x}\right)^{2}e^{2x}}>0,\ \forall x$

f est donc strictement croissante.

$(2)\ dom\ f=\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{\underbrace{1+e^{-2x}}_{\to 0}}=3\Rightarrow AH_d\equiv y=3\equiv\Delta$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\underbrace{1+e^{-2x}}_{\to+\infty}}=0\Rightarrow AH_g\equiv y=0$$

$(3)\ h(x)\geq 0\Rightarrow 3-f(x)\geq 0\Rightarrow 3\geq f(x)\Rightarrow 3\geq\dfrac{3}{1+e^{-2x}}\Rightarrow 1\geq\dfrac{1}{\underbrace{1+e^{-2x}}_{>1}}$ OK.

Ou bien

$$h(x)=3-f(x)=3-\frac{3}{1+e^{-2x}}=\frac{3+3e^{-2x}-3}{1+e^{-2x}}=\frac{3e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{\frac{3}{e^{2x}}}{1+\frac{1}{e^{2x}}}=\frac{3}{1+e^{2x}}>0$$

$(4)\ (\mathrm{a})\ \int_0^a h(x)\,dx=\int_0^a\left(3-f(x)\right)dx.$

C'est l'aire comprise entre la droite Δ, la courbe C, et les droites d'équation $x=0$ et $x=a$.

$$(\mathrm{b})\ \int_0^4 h(x)\,dx=\int_0^4\left(3-\frac{3}{1+e^{-2x}}\right)dx=3\int_0^4\frac{e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=-\frac{3}{2}\left[\ln\left|1+e^{-2x}\right|\right]_0^4$$

$$=-\frac{3}{2}\left(\ln\left(1+e^{-8}\right)-\ln 2\right)=-\frac{3}{2}\ln\frac{1+\frac{1}{e^8}}{2}=-\frac{3}{2}\ln\frac{e^8+1}{2e^8}$$

$$=-\frac{3}{2}\left(\ln\left(e^8+1\right)-\left(\ln 2+\ln e^8\right)\right)=-\frac{3}{2}\left(\ln\frac{e^8+1}{2}\right)-8$$

$$=\boxed{12-\frac{3}{2}\ln\frac{e^8+1}{2}}\simeq\frac{3\ln 2}{2}$$

EXANA497- EPL, UCL, LLN, juillet 2018 série 2.

Un ingénieur souhaite réduire la section d'une conduite d'air alimentant un bâtiment. La section carrée doit passer de 20×20 $[cm^2]$. Il a fait l'essai suivant, mais le résultat est trop bruyant car des turbulences sont générées en A et B.

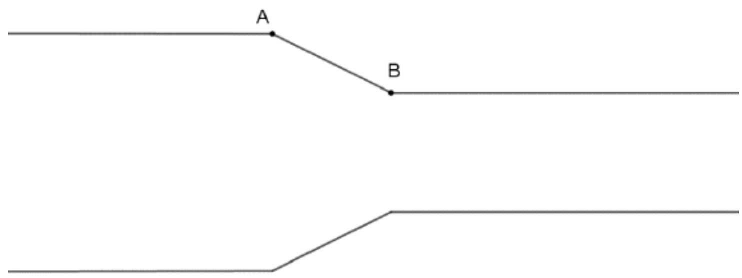


Fig 1 : Coupe selon un plan vertical parallèle à l'axe de la conduite. Les faces de la conduite sont respectivement parallèle et perpendiculaire au plan de coupe.

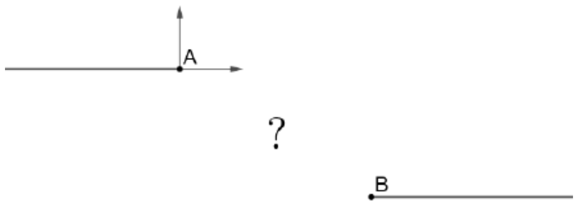
Il rencontre un collègue qui lui dit qu'il est très important de soigner le profil de la transition pour que le flux d'air soit le moins perturbé possible. Il faut d'abord éviter les angles présents en A et B. La fonction f qui décrit la forme de la conduite doit donc avoir une dérivée continue sur toute la longueur de la conduite. Ensuite, entre A et B, il est préférable que toutes les autres dérivées (f'', f''',...) soient continues en tout point.

Le collègue est appelé pour une urgence sur son téléphone et n'a malheureusement pas le temps de lui donner la solution...Le temps presse, car la production n'attend pas.

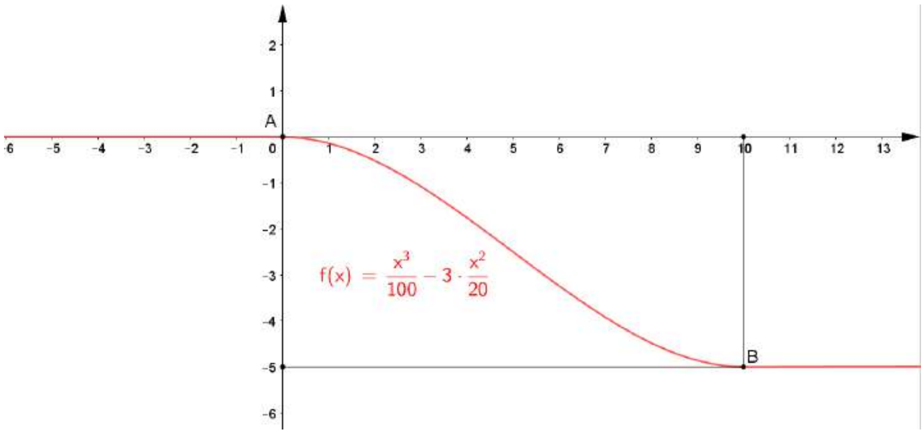
Pouvez-vous l'aider en proposant une fonction simple qui décrive la forme de la transition dans le plan de coupe?

Cette fonction doit respecter le critère f' continue partout et f'', f''',... continues en tout point entre A et B. Le point A est séparé horizontalement du point B de 10 $[cm]$ et verticalement de 5 $[cm]$.

L'axe est parallèle à la conduite et l'axe y - perpendiculaire à x - est dans le plan de coupe (voir schéma ci-dessous). Prenez la référence $(x, f(x)) = (0,0)$ en A.



Solution proposée par Marc Decoux



Pour éviter les angles en A et B, la tangente au graphe de f doit être horizontale :

$$\left.\begin{array}{l} f'(0)=0 \\ f'(10)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(x)=kx(x-10) \Rightarrow f(x)=\frac{kx^3}{3}-\frac{10kx^2}{2}+C$$

Or

$$f(0)=0 \Rightarrow C=0$$

$$f(10)=-5 \Rightarrow \frac{k10^3}{3}-\frac{10k10^2}{2}=-5 \Rightarrow 10^3k\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=-5$$

$$\Rightarrow 10^3k\frac{2-3}{5}=-5 \Rightarrow 10^3k=30$$

$$\rightarrow k=\frac{3}{100}$$

Finalement,

$$f(x)=\frac{3}{100}\frac{x^3}{3}-\frac{3}{20}x^2 \Rightarrow \boxed{f(x)=\frac{x^3}{100}-\frac{3x^2}{20}}$$

Le 14 octobre 2018

EXANA498 - EPL, UCL, LLN, septembre 2018.

(1) Déterminer $k \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ pour que l'aire A de la partie du plan limité par les courbes

$y = \sin x$, $y = \cos x$ et les droites $x = 0$ et $x = k$ soit égale à $2\sqrt{2}$.

(2) Soit f une fonction dérivable. Dérivez les fonctions suivantes :

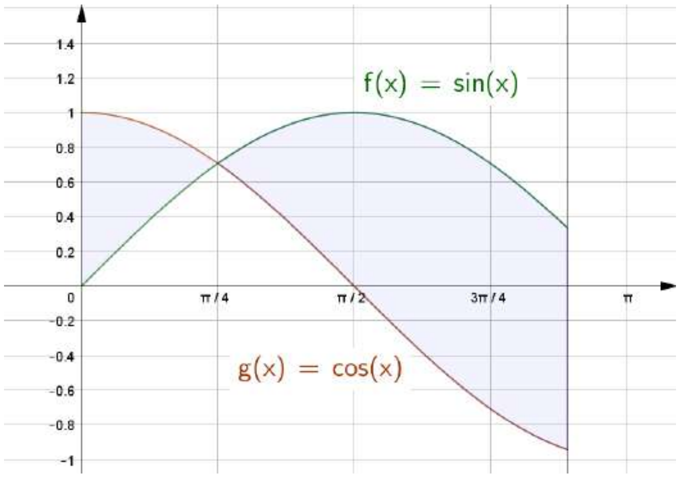
$(a)\ \sin\left(f(x)\right)$

$(b)\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2}}$

$(c)\ \ln\left(f\left(e^x\right)\right)$

(3) Calculer la primitive suivante $\displaystyle\int e^x \sin\left(e^x\right) dx$

Solution proposée par Martine Devillers



(1) Il faut déterminer $k \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ pour que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)\, dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{k} (\sin x - \cos x)\, dx = 2\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \left[\sin x + \cos x\right]_0^{\pi/4} - \left[\cos x + \sin x\right]_{\pi/4}^{k} = 2\sqrt{2}$$

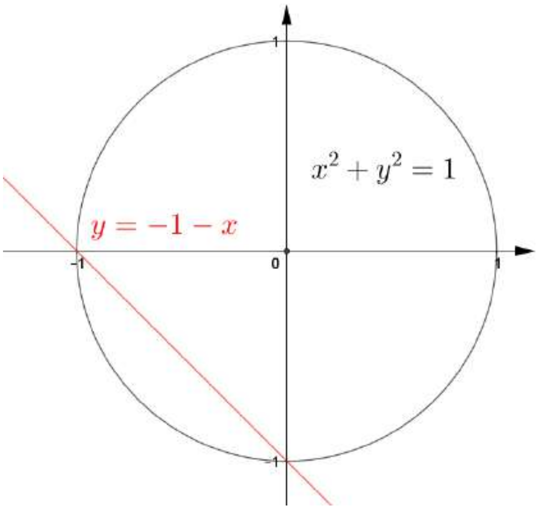
$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (0+1) - (\cos k + \sin k) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cos k + \sin k = -1 \Rightarrow \cos k + \tan\frac{\pi}{4}\sin k = -1 \Rightarrow \cos k \cos\frac{\pi}{4} + \sin k \sin\frac{\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\left(k - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

- $k - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4} + 2\lambda\pi \ \ (\lambda \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = \pi + 2\lambda\pi \Rightarrow k = \pi$ car $k \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] (\lambda = 0)$
- $k - \dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{3\pi}{4} + 2\lambda\pi \ \ (\lambda \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = -\dfrac{\pi}{2} + 2\lambda\pi$ impossible (pas de λ)

Conclusion : $\boxed{k = \pi}$



Remarque

Pour résoudre $\cos k+\sin k=1$ on peut aussi chercher l'intersection entre le cercle $x^2+y^2=1$ et la droite $y=-1-x$ $\left(x=\cos k,\, y=\sin k\right)$.

Le point $(-1,0)$ correspond à $k=\pi$, le point $(0,-1)$ correspond à $k=\dfrac{3\pi}{2}$ et est à rejeter.

$$(2)\,(a)\left(\sin\left(f(x)\right)\right)'=\cos\left(f(x)\right).f'(x)$$

$$(b)\left(\frac{1}{\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^2}}\right)'=\left(\left(f(x)\right)^{-\frac{2}{3}}\right)'=-\frac{2}{3}\left(f(x)\right)^{-\frac{5}{3}}f'(x)=\frac{-2f'(x)}{3\sqrt[3]{\left(f(x)\right)^5}}$$

$$(c)\left(\ln f\left(e^x\right)\right)'=\frac{f'\left(e^x\right).e^x}{f\left(e^x\right)}$$

$$(3)\int e^x\sin\left(e^x\right)dx=-\cos\left(e^x\right)+k$$

Le 14 octobre 2018

EXANA499 – EPL, UCL, LLN, septembre 2018.

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{x-1} + 1$$

On note C la courbe représentative de la fonction f.

(1) (a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$; quelle est l'expression de f '?

(c) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

(2) Démontrer qu'une tangente à C en un point d'abscisse a strictement ppositive passe par l'origine si et seulement si a vérifie l'égalité suivante :

$$1 - a^2 e^{a-1} = 0$$

(3) Donner une équation de la tangente recherchée.

Solution proposée par Martine Devillers

(1) (a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = [0.\infty]$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^{1-x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \xrightarrow{\text{Hospital}} \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{-e^{1-x}} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 + 1 = 1 \ \left(AH_g \equiv y = 1\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.\infty + 1 = +\infty \ \left(\text{pas de } AH_d\right)$$

(b) $f'(x) = e^{x-1} + xe^{x-1} = (x+1)e^{x-1}$

(c)

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f'	$-$	$-$	0	$+$	$+$
f	1	$\searrow$	min	$\nearrow$	$+\infty$

où $f(-1) = -\dfrac{1}{e^2} + 1 < 1$

(2) $T_{(a,f(a))} \equiv y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$(0,0) \in T_{(a,f(a))}$, il faut que $-f(a) = f'(a)(-a) \Rightarrow ae^{a-1} = f'(a)(-a)$

$\Rightarrow 1 - a^2 e^{a-1} = 0$. C'est-à-dire $e^{a-1} = \dfrac{1}{a^2}$, équation qui a pour solutio

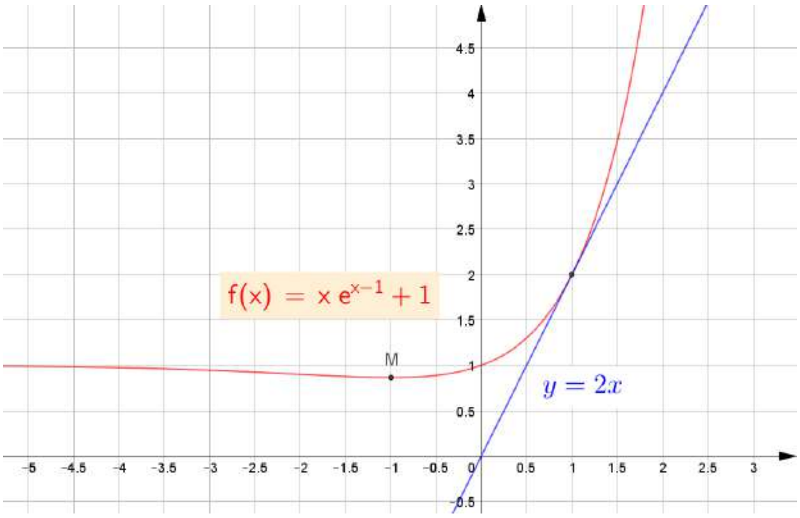
$x = 1$ et $x = -\infty$

(3) $T_{(a,f(a))} \equiv y - \left(ae^{a-1} + 1\right) = (a+1)e^{a-1}(x-a)$

$$\Rightarrow y - a.\left(\frac{1}{a^2} + 1\right) = (a+1)\frac{1}{a^2}(x-a)$$

$$\Rightarrow y - \frac{1}{a} - 1 = \frac{a+1}{a^2}x - \frac{a+1}{a} \Rightarrow \boxed{T_{(a,f(a))} = \frac{a+1}{a^2}x}$$

Pour $a = 1 \Rightarrow \boxed{T_{(1,f(1))} = 2x}$



Le 14 octobre 2018