Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 51

EXANA510 – EXANA519

http://matheux.ovh

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Novembre 2019

EXANA510 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

Soit la fonction f définie par $f(x)=1+\dfrac{5e^{-2x^2}}{2-|x|}$

a) Déterminer le domaine de définition et la parité de f,

b) La fonction f est-elle dérivable en $x=0$? Justifier votre réponse en utilisant la définition de la dérivée à droite et de la dérivée à gauche de f en $x=0$,

c) Déterminer les équations des asymptoptes de f,

d) Calculer $f'(x)$,

e) Combien le graphique de f possède-t-il de points de maximum? de points de minimum? Quelles sont leurs abscisses?

g) Tracer le graphique de f en utilisant les résulats précédents, sachant que

$$\sqrt{3}\simeq 1.73,\ e^{-3}\simeq 0.05,\quad e^{-4}\simeq 0.02 \text{ et } e^{x}\simeq 1+x+\frac{1}{2}x^2 \ (\text{pour } -1<x<1)$$

---

a) La fonction est paire. En effet : $f(-x)=1+\dfrac{5e^{-2(-x)^2}}{2-|-x|}=1+\dfrac{5e^{-2x^2}}{2-|x|}=f(x)$

b) Soit $x\geq 0,$ donc $|x|=x.$ On a :

$$f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(1+\dfrac{5e^{-2x^2}}{2-x}\right)-\left(1+\dfrac{5}{2}\right)}{x-0}=5\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{e^{-2x^2}}{2-x}-\dfrac{1}{2}}{x}=5\lim_{x\to 0^+}\frac{2e^{-2x^2}-2+x}{2x(2-x)}=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\xrightarrow{\text{Hospital}}5\lim_{x\to 0^+}\frac{-8e^{-2x^2}+1}{4-4x}=\frac{5}{4}$$

On refait *mutatis mutandis* pour $x\leq 0$ et on trouve $f'(x)=-\dfrac{5}{4}.$

Autrement dit, la dérivée à gauche et à droite sont différentes. La fonction n'est pas dérivable en $x=0.$

c) AV $\qquad \mathrm{AV}_1\equiv x=-2$ et $\mathrm{AV}_1\equiv x=+2$

$$\text{car }\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}f(x)=+\infty\end{cases}\quad\text{et}\quad\begin{cases}\lim\limits_{x\to +2^-}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to +2^+}f(x)=-\infty\end{cases}$$

AH : $\qquad \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=1+\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5e^{-2(-x)^2}}{2-|-x|}=1+0\Rightarrow \mathrm{AH}\equiv y=1$

d) Pour x ≥ 0 : $f'(x)=\dfrac{-20xe^{-2x^2}(2-x)-5e^{-2x^2}(-1)}{(2-x)^2}=5e^{-2x^2}\dfrac{4x^2-8x+1}{(2-x)^2}$

e) $f'(x)$ s'annule pour $\pm\left(1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Ce qui donne le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$-1-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$-1+\frac{\sqrt{3}}{2}$		0		$1-\frac{\sqrt{3}}{2}$		$1+\frac{\sqrt{3}}{2}$		2		$+\infty$
f'		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-\frac{5}{4} \vert \frac{5}{4}$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
f	$+1$	$\searrow$	AV_1 $-\infty \vert +\infty$	$\searrow$	m_1	$\nearrow$	M_1	$\searrow$	m_2	$\nearrow$	M_2	$\searrow$	m_3	$\nearrow$	AV_2 $+\infty \vert -\infty$	$\nearrow$	$+1$

f) Les extrema sont (3 minima et 2 maxima):

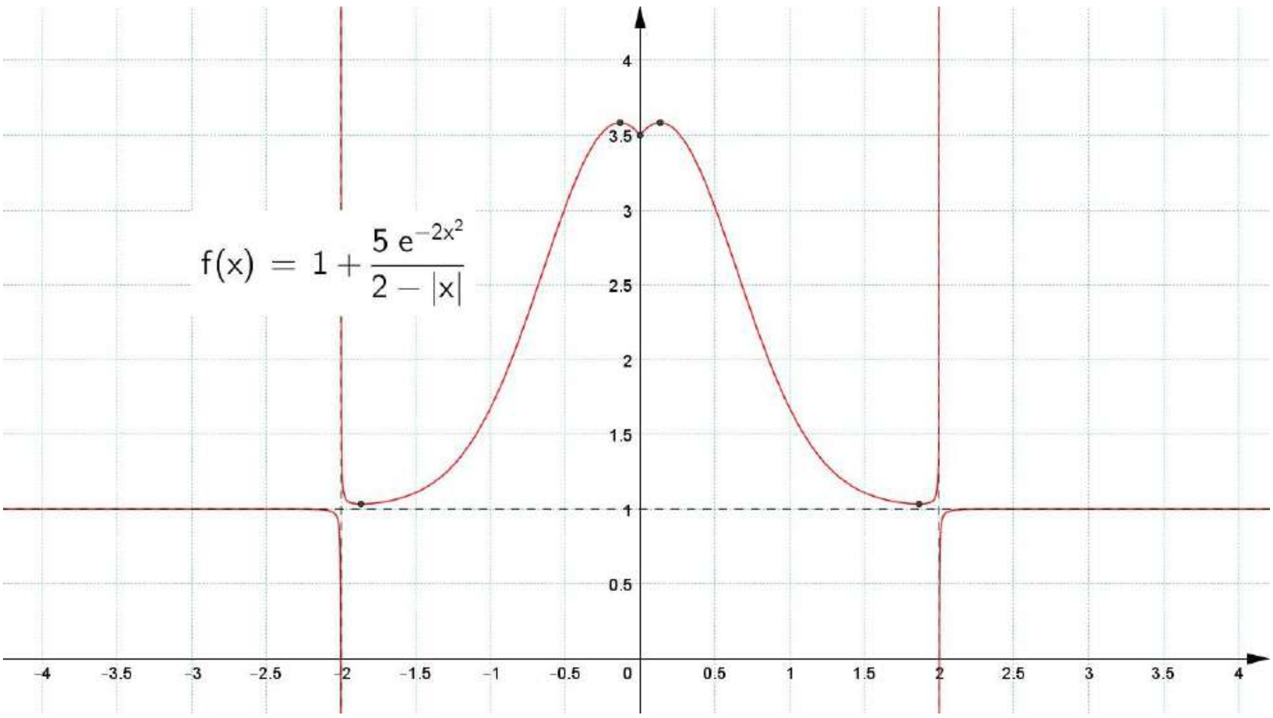
$$x=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\simeq-0.134 \Rightarrow m_1:(-0.134,1.035)$$

$$x=-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\simeq-1.866 \Rightarrow M_1:(-1.866,3.585)$$

$$x=0 \Rightarrow m_2\left(0,\frac{7}{2}\right)$$

$$x=1-\frac{\sqrt{3}}{2}\simeq 0.134 \Rightarrow M_2:(0.134,3.585)$$

$$x=1+\frac{\sqrt{3}}{2}\simeq 1.866 \Rightarrow m_1:(1.866,1.035)$$



Le 10 novembre 2019

EXANA511 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes x et y, on considère la courbe $\mathscr{C}_1 \equiv y = 4\tan\frac{x}{3}$ pour $0 < x < \frac{3\pi}{2}$ et la courbe $\mathscr{C}_2 \equiv y = 8\sin^2\frac{x}{3}$ pour $0 < x < \frac{3\pi}{2}$.

a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente T à C_1 au point d'abscisse 0.

b) Calculer $\int 8\sin^2\frac{x}{3}\,dx$.

c) Calculer l'aire $\mathscr{A}_1$ de la surface comprise entre l'axe x et la courbe $\mathscr{C}_2$ pour $0 < x < \frac{3\pi}{2}$.

d) Calculer les coordonnées des points d'intersections des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ pour $0 < x < \frac{3\pi}{2}$

e) Montrer que les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangentes au point d'abscisse $\frac{3\pi}{4}$.

f) Calculer l'aire $\mathscr{A}_2$ de la surface (bornée) comprise entre les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

---

a) Soit $f(x) = 4\tan\frac{x}{3}$. On doit déterminer la tangente en $x = 0$

$$f(0) = 0; \qquad f'(x) = \frac{4}{3\cos^2\frac{x}{3}}; \qquad f'(0) = \frac{4}{3} \qquad \Rightarrow \boxed{T \equiv y = \frac{4x}{3}}$$

b) $I_1 = \int 8\sin^2\frac{x}{3}\,dx = 8\int \frac{1-\cos\frac{2x}{3}}{2}\,dx = \boxed{4x - 6\sin\frac{2x}{3} + C}$

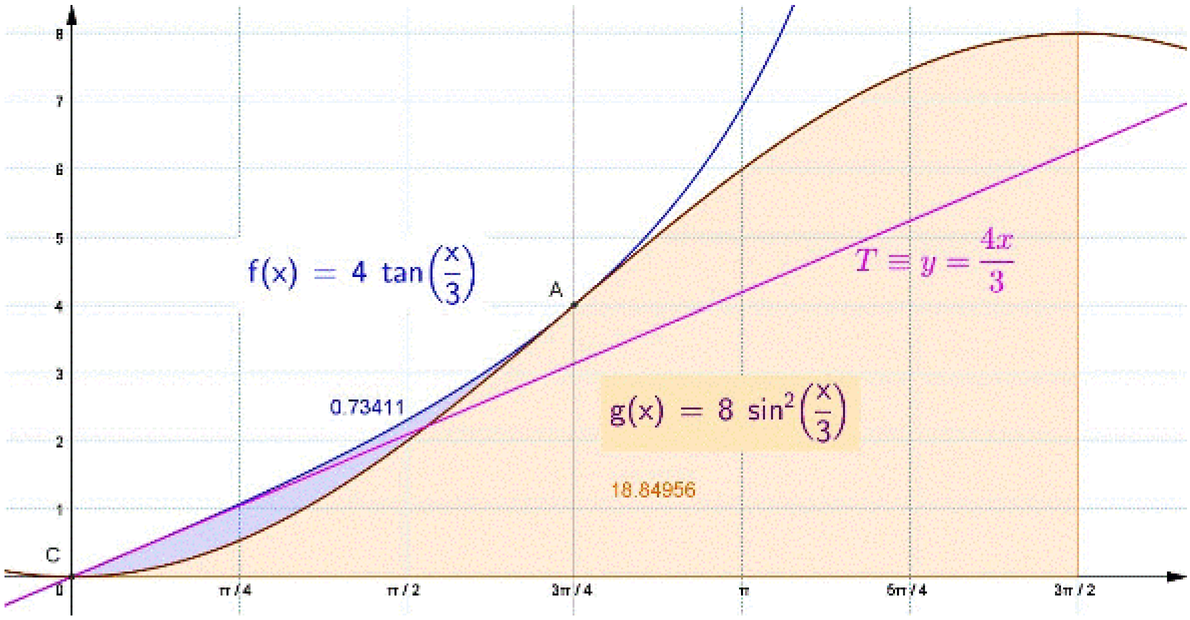
c) $\mathscr{A}_1 = \int_0^{\frac{3\pi}{2}} 8\sin^2\frac{x}{3}\,dx = \left[4x - 6\sin\frac{2x}{3} + C\right]_0^{\frac{3\pi}{2}} = \boxed{6\pi \simeq 18.84956}$

d) Il faut résoudre : $4\tan\frac{x}{3} = 8\sin^2\frac{x}{3} \Rightarrow \frac{\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}} = 2\sin^2\frac{x}{3}$

1) $\sin\frac{x}{3} = 0 \Rightarrow \frac{x}{3} = k\pi$ comme $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[\Rightarrow \boxed{x = 0}$

2) Il reste $\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin\frac{2x}{3} = 1 \Rightarrow \frac{2x}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$

comme $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right[\Rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$



e) Les deux courbes ont déjà un point commune en $x=\dfrac{3\pi}{4}$. Elles auront une tangente commune si les dérivées en ce point sont égales.

1) Pour $\mathscr{C}_1$, on a calculer la dérivée au point a)

$$f'(x)=\frac{4}{3\cos^2\frac{x}{3}} \Rightarrow f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{4}{3\cos^2\frac{\pi}{4}}=\frac{8}{3}$$

2) Pour $\mathscr{C}_2$:

$$f'(x)=\frac{16}{3}\sin\frac{x}{3}\cos\frac{x}{3} \Rightarrow f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{16}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{8}{3}$$

Les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangentes au point d'abscisse $\dfrac{3\pi}{4}$.

f) $\mathscr{A}_2=\displaystyle\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\left(4\tan\frac{x}{3}-8\sin^2\frac{x}{3}\right)dx$

La primitive du deuxième terme a déjà été calculé au point b) $I_1=4x-6\sin\dfrac{2x}{3}+C$

Calculons la primitive du premier terme :

$$I_2=\int 4\tan\frac{x}{3}\,dx=4\int\frac{\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}}\,dx=-12\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|+C$$

$$\Rightarrow \mathscr{A}_2=\left[I_3-I_1\right]_0^{\frac{3\pi}{4}}=\left[-12\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right|-\left(4x-6\sin\frac{2x}{3}\right)\right]_0^{\frac{3\pi}{4}}=-12\ln\frac{\sqrt{2}}{2}-3\pi+6$$

$$=\boxed{6\ln 2-3\pi+6\simeq 0.73411}$$

Le 10 novembre 2019

EXANA512 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

a) Calculer $\int \sin\sqrt{x}\,dx$.

b) Calculer $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

---

a) $I=\int \sin\sqrt{x}\,dx$. On pose $t^2=x \Rightarrow 2tdt=dx \Rightarrow I=2\int t\sin t dt$ que l'on intégre par parties

$$\begin{matrix} f=t & f'=1 \\ g'=\sin t & g=-\cos t \end{matrix} \Rightarrow I=2\left[-t\cos t+\int \cos t\,dt\right]=2(-t\cos t+\sin t)$$

$$\Rightarrow \boxed{I=2\sin\sqrt{x}-2\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+C}$$

b) $I=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{-2x.x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

$$\text{On pose } t=1-x^2 \Rightarrow \begin{cases} dt=-2xdx \\ x^2=1-t \\ \text{si } x=0 \Rightarrow t=1 \\ \text{s } x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow t=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow I=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} \frac{1-t}{\sqrt{t}}\,dt=\frac{1}{2}\int_{1/2}^{1} t^{-\frac{1}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\,dt=\frac{1}{2}\left[2t^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_{1/2}^{1}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(2-\frac{2}{3}\right)-\left(\sqrt{2}-\frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$$

$$=\boxed{\frac{8-5\sqrt{2}}{12}\simeq 0.077411}$$

Le 10 novembre 2019

EXANA513 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

Soit la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{5\cos x}{2\tan x-2} & \text{si} \quad x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\\ 0 & \text{si} \quad x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,(k\in\mathbb{Z})\end{cases}$$

a) Déterminer le domaine de définition, la parité éventuelle et la période éventuelle T de f.

b) Calculer $l_1=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x<\frac{\pi}{4}}} f(x)$; $l_2=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{4}\\ x>\frac{\pi}{4}}} f(x)$; $l_3=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x<\frac{\pi}{2}}} f(x)$; $l_4=\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{2}\\ x>\frac{\pi}{2}}} f(x)$

c) La fonction f est-elle continue en $x=\dfrac{\pi}{2}$? Justifier votre réponse à l'aide de la définition de la continuité de f en $x=\dfrac{\pi}{2}$.

d) La fonction est-elle dérivable en $x=\dfrac{x}{2}$? Justifier votre réponse en utilisant la définition de la dérivée en f en $x=\dfrac{x}{2}$.

e) Calculer $f'(x)$.

f) Etudier le signe de $f'(x)$ dans $[0,2\pi]$.

g) Déterminer les coordonnées des points de maximum de f et les coordonnées des points de minimum de f dans $[0,2\pi]$.

h) Tracer le graphique de f dans $[0,2\pi]$ en utilisant les résultats précédents.

---

a) $CE: 2\tan x - 2 \neq 0 \Rightarrow \tan x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$

$Dom\ f : \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

La fonction n'est ni paire ni impaire car $f(-x) = \frac{5\cos(-x)}{2\tan(-x) - 2} = -\frac{5\cos x}{2\tan x + 2}$

La fonction $\cos x$ est de période 2π et $\tan x$ de période π. La période de $f(x)$ est donc $T = 2\pi$.

b) Pour répondre à cette question le plus simple est d'établir un tableau de signes.

	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$5\cos x$	5	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	5
$2\tan x - 2$	-2	$-$	0	$+$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$-$	0	$+$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$-$	-2
$f(x)$	$\frac{-5}{2}$	$-$	$_{-\infty}\vert^{+\infty}$	$+$	0	$+$	$^{+\infty}\vert_{-\infty}$	$-$	0	$-$	$\frac{-5}{2}$

On a alors

$l_1 = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} f(x) = -\infty \quad l_2 = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{4} \\ x < \frac{\pi}{4}}} f(x) = +\infty \quad l_3 = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} f(x) = 0 \quad l_4 = \lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x > \frac{\pi}{2}}} f(x) = 0$

c) La fonction f est continue en $x = \frac{\pi}{2}$ car $l_3 = l_4 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$

d) $$f'(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{5\cos x}{2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)(\tan x - 1)} = \frac{5}{2} \frac{\overbrace{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x}^{=0}}{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)(\tan x - 1)}$$

Regardons le dénominateur. Faisons le changement de variable $y = x - \frac{\pi}{2}$. Donc si $x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow y \to 0$. Ce qui donne :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)(\tan x - 1) = \lim_{y \to 0} y\left(\tan\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - 1\right) = -\lim_{y \to 0} y.\cot y - \overbrace{\lim_{y \to 0} y}^{=0}$$

$$= -\lim_{y \to 0} y.\frac{\cos y}{\sin y} = -\lim_{y \to 0} \frac{y}{\sin y}.\lim_{y \to 0} \cos y = -1 \times 1 = -1$$

Finalement : $f'(x) = \frac{5}{2}.\frac{0}{-1} = 0$. f est donc dérivable en $x = \frac{\pi}{2}$

e) $f'(x)=\frac{5}{2}.\frac{-\sin x(\tan x-1)-\cos x.\frac{1}{\cos^2 x}}{(\tan x-1)^2}=\frac{5}{2}.\frac{-\sin^2 x+\sin x\cos x-1}{\cos x(\tan x-1)^2}$

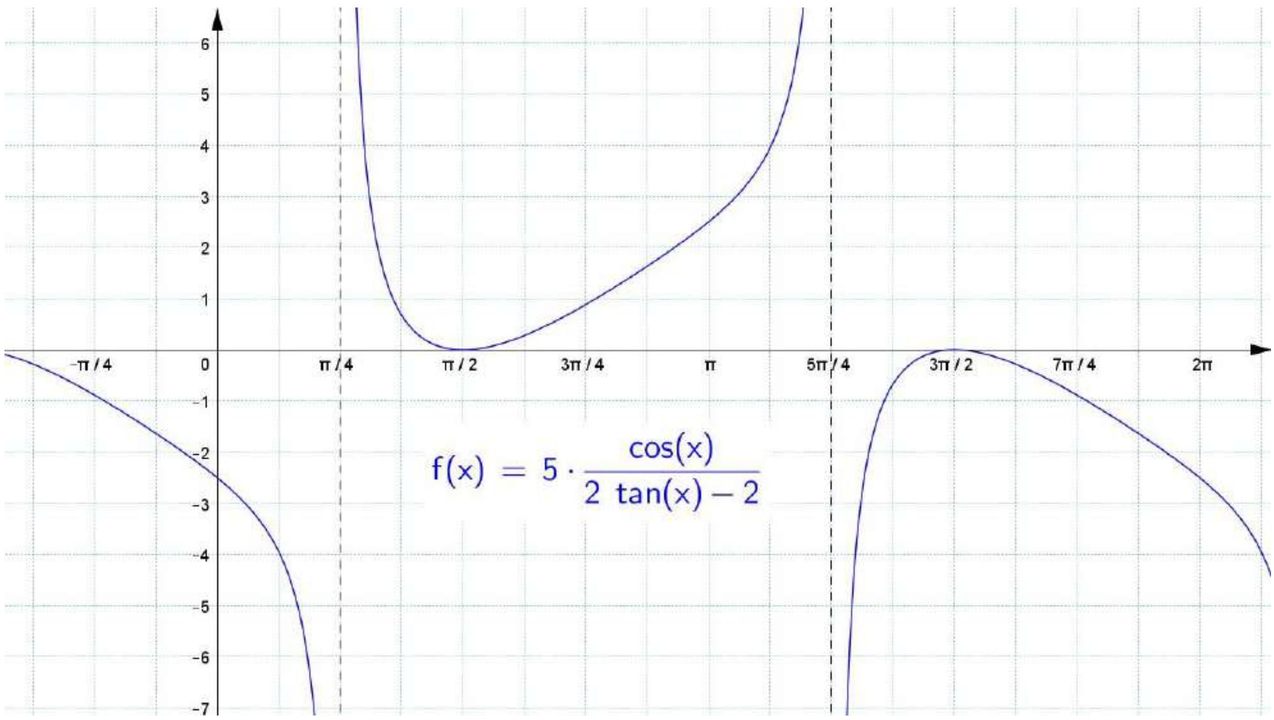
f) Remarquons que le dénominateur de $f'(x)$ est toujours négatif. En effet, on a

$$\begin{cases}\sin^2 x+1\geq 1\\ \sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\leq\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow -(\sin^2 x+1)+\frac{1}{2}\sin 2x<0$$

Le signe de $f'(x)$ est donc le signe de $-\cos x$

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$		2π
$-\cos x$	-1	$-$	0	$+$	0	$-$	-1
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
$f(x)$	$-\frac{5}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{5}{2}$

g) Un minima en $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ et un maxima en $\left(\frac{3\pi}{2},0\right)$



XANA514 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

Calculer

a) $\int_{-6}^{6} \frac{19+20\sin^7 x}{x^2+36}\,dx$

b) $\int \frac{x-\sin x}{e^x}\,dx$

$$\text{a) } I=\int_{-6}^{6} \frac{19+20\sin^7 x}{x^2+36}\,dx = 38\int_0^6 \frac{dx}{x^2+36} + \underbrace{\int_{-6}^{6} \frac{20\sin^7}{x^2+36}}_{=0 \text{ car fonction impaire}} = \frac{19}{3}\int_0^6 \frac{d\left(\frac{x}{6}\right)}{\left(\frac{x}{6}\right)^2+1}$$

$$=\frac{19}{3}\left[\arctan\frac{x}{6}\right]_0^6 = \frac{19}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{19\pi}{12}}$$

$$\text{b) } I=\int \frac{x-\sin x}{e^x}\,dx = \underbrace{\int x\,e^{-x}dx}_{I_1} - \underbrace{\int \sin x\,e^{x}dx}_{I_2}$$

$$I_1=\int x\,e^{-x}dx \qquad \begin{matrix} f=x & f'=1 \\ g'=e^{-x} & g=-e^{-x} \end{matrix} \Rightarrow I_1=-x\,e^{x}+\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}(x+1)$$

$$I_2=\int \sin x\,e^{x}dx \qquad \begin{matrix} f=\sin x & f'=\cos x \\ g'=e^{-x} & g=-e^{-x} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow I_2=-\sin x\,e^{-x}+\int \cos x\,e^{-x}\,dx \qquad \begin{matrix} f=\cos x & f'=-\sin x \\ g'=e^{-x} & g=-e^{-x} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow I_2=-\sin x e^{-x}-\cos x e^{-x}-\int \sin x\,e^{-x}dx \Rightarrow I_2=-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)$$

Finalement : $\boxed{I=-e^{-x}(x+1)+\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)+C}$

Le 10 novembre 2019

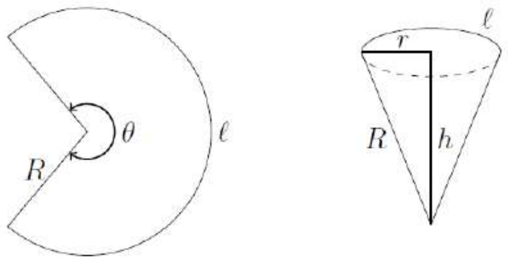
EXANA515 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

Dans un disque métallique de rayon R, on découpe un secteur circulaire d'angle au centre θ afin d'obtenir un cône circulaire de rayon r et de hauteur h.

a) Exprimer r en fonction de R et de θ.

b) Calculer le volume V du cône en fonction de R et de θ.

c) Pour quelle valeur de θ le volume du cône est-il maximum?



VOIR EXANA315

Le 10 novembre 2019

EXANA516- FACSA, ULiège, Liège, juillet 2019.

On considère la fonction

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + a}$$

où a désigne un paramètre réel supérieur ou égal à 1. En discutant s'il y a lieu en fonction de la valeur de a,

i. déterminez le domaine de définition de f ;
ii. déterminez les éventuelles asymptotes de son graphique ;
iii. étudiez la croissance/décroissance de f et caractérisez ses éventuels extrema ;
iv. esquissez le graphique de f .

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ, Prof. Vincent DENOEL.

i. Quelle que soit la valeur du paramètre $a \geq 1$, la fonction

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 2x + a}$$

est définie partout puisque $x^2 - 2x + a = (x-1)^2 + (a-1)$ est positif pour tout $a \geq 1$. On a donc $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$.

ii. Quelle que soit la valeur du paramètre $a \geq 1$, on peut dégager les résultats suivants.

- Puisque

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 2x + a} \right) = +\infty$$

la fonction ne possède pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

- Il convient donc de tester l'existence d'une asymptote oblique. On a

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x + a}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{a}{x^2}} \right) = 2$$

et

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 2x + a} - 2x \right) &= \lim_{x \to +\infty} \left(-x + \sqrt{x^2 - 2x + a} \right) = \text{“} -\infty + \infty \text{”} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x + a}{x + \sqrt{x^2 - 2x + a}} \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2 + \frac{a}{x}}{1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x} + \frac{a}{x^2}}} = -1
\end{aligned}$$

La fonction possède donc une asymptote oblique d'équation $y = 2x - 1$ en $+\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs supérieures car, pour tout $x \geq 1$,

$$x + \sqrt{x^2 - 2x + a} = x + \sqrt{(x-1)^2 + (a-1)} \geq x + |x - 1| = 2x - 1$$

On peut également remarquer que la fonction coïncide avec son asymptote lorsque $a = 1$ puisque, dans ce cas, la relation ci-dessus est vérifiée avec le signe d'égalité.

- Puisque

$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-2x+a}\right) = \text{“}-\infty+\infty\text{”} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+a}{-x+\sqrt{x^2-2x+a}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2-\dfrac{a}{x}}{1+\sqrt{1-\dfrac{2}{x}+\dfrac{a}{x^2}}} = 1$$

la fonction présente l'asymptote horizontale d'équation $y=1$ en $-\infty$. Celle-ci est approchée par valeurs supérieures car, pour tout $x\le 1$,

$$x+\sqrt{x^2-2x+a} = x+\sqrt{(x-1)^2+(a-1)} \ \geq\ x+|x-1| = 1$$

Ici encore, la fonction se confond avec son asymptote si $a=1$.

Puisqu'elle possède une asymptote horizontale, la fonction ne possède pas d'asymptote oblique en $-\infty$. Compte tenu du domaine de continuité de la fonction, il n'y a pas non plus d'asymptote verticale.

iii. La dérivée de f est donnée par

$$f'(x) = 1+\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+a}}$$

La dérivée est définie sur le même domaine que f, *i.e.* sur $\mathbb{R}$ si $a>1$ mais n'est pas définie en $x=1$ dans le cas où $a=1$.
Les zéros de $f'(x)$ sont les solutions de

$$1-x = \sqrt{x^2-2x+a}$$

Cette équation ne peut admettre de solution que si $x\le 1$. Il vient alors, en élevant les deux membres au carré,

$$1-2x+x^2 = x^2-2x+a,$$

ce qui est impossible lorsque $a>1$. La dérivée ne possède donc aucun zéro si $a>1$. Par contre, lorsque $a=1$, cette relation est trivialement satisfaite et $f'(x)$ s'annule donc pour tout $x<1$ (on rejette la solution $x=1$ dans ce cas car la fonction $f'(x)$ n'y est pas définie lorsque $a=1$).
Dans le cas où $a>1$, la dérivée est positive sur $\mathbb{R}$ (puisque, par exemple, elle est positive en $x=1$ ou lorsque $x\to+\infty$). La fonction est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et ne présente ni minimum ni maximum local.
Dans le cas où $a=1$, on voit que le dénominateur de $f'(x)$ devient $|x-1|$. Pour $x\neq 1$, $f'(x)$ s'exprime par

$$f'(x) = 1+\frac{x-1}{|x-1|} = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ 2 & \text{si } x>1 \end{cases}.$$

Etant donné que (a) la fonction f est définie et continue en $x=1$, (b) sa dérivée n'y est pas définie, (c) $\lim_{x\to1^-} f'(x) \neq \lim_{x\to1^+} f'(x)$ et que (d) ces deux limites sont finies, la fonction f présente un point anguleux (P.A) en $x=1$. Ceci mène donc aux deux tableaux des variations suivants.

si $a>1$

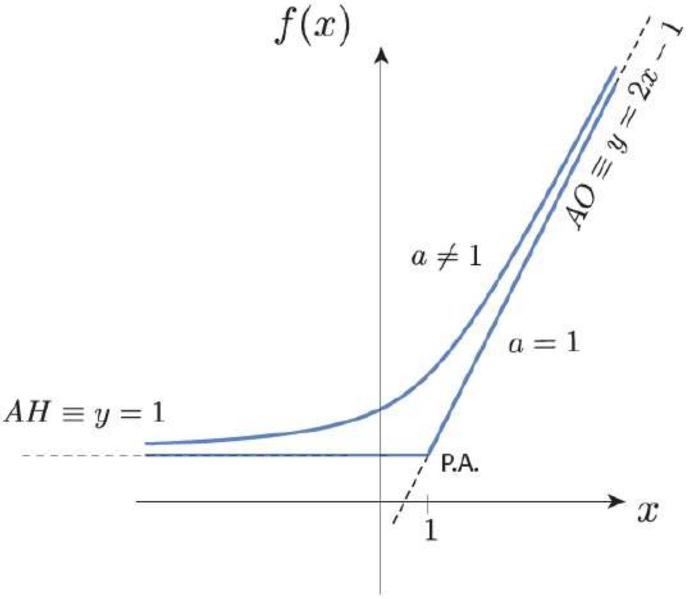
x	
f'	$+$
f	$\nearrow$

si $a=1$

x		1	
f'	0	$\nexists$	$+(=2)$
f	cst $(=1)$	P.A.	$\nearrow (=2x-1)$

NB : le cas $a = 1$ étant particulier, il est possible de le discuter d'emblée et d'observer que la fonction f s'identifie à $f(x) = 1$ pour $x < 1$ et $f(x) = 2x - 1$ pour $x > 1$. Dans ce cas, le tableau des variations pour $a = 1$ peut être omis vu la trivialité de la solution. Il convient de noter cependant l'existence d'un point anguleux.

iv. En utilisant les résultats dégagés ci-dessus, le graphique de f peut être esquissé de la façon suivante pour toutes les valeurs du paramètre $a \geq 1$. Comme établi précédemment, son allure est différente selon que $a > 1$ ou $a = 1$.



EXANA517- FACSA, ULiège, Liège, juillet 2019.

Soit

$$\phi_n(x)=\int e^{-x}\cos^n x\,dx \qquad \text{et} \qquad F_n=\int_0^{\pi/2} e^{-x}\cos^n x\,dx$$

où n désigne un naturel.

i. Calculez $\phi_0(x)$ et F_0.

ii. Calculez $\phi_1(x)$ et F_1.

iii. Montrer que $(1+n^2)F_n=1+n(n-1)F_{n-2}$, quel que soit le naturel $n\geq 2$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ, Prof. Vincent DENOEL.

i.

$$\phi_0(x)=\int e^{-x}\,dx=-e^{-x}+C$$

$$F_0=\int_0^{\pi/2} e^{-x}\,dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\pi/2}=1-e^{-\pi/2}$$

où C représente une constante arbitraire.

ii. La fonction $\phi_1(x)=\int e^{-x}\cos x\,dx$ peut être calculée en primitivant par parties, avec les choix suivants,

$$f'(x)=e^{-x},\quad g(x)=\cos x,\quad f(x)=-e^{-x},\quad g'(x)=-\sin x$$

ce qui donne

$$\phi_1(x)=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\sin x\,dx.$$

Une seconde intégration par parties, avec les choix suivants,

$$f'(x)=e^{-x},\quad g(x)=\sin x,\quad f(x)=-e^{-x},\quad g'(x)=\cos x$$

permet d'évaluer la nouvelle primitive, ce qui permet ensuite d'obtenir

$$\phi_1(x)=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x-\int e^{-x}\cos x\,dx.$$

Le dernier terme dans cette expression s'identifiant à $\phi_1(x)$, défini à un constante additive près, on peut également écrire

$$2\phi_1(x)=-e^{-x}\cos x+e^{-x}\sin x+2C.$$

où C est une constante arbitraire. Ceci mène finalement à

$$\phi_1(x)=-\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x-\sin x)+C.$$

L'intégrale F_1 est obtenue à partir de la primitive par

$$F_1=\phi_1\left(\frac{\pi}{2}\right)-\phi_1(0)=\frac{1}{2}e^{-\pi/2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+e^{-\pi/2}\right).$$

NB : Il est recommandé de ne pas fournir la valeur numérique de la primitive, $F_1 \simeq 0.60394\ldots$; de manière générale, des expressions analytiques, plutôt que numériques, sont préférées dans une épreuve d'analyse.

iii. Considérons F_n avec $n \geq 2$. En intégrant par parties avec les choix suivants,

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad g(x) = \cos^n x, \quad f(x) = -\mathrm{e}^{-x}, \quad g'(x) = -n\cos^{n-1} x\ \sin x$$

on trouve

$$\begin{aligned} F_n = \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x} \cos^n x\, \mathrm{d}x &= \left[-\mathrm{e}^{-x}\cos^n x\right]_0^{\pi/2} - n\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x}\cos^{n-1} x\ \sin x\, \mathrm{d}x \\ &= 1 - n\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x}\cos^{n-1} x \sin x\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Une seconde intégration par parties est nécessaire pour évaluer la nouvelle intégrale. Elle peut être obtenue en choisissant

$$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}, \quad g(x) = \cos^{n-1} x \sin x, \quad f(x) = -\mathrm{e}^{-x}, \quad g'(x) = \left(\cos^{n-1} x \sin x\right)'$$

Le calcul de la fonction $g'(x)$ s'obtient en écrivant successivement

$$\begin{aligned} g'(x) &= -(n-1)\cos^{n-2} x\ \sin^2 x + \cos^{n-1} x\ \cos x \\ &= (n-1)\cos^{n-2} x\,(\cos^2 x - 1) + \cos^n x \\ &= n\cos^n x - (n-1)\cos^{n-2} x. \end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire

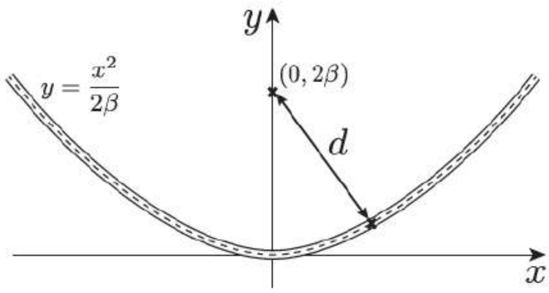
$$\begin{aligned} F_n &= 1 - n\left(\left[-\mathrm{e}^{-x}\cos^{n-1} x\ \sin x\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x} g'(x)\, \mathrm{d}x\right) \\ &= 1 - n\int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-x}\left[n\cos^n x - (n-1)\cos^{n-2} x\right]\, \mathrm{d}x \\ &= 1 - n^2 F_n + n(n-1)F_{n-2}, \end{aligned}$$

ce qui mène finalement à $(1+n^2)F_n = 1 + n(n-1)F_{n-2}$, la proposition à démontrer.

Le 7 novembre 2019

EXANA518 - FACSA, ULiège, Liège, juillet 2019.

On désire étudier les nuisances sonores causées par le trafic sur une route dont le tracé est représenté par la courbe d'équation $2\beta y = x^2$ où β désigne un paramètre réel strictement positif (Cf figure ci-dessous).
Dans le cadre de cette étude, d´eterminez le point de la route d'abscisse $x > 0$ le plus proche de l'habitation située au point de coordonnées $(0;2\beta)$ et évaluez dès lors la distance d entre cette habitation et la route.



Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ, Prof. Vincent DENOEL.

Soit $(x,y) = (x, \frac{x^2}{2\beta})$ un point générique sur le tracé de la route. La distance entre la maison, de coordonnées $(0,2\beta)$, et ce point générique de la route s'écrit .

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \left(2\beta - \frac{x^2}{2\beta}\right)^2}.$$

Cette distance $d(x)$ est une fonction de $x \in \mathbb{R}$ dont il convient de déterminer le minimum. Pour ce faire, on établit

$$d'(x) = \frac{x + \left(2\beta - \frac{x^2}{2\beta}\right)\left(\frac{-x}{\beta}\right)}{\sqrt{x^2 + \left(2\beta - \frac{x^2}{2\beta}\right)^2}} = \frac{x\left(1 - 2 + \frac{x^2}{2\beta^2}\right)}{d(x)} = \frac{x\left(\frac{x}{\sqrt{2}\beta} - 1\right)\left(\frac{x}{\sqrt{2}\beta} + 1\right)}{d(x)}.$$

La fonction $d'(x)$ s'annule donc en trois points, à savoir, $x = 0$ et $x = \pm\sqrt{2}\beta$.

L'étude des signes de la dérivée, résumée dans le tableau suivant, indique que la fonction $d(x)$ possède deux minima, aux points d'abscisse $x = \pm\sqrt{2}\beta$ et un maximum au point d'abscisse $x = 0$. On observe que la symétrie du problème est préservée dans la solution.

x		$-\sqrt{2}\beta$		0		$\sqrt{2}\beta$	
d'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
d	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Le point de la route d'abscisse positive le plus proche de l'habitation est donc $(\sqrt{2}\beta, \beta)$ et la valeur du minimum de $d(x)$ vaut

$$d_{\min} = \sqrt{(\sqrt{2}\beta)^2 + \left(2\beta - \frac{(\sqrt{2}\beta)^2}{2\beta}\right)^2} = \sqrt{3}\beta.$$

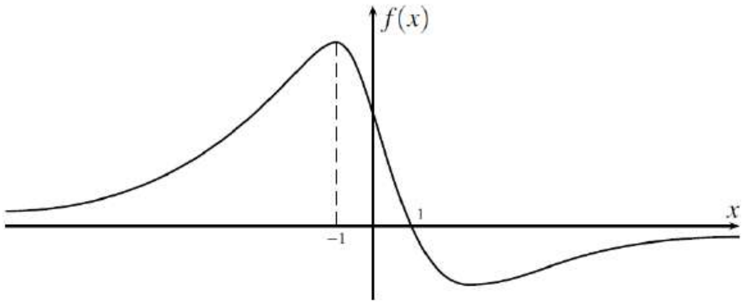
Le 7 novembre 2019

EXANA519 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2019.

Déterminez toutes les valeurs des paramètres réels α,β et γ telles que le graphique de

$$f(x) = \frac{ax+\beta}{x^2+\gamma}$$

présente l'allure esquissée ci-dessous. Justifiez.



Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ, Prof. Vincent DENOEL.

De l'énoncé, on peut déduire les informations suivantes sur la fonction f :

i. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$,

ii. $f(1) = 0$,

iii. $f > 0$ sur $]-\infty, 1[$ et $f < 0$ sur $]1, +\infty[$,

iv. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0^+$,

v. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0^-$,

vi. maximum en $x = -1$.

Il reste à déterminer les valeurs des paramètres qui permettent de vérifier ces différents points.

i. On a $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ si le dénominateur de la fraction définissant f ne s'annule pas, *i.e.* si $x^2 + \gamma \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On en déduit que $\gamma > 0$.

ii. La condition

$$f(1) = \frac{\alpha+\beta}{x^2+\gamma} = 0$$

impose $\alpha = -\beta$ de sorte que

$$f(x) = \frac{\alpha x - \alpha}{x^2+\gamma} = \alpha\,\frac{x-1}{x^2+\gamma}$$

iii. Puisque $x^2+\gamma>0$ dans les conditions envisagées, la troisième condition, portant sur le signe de f se traduit par $\alpha<0$.

iv. Pour $\alpha=-\beta<0$, on a

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\alpha x-\alpha}{x^2+\gamma}=0^+$$

ce qui n'introduit aucune contrainte supplémentaire sur les paramètres.

v. De même, sous les mêmes conditions, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\alpha x-\alpha}{x^2+\gamma}=0^-$$

Ceci ne limite donc pas davantage l'ensemble des paramètres.

vi. Pour exprimer la condition vi, on calcule

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha\,\frac{(x^2+\gamma)-(x-1)(2x)}{(x^2+\gamma)^2} \\ &= \alpha\,\frac{-x^2+2x+\gamma}{(x^2+\gamma)^2} \end{aligned}$$

et

$$f'(-1)=\alpha\,\frac{\gamma-3}{(1+\gamma)^2}$$

La présence d'un maximum local en $x=-1$ impose que $f'(-1)=0$ ce qui conduit à identifier $\gamma=3$.

On a donc

$$f(x)=\alpha\,\frac{x-1}{x^2+3} \qquad \text{et} \qquad f'(x)=\alpha\,\frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2}.$$

Le tableau de variation du signe de f' permet de confirmer que la fonction f présente un maximum en $x=-1$. En effet, la dérivée peut être exprimée sous la forme

$$f'(x)=\frac{-\alpha(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

et, puisque $\alpha<0$, les variations de f sont décrites par

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	Max	$\searrow$	min	$\nearrow$

En conclusion, le graphique proposé correspond aux valeurs des paramètres α, β et γ telles que

$$\gamma=3,\ \alpha=-\beta \ \text{ et } \ \alpha<0 \ \ (\beta>0).$$