Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 52

EXANA520 – EXANA529

http://matheux.ovh

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeck
Fabienne Zoetard

Novembre 2019

EXANA520 - FACSA, ULiège, Liège, septembre 2019.

i. Calculez $\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx$

ii. Calculez $\int_{-\infty}^{1} e^x\,dx$

iii. Calculez $\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$

iv. En discutant s'il y a lieu en fonction de $n \in \mathbb{Z}$, calculez $\int_1^2 x^n \ln x\,dx$

v. On note $I(x) = \int_x^2 e^{-t^2}\,dt$. Montrer que $I(\alpha) \geq I(\beta)$ si $\alpha \leq \beta \leq 2$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : Prof. Eric J.M. DELHEZ, Prof. Vincent DENOEL.

i.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx &= \int \frac{x(1+x^2)-x}{1+x^2}\,dx \\
&= \int x\,dx - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C
\end{aligned}$$

ii.

$$\int_{-\infty}^{1} \mathrm{e}^x\,dx = \left[\mathrm{e}^x\right]_{-\infty}^{1} = \mathrm{e}^1 - \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = \mathrm{e}$$

iii.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \\
&= \left[\mathrm{tg}\,x - x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \mathrm{tg}\,\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

iv. L'intégrale

$$\int_1^2 x^n \ln x \, dx$$

peut être évaluée en utilisant la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Pour toutes les valeurs de $n \neq -1$, on peut écrire

$$\begin{cases} f(x) = \ln x \\ g'(x) = x^n \end{cases} \qquad \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

de sorte que

$$\begin{aligned}
\int_1^2 x^n \ln x \, dx &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^n}{n+1} dx \\
&= \frac{2^{n+1}}{n+1}\ln 2 - \frac{1}{(n+1)^2}\left[x^{n+1}\right]_1^2 \\
&= \frac{2^{n+1}}{n+1}\ln 2 - \frac{1}{(n+1)^2}(2^{n+1}-1)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, dans le cas où $n = -1$, on doit calculer

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx.$$

On pose alors $\ln x = t$, soit

$$\frac{dx}{x} = dt \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x = 1 \rightarrow t = 0 \\ x = 2 \rightarrow t = \ln 2 \end{cases}$$

de sorte que

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^{\ln 2} t \, dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\ln 2} = \frac{(\ln 2)^2}{2}$$

v. Pour tout $\alpha \leq \beta$, on a

$$\begin{aligned} I(\beta) - I(\alpha) &= \int_\beta^2 \mathrm{e}^{-t^2}\,dt - \int_\alpha^2 \mathrm{e}^{-t^2}\,dt \\ &= -\int_2^\beta \mathrm{e}^{-t^2}\,dt - \int_\alpha^2 \mathrm{e}^{-t^2}\,dt = -\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-t^2}\,dt \leq 0 \end{aligned}$$

puisque l'intégrand e^{-t^2} est strictement positif sur $\mathbb{R}$ et que l'intégrale d'une fonction positive sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ est positive. Dès lors, on a bien $I(\beta) \leq I(\alpha)$.

Le 7 novembre 2019

EXANA521 – Polytech, UMons, Mons, 2015.

Etudier dans $\mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$f(x) = e^{\sqrt{|x-2|}}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

- Domaine : $\mathbb{R}$
- Parité ? non, mais symétrie par rapport à la droite $x = 2$
  - Zéros ? aucun
  - asymptotes
    - AH : aucune car $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$
    - AV : aucune
    - AO : aucune car $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

signes :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$+$	1	$+$	$+\infty$

  - dérivée première
    - si $x > 2$: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}} e^{\sqrt{x-2}}$
    - si $x < 2$: $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}} e^{\sqrt{2-x}}$

signes :

x	$-\infty$		2			$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	-	$-\infty$	$+\infty$	$+$	$+\infty$

  - dérivée seconde
    - si $x > 2$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(e^{\sqrt{x-2}})'\sqrt{x-2} - e^{\sqrt{x-2}}(\sqrt{x-2})'}{2(x-2)} \\ &= \frac{e^{\sqrt{x-2}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x-2}}\right)}{2(x-2)} \\ &= e^{\sqrt{x-2}} \frac{\sqrt{x-2}-1}{4(x-2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

qui s'annule pour

$$1-\sqrt{x-2}=0 \iff 1=x-2 \iff x=3$$

et qui tend vers $-\infty$ en $x=2$

– si $x<2$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= -\frac{(e^{\sqrt{2-x}})'\sqrt{2-x}-e^{\sqrt{2-x}}(\sqrt{2-x})'}{2(2-x)}\\
&= -\frac{e^{\sqrt{2-x}}(\frac{-1}{2}-\frac{-1}{2\sqrt{2-x}})}{2(2-x)}\\
&= e^{\sqrt{2-x}}\frac{\sqrt{2-x}-1}{4(2-x)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}$$

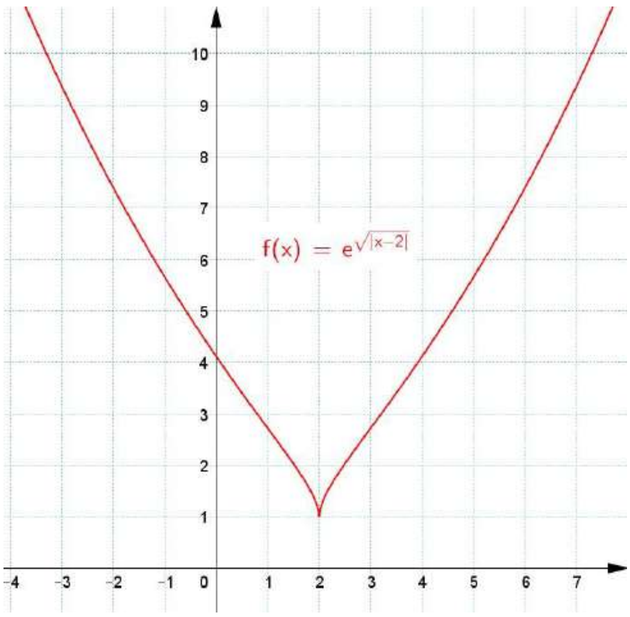
qui s'annule pour

$$1+\sqrt{2-x}=0 \iff 1=2-x \iff x=1$$

et qui tend vers $-\infty$ en $x=2$

signes :

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f''(x)$	$+\infty$	+	0	-	$-\infty$	-	0	+	$+\infty$



Le 1 mars 2020

EXANA522 – Polytech, UMons, Mons, 2015.

Etudiez la fonction : $f(x) = \dfrac{\ln|x|+1}{x}$

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

Domaine de définition : $]-\infty, 0[\ \cup\ ]0, +\infty[$

Parité : f est une fonction impaire :

$$f(-x) = -f(x)$$

Soit $x > 0$ **:**

Racines :

$$f(x) = 0 \quad si \quad \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{1}{e} \approx 0,3$$

Asymptotes et limites :

$$Pour \quad x > 0 \quad on \quad a \quad f(x) = \frac{\ln(x) + 1}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) :$$

sachant que :

$$\lim_{x \to 0^+} (1 + \ln x) = -\infty$$

et :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Par produit

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim \left((1 + \ln\ x)\frac{1}{x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) :$$

Sachant que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{ln\ x}{x} = 0$$

On en déduit que pour tout x strictement positif :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+ln\ x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{ln\ x}{x} + \frac{1}{x} = 0+0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe au voisinage de $+\infty$
Et comme $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty$, l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe au voisinage de 0

Dérivée première

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}.x - (\ln x + 1)}{x^2} = \frac{-\ln\ x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ pour $x = 1$
étude du signe de $f'(x)$

$$-\ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$$

Et donc : $f'(x) > 0$ pour $x \in]0^+, 1[$ et $f'(x) < 0$ pour $x \in]1, +\infty[$

Dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}.x^2 - (-\ln x.2x)}{x^4} = \frac{-x + 2x\ln x}{x^4} = \frac{x\,(2\ ln\ x - 1)}{x^4}$$

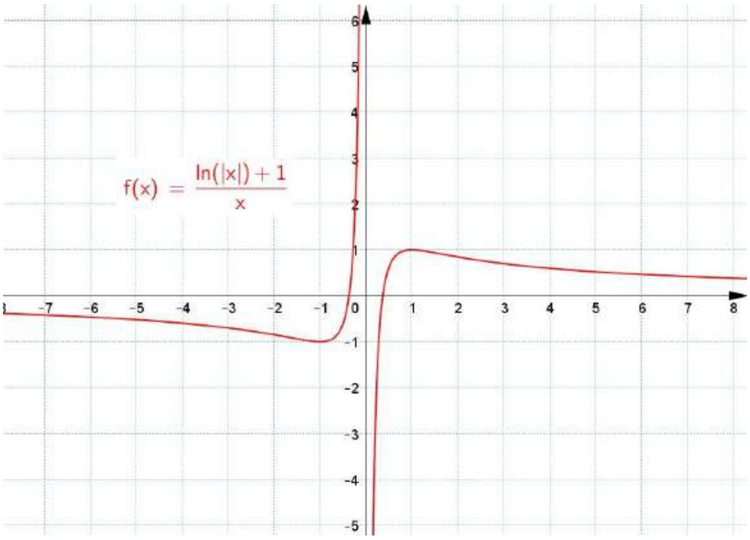
$f''(x) = 0$ pour $x = e^{1/2} = \sqrt{e} = \approx 1,6$
Le point $(1.6, f(1.6))$, c.a.d, le point $(1.6, 0.91)$ est un point d'inflexion

$$f'(x) = \frac{-\ln\ x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{x\,(2\ ln\ x - 1)}{x^4}$$

En récapitulatif, tableau de signes

x	0		0.3		1		1.6		$+\infty$
$f'(x)$	/	+	+	+	0	−	−	−	−
$f''(x)$	/	−	−	−	−	−	0	+	+
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0.91	$\searrow$	0^+
	A.V.		racine		$\bigcap$		inflexion		A.H.



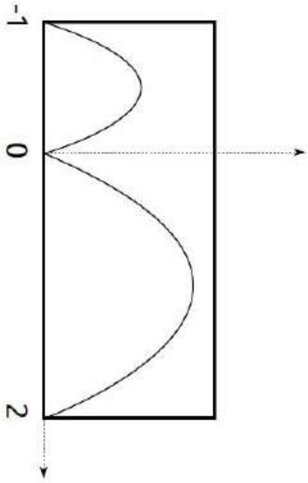
Le 1 mars 2020

EXANA523 – Polytech, UMons, Mons, 2015.

Un ingénieur informaticien célèbre, Donald K., souhaite définir une nouvelle police de caractères. Pour construire le *B* majuscule, il se donne un rectangle de 3 u.l. (unités de longueur) verticalement sur 1 u.l. horizontalement. La lettre devra occuper toute la hauteur de ce rectangle. Les 2 lobes seront décrits par des paraboles. Le lobe supérieur possèdera une hauteur et une largeur maximales respectivement égales à la moitié de celles du lobe inférieur. Enfin, l'aire totale intérieure de la lettre sera égale à 4/9 de l'aire du rectangle.

Expliquez comment aider Donald K.

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf



Hauteur des lobes

$$\begin{cases} p_1(x) &= ax(x+1) = a(x^2+x) \\ p_2(x) &= bx(x-2) = b(x^2-2x) \end{cases}$$

Largeur des lobes

$$\begin{cases} p_1(-\frac{1}{2}) &= -\frac{1}{4}a \\ p_2(1) &= -b \end{cases}$$

On en déduit $a = 2b$ et on a :
$-1 \leq b < 0$

Aire totale

$$\begin{aligned} 2b\int_{-1}^{0}(x^2+x)dx + b\int_{0}^{2}(x^2-2x)dx &= 2b\left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + b\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_{0}^{2} \\ &= -2b\left[\frac{-1}{3}+\frac{1}{2}\right] + b\left[\frac{8}{3}-4\right] \\ &= b\left[\frac{-1}{3}+\frac{-4}{3}\right] \\ &= -b\frac{5}{3} \end{aligned}$$

Il faut donc :

$$-b\frac{5}{3} = \frac{4}{9}3 = \frac{4}{3} \to b = -\frac{4}{3}.\frac{3}{5} = -\frac{4}{5}$$

On déduit : $a = -\frac{8}{5}$

Le 1 mars 2020

EXANA524 – Polytech, UMons, Mons, 2015.

Effectuez l'analyse de la fonction $f(x)$ suivante et faites-en une représentation graphique soignée.

$$f(x) = (\ln(x) - 1).\ln(x)$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

- Le domaine de $f(x)$ est $\mathcal{D} = \{ x \in \mathbb{R}_0^+ \}$.
- La fonction n'est ni paire ni impaire.
- Deux racines sont facilement obtenues : $x = 1$, $x = e$.
- Une asymptote verticale existe :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty \cdot -\infty = +\infty$$

- Il n'y a pas d'asymptote horizontale :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

- il n'y a pas d'asymptote oblique :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln(x)}{x} (\ln(x) - 1) = \lim_{x \to \infty} \frac{\ln^2(x) - \ln(x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln^2(x) - \ln(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\ln(x)\frac{1}{x} - \frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2\ln(x) - 1}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2\ln(x) - 1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{x} = 0$$

– le tableau de signe de la fonction est :

x	$0 \quad 1 \quad e \quad +\infty$
$\ln(x)$	$\Vert \; - \; 0 \; + \; + \; +$
$\ln(x)-1$	$\Vert \; - \; - \; - \; 0 \; +$
$f(x)$	$\Vert \; + \; 0 \; - \; 0 \; +$

– La dérivée de la fonction est $f'(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x}$, elle s'annule en $x = \sqrt{e} \approx 1.6$

– les variations de signe de f' sont reprises au tableau suivant :

x	$0 \quad \sqrt{e} \quad +\infty$
x	$0 \; + \; + \; +$
$2\ln(x)-1$	$\Vert \; - \; 0 \; +$
$f'(x)$	$\Vert \; - \; 0 \; +$

– La dérivée seconde de la fonction est $f''(x) = \frac{3-2\ln(x)}{x^2}$, elle s'annule en $x = \sqrt{e^3}$

– les variations de signe de f'' sont reprises au tableau suivant :

x	$0 \quad \sqrt{e^3} \quad +\infty$
$f''(x)$	$\Vert \; + \; 0 \; -$

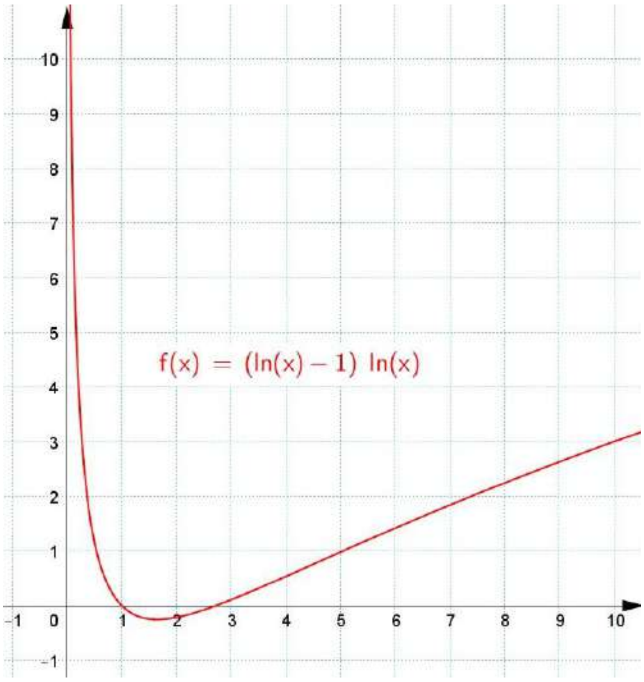
– on note un point d'inflexion en $x = \sqrt{e^3} \approx 4.5$

– le graphe de la fonction est fourni à la figure suivante :

– deux points particuliers aident à la construction du graphique :

$$f(\sqrt{e^3}) = 3/4$$

$$f(\sqrt{e}) = -1/4$$



Le 1 mars 2020

EXANA525 – Polytech, UMons, Mons, 2015.

Soit une parabole d'équation $f(x) = ax^2 + bx + c$ dans le plan de repère orthonormé. Sachant que cette parabole passe par l'origine et par le point $A(-3;-3/2)$ et que la tangente à la parabole au point A passe par le point $B(0;-27/2)$, on demande de trouver la position du point P de la parabole telle que la distance entre ce point P et le point $M(0;-4)$ soit minimale.

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

A) Equation de la Parabole $\mathcal{P}(x) = ax^2 + bx + c$:

1) Points appartenant à la parabole

$*O(0;0) \in \mathcal{P}(x)$

$\rightarrow c = 0$

$*A(-3;-3/2) \in \mathcal{P}(x)$

$\rightarrow 9a - 3b = -3/2$ (1)

2) Tangente en A passe par B

$t \equiv y = mx + p$

$*m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3/2-(-27/2)}{-3-0} = \frac{24/2}{-3} = -4$

$* -27/2 = -4.0 + p$

$\rightarrow p = -27/2$

$\Rightarrow t \equiv y = -4x - 27/2$

3) Dérivée de $\mathcal{P}$ en A égale m

$\mathcal{P}'(x) = 2ax + b$

$\mathcal{P}'(-3) = 2a(-3) + b = m = -4$

$\rightarrow -6a + b = -4$ (2)

$\Rightarrow$ (2) dans (1) donne :

$9a - 3(6a-4) = -3/2 \rightarrow -9a = -27/2 \rightarrow a = 3/2$

$b = 6.(3/2) - 4 = 5$

$\Rightarrow \mathcal{P}(x) = 3/2x^2 + 5x$

B) Soit $f(x)$ la distance entre le point $M(0;-4)$ et la parabole $\mathcal{P}$

$$f(x) = |M\mathcal{P}(x)| = \sqrt{(x-0)^2 + (3/2x^2 + 5x - (-4))^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 9/4x^4 + 25x^2 + 15x^3 + 16 + 12x^2 + 40x}$$

$$f(x) = \sqrt{9/4x^4 + 15x^3 + 38x^2 + 40x + 16}$$

$\rightarrow f(x)$ est à minimiser : $f'(x) = 0$

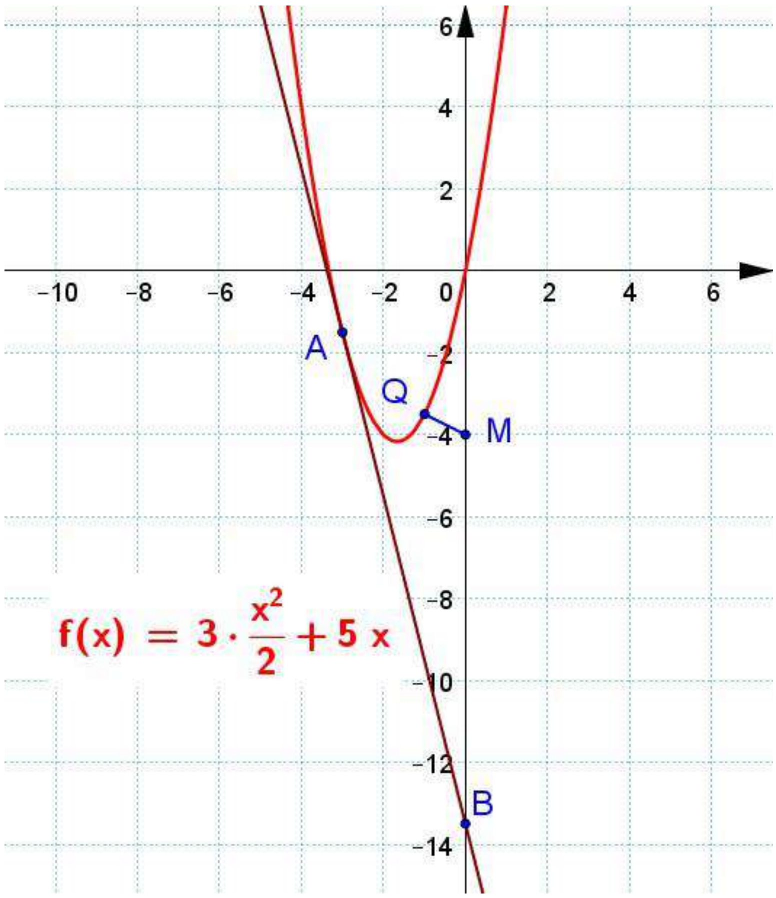
$$9x^3 + 45x^2 + 76x + 40 = 0$$

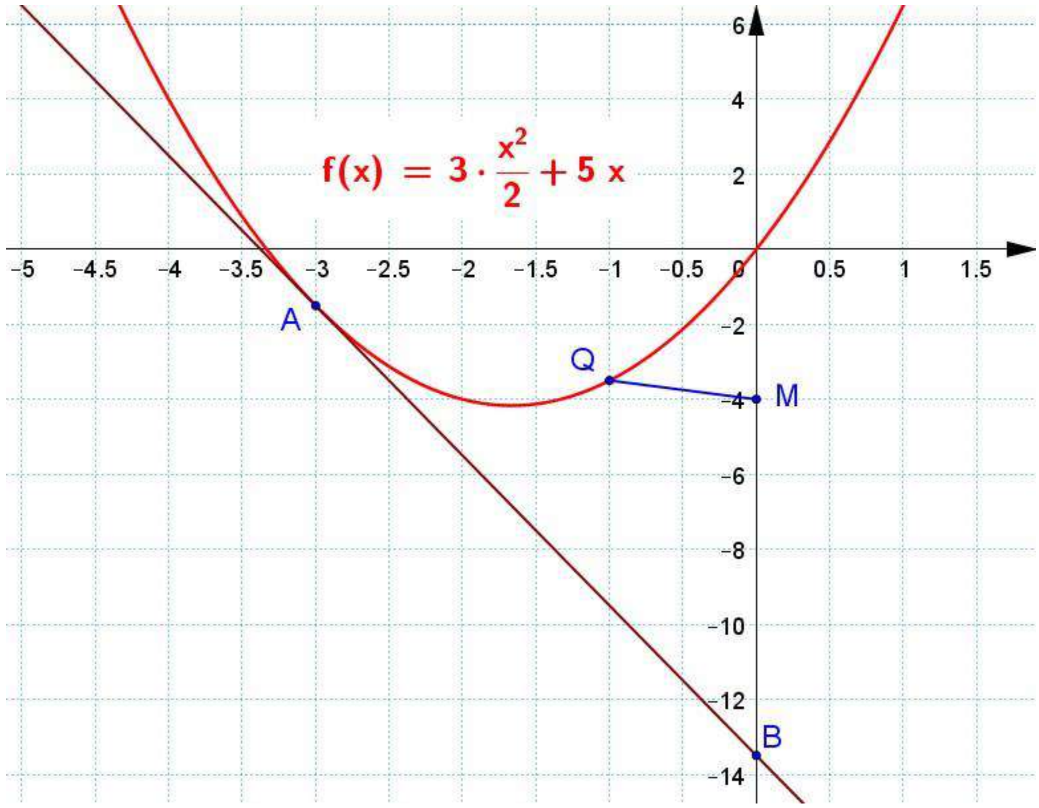
$$(x+1)(9x^2 + 36x + 40) = 0$$

$\rightarrow$ Seul solution : $x = -1$

$\Rightarrow$ Coordonnées du point Q : $Q(-1, \mathcal{P}(-1)) \rightarrow Q(-1, -7/2)$

$\Rightarrow |M\mathcal{P}|_{min} = |MQ| = \sqrt{5}/2$





Le 1 mars 2020

EXANA526- Polytech, UMons, Mons, 2015.

Etudier la fonction

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{(x-1)(x+4)}}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

1. Domaine de définition :
   $\mathrm{dom}(f) : x \in]-\infty, -4] \cup [1, +\infty[$
2. Zéros de f : pas dans son domaine de définition
3. Parité : néant, ni paire, ni impaire
4. Asymptotes
   - AH :

     $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, asymptote horizontale

     $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, deuxième asymptote horizontale

   - AV :

     $\lim_{x\to-4^-} f(x) = \frac{-4}{0^+} = -\infty$, asymptote verticale

     $\lim_{x\to1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$, deuxième asymptote verticale

5. Dérivée première f'

$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{3x-8}{((x-1)(x+4))^{\frac{3}{2}}}$$

   Tableau de signe de f' :

x		-4		$+1$		$\frac{8}{3}$	
$f'(x)$	$-$	/		/	$-$	0	$+$

6. Dérivée seconde f'' :

$$f''(x) = \frac{3}{4}\frac{-4x^2 + 13x + 16}{((x-1)(x+4))^{\frac{5}{2}}}$$

Zéros de f'' :

$$x_{1,2} = \frac{13 \pm \sqrt{425}}{8} = \{4.2\cdots, -0.9\cdots\}$$

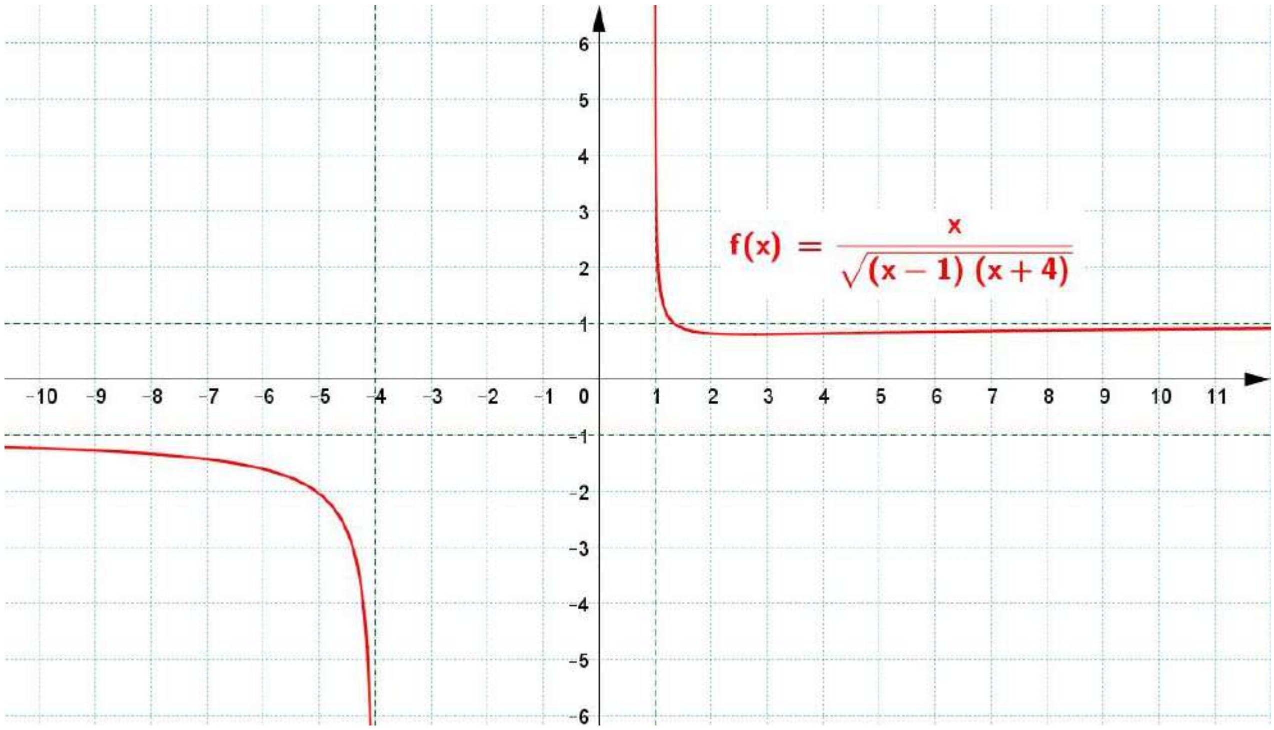
Tableau de signe de f'' :

x		-4		$x_2 = -0.9$		$+1$		$x_1 = 4.2\ldots$	
$f''(x)$	$-$	/	$-$	0		/	$+$	0	$-$

7. Tableau de signe :

x	$-\infty$			-1	4			$\frac{8}{3}$			x_1			$+\infty$
y'	−	−	−	‖	‖	−	−	0	+	+	+	+	+	+
y''	−	−	−	‖	‖	+	+	+	+	+	0	−	−	−
y	↓	↓	↓			↓	↓		↑	↑	↑	↑	↑	↑
	∩	∩	∩			∪	∪	∪	∪	∪		∩	∩	∩
	asH			asV	asV			min			inf			asH

8. Tracé de la fonction :



Le 1 mars 2020

EXANA527- Polytech, UMons, Mons, 2016.

Calculez

$$I_1 = \int_{-3}^{3} |x|\sqrt{4-|x|}\,dx$$

$$I_2 = \int_{-3}^{3} x\sqrt{4-|x|}\,dx$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

a) Condition d'existence sur les fonctions : $-4 \leq x \leq 4$
$\rightarrow$ Les bornes d'intégration appartiennent au domaine.

b) Calcul de I_1 :

$$\begin{aligned} |x|\sqrt{4-|x|} &= x\sqrt{4-x} \qquad si\ x \geq 0 \\ &= -x\sqrt{4+x} \qquad si\ x < 0 \end{aligned}$$

$\rightarrow$ La fonction est paire ($f(x) = f(-x)$) et les bornes d'intégration symétriques. On obtient donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-3}^{3} |x|\sqrt{4-|x|}\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^3 x\sqrt{4-x}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

En posant $t = 4 - x \rightarrow \mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$, on obtient :

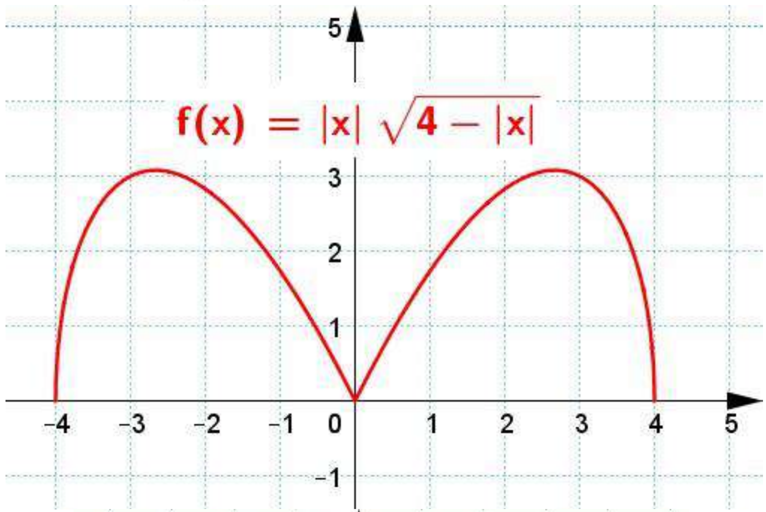
$$\begin{aligned} I_1 &= -2\int_4^1 (4-t)\sqrt{t}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\int_4^1 4\sqrt{t} - t^{3/2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2\left[4\frac{2}{3}t^{3/2} - \frac{2}{5}t^{5/2}\right]_4^1 \\ &= -2\left[4\frac{2}{3} - \frac{2}{5} - \left(4\frac{2}{3}8 - \frac{2}{5}32\right)\right] \end{aligned}$$

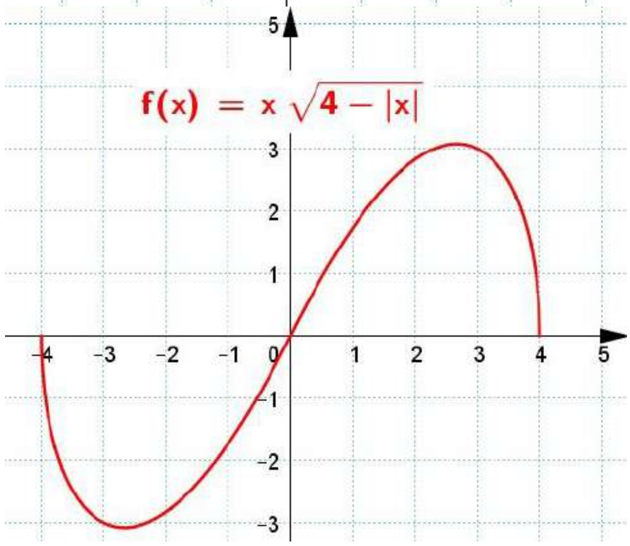
$$
\begin{aligned}
&= -2\left(-\frac{280}{15}+\frac{186}{15}\right)\\
&= 188/15
\end{aligned}
$$

c) Calcul de I_2 :

$$
\begin{aligned}
x\sqrt{4-|x|} &= x\sqrt{4-x} \qquad si\ x \geq 0\\
&= x\sqrt{4+x}\ si\ x < 0
\end{aligned}
$$

$\rightarrow$ La fonction est impaire ($f(x) = -f(-x)$) et les bornes d'intégration symétriques.
$\Rightarrow$ On obtient donc $I_2 = 0$.





Le 1 mars 2020

EXANA528 - Polytech, UMons, Mons, 2016.

Avec le réchauffement de la planète, les Boréliens, habitants de l'île de Borel au plein milieu de l'océan Pacifique, sont relativement inquiets. En effet, la montée des eaux risque de noyer la vallée dans laquelle ils sont nombreux à habiter, au pied d'un volcan.
Des ingénieurs des Mines et Géologues de l'UMONS ont fait un relevé d'altitudes, en partant de grandes profondeurs à l'ouest jusqu'au bord du cratère du volcan à l'est. Par calculs, ils obtiennent que le profil l'île peut être suffisamment bien représenté par la fonction $y(x)$ où x et y sont exprimés en mètres :

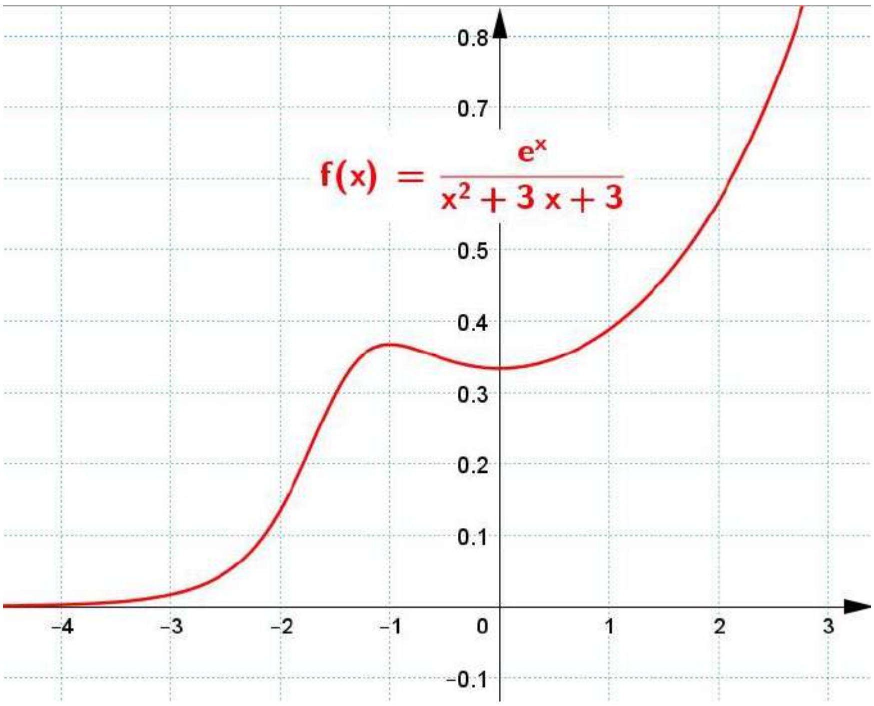
$$y(x)=\frac{e^x}{x^2+3x+3}$$

– Représenter précisément cette fonction, sans rechercher les racines de la dérivée seconde.
– En supposant le niveau actuel des eaux à 0 mètres, déterminer la hauteur maximale de montée des eaux avant que la vallée ne soit inondée.

Nous reprenons la solution proposée par l'université
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf

Puisque le dénominateur ne s'annule jamais, la fonction a pour domaine $\mathbb{R}$.
Il y a une asymptote horizontale $y=0$ quand $x \to -\infty$.
La dérivée première $f'(x) = \dfrac{e^x.x.(1+x)}{(3+3x+x^2)^2}$ s'annule en $x=0$ et $x=-1$. Elle est négative entre les racines et positive ailleurs.
La dérivée seconde $f''(x) = \dfrac{e^x(3+6x+3x^2+2x^3+x^4)}{(3+3x+x^2)^3}$ est bien négative en $x=-1$ et positive en $x=0$. Comme $\lim_{x\to-\infty} f''(x) < 0$, il existe certainement un point d'inflexion de $f(x)$ à gauche de $x=-1$ et un autre entre $x=-1$ et $x=0$.

L'eau peut donc monter de $f(-1)=e^{-1}$ mètres.



Le 1 mars 2020

EXANA529 – Polytech, UMons, Mons, 2016.

Réaliser l'étude complète de la fonction suivante :

$$f(x) = x\,e^{-x^2/2}$$

Nous reprenons la solution proposée par l'université **https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/AlgebreAnalyse_2014-2017_siteweb_2020.pdf**

- Le domaine de définition de la fonction est $\mathbb{R}$.
- La fonction s'annule en $x = 0$
- La fonction est impaire : $f(-x) = -xe^{-x^2/2} = -f(x)$
- Limites :

$$lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2/2} = \frac{+\infty}{+\infty} = lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2/2}x} = 0^+$$

Nous avons une asymptote horizontale en $+\infty$ A.H. :$y = 0^+$

$$lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2/2} = \frac{-\infty}{+\infty} = lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^{x^2/2}x} = 0^-$$

Nous avons une asymptote horizontale en $-\infty$ A.H. :$y = 0^-$

- Dérivée première

$$f'(x) = \frac{1.e^{x^2/2} - x.x.e^{x^2/2}}{e^{x^2/2}e^{x^2/2}} = (1-x^2)e^{-x^2/2}$$

Les zéros de $f'(x)$ sont : $1 - x^2 = 0$ soit $x = \pm 1$. $f'(x)$ est positive entre 0 et 1 ; $f(x)$ sera croissante entre 0 et 1. Elle passe par un maximum en 1 et est ensuite décroissante (même démarche pour les x négatifs - fonction impaire)

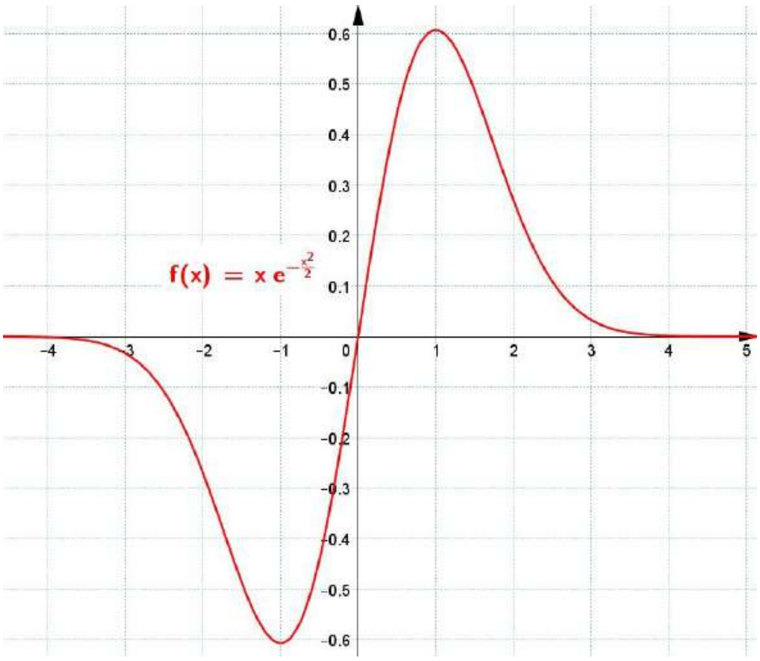
- Dérivée seconde :

$$f''(x) = \frac{-2x.e^{x^2/2} - (1-x^2).x.e^{x^2/2}}{e^{x^2/2}e^{x^2/2}} = \frac{x(x^2-3)}{e^{x^2/2}}$$

Les zéros de $f''(x)$ sont : $x = 0$ et $x^2 - 3 = 0$ soit $x = \pm\sqrt{3} = \pm 1.73$. Il y a donc trois points d'inflexion.

Tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
y'		$-$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0^-		-0.39		-0.61		0		0.61		0.39		0^+
y''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	



Le 1 mars 2020