

Exercices résolus de mathématiques.

Analyse

ANA 9

EXANA090 – EXANA099

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Avril 04

EXANA090 – Bruxelles, juillet 2003.

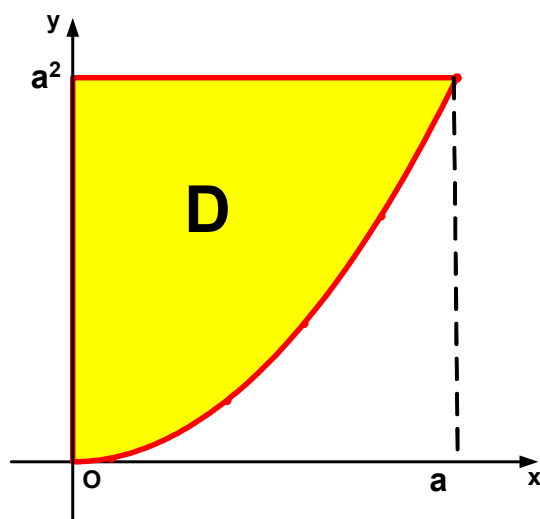
Dans l'espace euclidien \mathcal{R}^3 muni du repère orthonormé $Oxyz$, soient

- D la région du plan $Oxyz$, définie par

$$D := \{(x, y, 0) \in \mathcal{R}^3 \mid 0 \leq x \leq a; x^2 \leq y \leq a^2\}$$

- S le solide engendré par la rotation autour de l'axe Oy de la région D

- 1) Faire le croquis de D
- 2) Calculer l'aire de D
- 3) Calculer le volume de S



$$A_D = a^3 - \int_0^a x^2 dx = a^3 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{2a^3}{3}$$

$$\begin{aligned} V_S &= 2\pi \int_0^{a^2} (a - \sqrt{y})^2 dy = 2\pi \left(a[y]_0^{a^2} - \frac{2}{3} \left[y^{\frac{3}{2}} \right]_0^{a^2} \right) \\ &= 2\pi \left(a^3 - \frac{2}{3} a^3 \right) = \frac{2\pi a^3}{3} \end{aligned}$$

EXANA091 – Bruxelles, juillet 2003.

Soit

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx \quad \text{où } n \in \mathbb{N}$$

- 1) Sans calculer I_n , calculer $I_n + I_{n+2}$
- 2) En déduire I_8

$$a) I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, dx \quad I_{n+2} = \int_0^{\pi/4} \tan^{n+2} x \, dx$$

$$\begin{aligned} I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} (\tan^n x + \tan^{n+2} x) \, dx = \int_0^{\pi/4} \tan^n x (1 + \tan^2 x) \, dx \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan^n x \, d \tan x = \left[\frac{\tan^{n+1} x}{n+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$b) I_8 = \frac{1}{6+1} - I_6 = \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + I_4 = \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - I_2 = \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 1 + I_0$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/4} 1 \, dx = [x]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4}$$

$$\rightarrow I_8 = -\frac{76}{105} + \frac{\pi}{4}$$

Modifié le 3 mars 2005 (Maurice H). Modifié le 28 juillet 2006 (Benoît Baudalet)

EXANA092 – Bruxelles, septembre 2003.

Soit la fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par

$$f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$$

Soit C la courbe d'équation $y = f(x)$

- a. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$: préciser les domaines de définition de f' et f'' .
- b. Déterminer une équation cartésienne de la tangente à C au point d'abscisse 1.
- c. Etablir le tableau de variations de f , f' et f'' contenant
 - a. Les racines de f , f' et f'' (pour les valeurs approchées des racines utiliser une décimale)
 - b. Les signes de $f'(x)$ et de $f''(x)$
 - c. Les extrema de f , les domaines de croissance et de décroissance de f
 - d. Les points d'inflexion de C et les domaines de concavité vers le haut et vers le bas de C .
- e) Tracer soigneusement la courbe C d'après les résultats du c)

$$a) f'(x) = 2(x+1)e^{-x} - (x+1)^2 e^{-x} = (1+x)(1-x)e^{-x}$$

$$\text{dom } f'(x) = \mathbb{R}$$

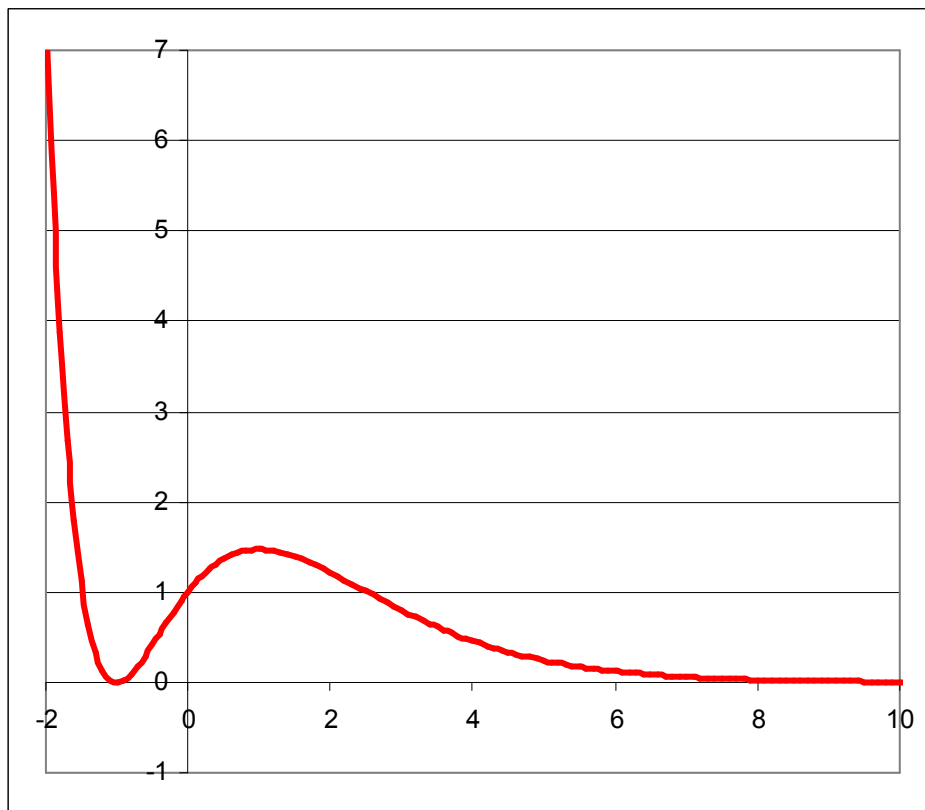
$$f''(x) = (1-x)e^{-x} - (1+x)e^{-x} - (1+x)(1-x)e^{-x} \\ = e^{-x}(x^2 - 2x - 1) = e^{-x}(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})$$

$$\text{dom } f''(x) = \mathbb{R}$$

$$b) f'(1) = 0 \rightarrow \text{Tangente} \equiv y = 1$$

Tableau des variations

	$-\infty$	-1	$1-\sqrt{2} \cong 0.4$	1	$1+\sqrt{2} \cong 2.4$	$+\infty$			
$f'(x)$		0		0					
$f''(x)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$			
$f(x)$	$+\infty$	\searrow	min	\nearrow	\nearrow	MAX	\searrow	\searrow	0
		\cup		\cap		\cup			

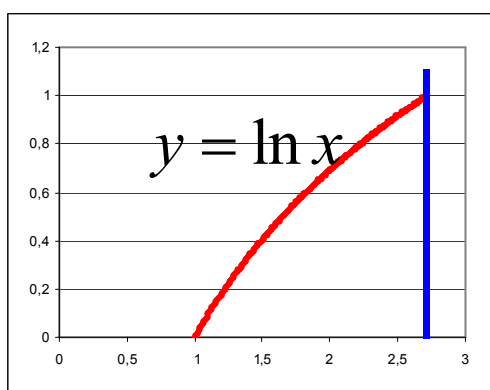


EXANA093 – Bruxelles, septembre 2003.

Dans l'espace euclidien \mathfrak{R}^3 muni du repère orthonormé $Oxyz$, soient

- D la région du plan $Oxyz$, définie par
$$D := \{(x, y, 0) \in \mathfrak{R}^3 \mid 1 \leq x \leq e; 0 \leq y \leq \ln x\}$$
- S le solide engendré par la rotation autour de l'axe Ox de la région D

- 1) Faire le croquis de D
- 2) Calculer l'aire de D
- 3) Calculer le volume de S



$$A_D = \int_1^e \ln x = [x \ln x - x]_1^e = 1$$

$$V_D = 2\pi \int_1^e \ln^2 x \, dx$$

Calculons : $I = \int \ln^2 x \, dx$ par parties

$$f = \ln^2 x \quad f' = \frac{2 \ln x}{x}$$

$$g' = 1 \quad g = x$$

$$\rightarrow I = x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx = x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x$$

$$\text{Donc : } V_D = 2\pi [x \ln^2 x - 2x \ln x + 2x]_1^e = 2\pi(e - 1)$$

EXANA094 – Bruxelles, septembre 2003.

Soit

$$I = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^4 x \, dx \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \sin^4 x \, dx$$

- 1) Sans calculer I et J , calculer $I + J$ et $I - J$
- 2) En déduire I et J .

$$a) I = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^4 x \, dx \quad \int_0^{\pi/4} \cos^2 x \sin^4 x \, dx$$

$$\begin{aligned} I + J &= \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int_0^{\pi/4} \sin^2 2x \, d2x \end{aligned}$$

$$\text{Calculons } \int \sin^2 t \, dt \text{ par parties :} \quad \begin{array}{ll} f = \sin t & f' = \cos t \\ g' = \sin t & g = -\cos t \end{array}$$

$$\rightarrow \int \sin^2 t \, dt = -\cos t \sin t + \int \cos^2 t \, dt = -\frac{\cos 2t}{2} + t - \int \sin^2 t \, dt$$

$$\rightarrow \int \sin^2 t \, dt = \frac{t}{2} - \frac{\cos 2t}{4}$$

$$\text{Donc : } I + J = \frac{1}{8} \left[\frac{2x}{2} - \frac{\cos 4x}{4} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{32}$$

$$b) I - J = \int_0^{\pi/4} \sin^2 x \cos^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/4} \sin^2 2x \cos 2x \, dx = \frac{1}{8} \int_0^{\pi/4} \sin^2 2x \, d \sin 2x$$

$$= \frac{1}{8} \left[\frac{\sin^3 2x}{3} \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{24}$$

$$c) \begin{cases} I + J = \frac{\pi}{32} \\ I - J = \frac{1}{24} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{32} + \frac{1}{24} \right) \\ J = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{32} - \frac{1}{24} \right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} I = \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3} \right) \\ J = \frac{1}{16} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} \right) \end{cases}$$

EXANA095 – Louvain, juillet 2002, série 1.

a) $\lim_{x \rightarrow 0 (x < 0 \text{ ou } x > 0)} \left(x e^{\frac{1}{x}} \right)$

b) $\int \frac{x^3 - x + 1}{1 + x^2} dx$

c) $\int \frac{dx}{e^x + 1}$

d) $\int \sin \sqrt{x} dx$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x}} \rightarrow \begin{cases} 1) \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \\ 2) \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0 \end{cases}$$

$$b) \int \frac{x^3 - x + 1}{1 + x^2} dx = \int \left(x - \frac{2x}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^2} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \int \frac{d(x^2 + 1)}{1 + x^2} + \arctan x = \frac{x^2}{2} - \ln(1 + x^2) + \arctan x$$

$$c) \int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \left(1 - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx = x - \int \frac{d(e^x + 1)}{e^x + 1} = x - \ln(e^x + 1)$$

d) $I = \int \sin \sqrt{x} dx$

Soit $t^2 = x \rightarrow dx = 2t dt \rightarrow I = 2 \int t \sin t dt$

$f = t \quad f' = 1 \rightarrow I = -2t \cos t + 2 \int \cos t dt = -2t \cos t + 2 \sin t$
 $g' = \sin t \quad g = -\cos t$

$\rightarrow I = -2\sqrt{x} \cos \sqrt{x} + 2 \sin \sqrt{x}$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA096 – Louvain, juillet 2002, série 1.

Etudiez la fonction définie

$$f(x) = \tan x - 2 \sin x$$

a) Donnez le domaine et la période f .

Dans ce qui suit, on limite l'étude à l'intervalle $[-\pi/2, 3\pi/2]$

b) Situer les racines de f .

c) Donnez les extrema de f en situant leurs abscisses de façon fort approximative ($\sqrt[3]{4} \cong 1.6$, $\arccos 0.8 \cong \pi/5$;

d) Situer les points d'inflexion de f .

e) Donnez le graphe de f (toujours sur l'intervalle $[-\pi/2, 3\pi/2]$).

$$a) \text{ dom } f : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$$

Période : 2π

$$b) \text{ Racines : } \tan x - 2 \sin x = 0 \rightarrow \sin x - 2 \sin x \cos x = 0 \rightarrow \sin x = \sin 2x$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \rightarrow \text{Dans l'intervalle donné : } \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} \\ x = 0 \\ x = \frac{\pi}{3} \\ x = \pi \end{cases}$$

$$c) \text{ Asymptotes : } x = -\frac{\pi}{2} \text{ et } x = \frac{\pi}{2}$$

d) Extrema

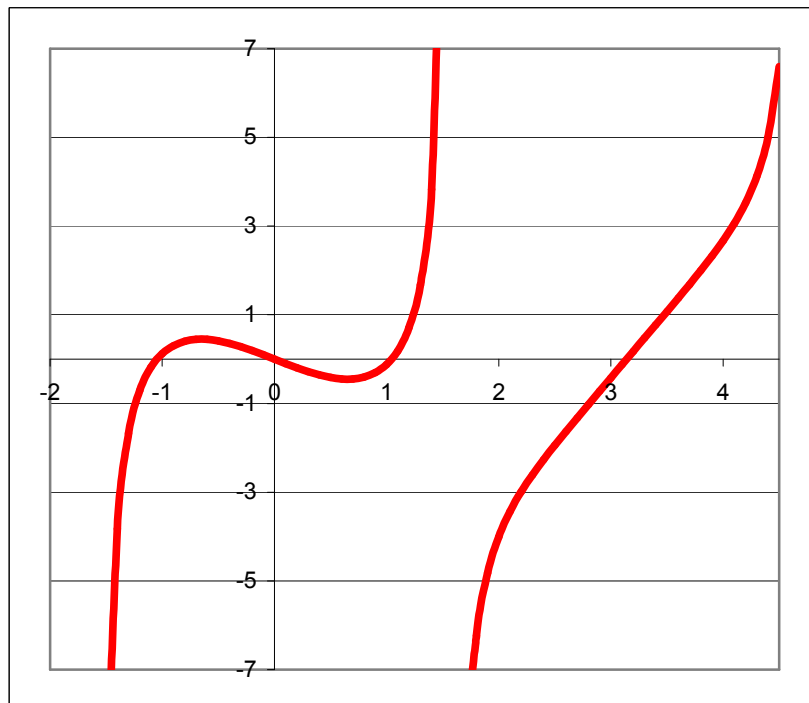
$$f'(x) = \tan^2 x - 2 \cos x + 1 = 0 \rightarrow \frac{1}{\cos^2 x} = 2 \cos x \rightarrow 1 = 2 \cos^3 x$$

$$\rightarrow x = \pm \arccos \sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \pm \arccos 0.7937 \cong \pm \frac{\pi}{5}$$

e) Points d'inflexion : $f''(x) = 2 \tan^3 x + 2 \tan x + 2 \sin x = 0$

$$\rightarrow \tan x (\tan^2 x + 1) = -\sin x \rightarrow \frac{\sin x}{\cos^3 x} = -\sin x$$

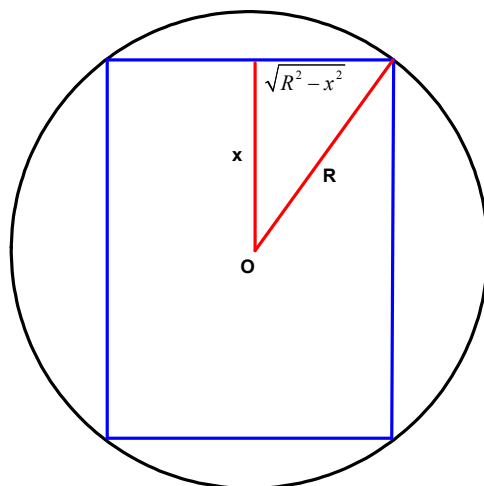
$$\rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 & \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \\ \cos^3 x = -1 & \rightarrow x = \pi \rightarrow y = 0 \end{cases}$$



Résolu le 24 juin 2004

EXANA097 – Louvain, juillet 2002, série 1.

On considère tous les cylindres droits inscrits dans une sphère de rayon R . Déterminez le cylindre (rayon r , hauteur h) de volume maximal. Donnez ensuite ce volume et comparez le au volume de la boule.



Soit x la demi hauteur du rectangle inscrit dans le cercle de rayon R .

Le rectangle $2x \cdot \sqrt{R^2 - x^2}$ engendre un cylindre circulaire droit inscrit dans la sphère de rayon R .

Volume du cylindre : $V_C = 2\pi \cdot 2x \cdot (R^2 - x^2) = 4\pi R^2 x - 4\pi x^3$

Le volume sera maximal pour une valeur de x telle que

$$\frac{dV_C}{dx} = 0 \rightarrow 4\pi R^2 - 12\pi x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3} R$$

Donc, hauteur du cylindre : $2x = \frac{2\sqrt{3}}{3} R$ rayon du cylindre : $r = \sqrt{R^2 - x^2} = R \frac{\sqrt{6}}{3}$

Volume du cylindre : $V_C = 2\pi \frac{2\sqrt{3}}{3} R \cdot \left(R \frac{\sqrt{6}}{3} \right)^2 = \frac{8\sqrt{3}\pi R^3}{9}$

Volume de la sphère : $V_S = \frac{4\pi R^3}{3}$

$$\rightarrow \frac{V_S}{V_C} = \frac{\frac{4\pi R^3}{3}}{\frac{8\sqrt{3}\pi R^3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Résolu le 24 juin 2004

EXANA098 – Louvain, juillet 2002, série 2.

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} =$$

b)

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

c)

$$\int (1+x^2) \sin x \, dx$$

d)

$$\int \ln(1+\sqrt{x}) \, dx$$

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{1+x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (\sqrt{1+x}+1)}{x+1-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{1+x}+1) + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 2 \end{aligned}$$

$$b) I = \int x^2 \ln x \, dx$$

$$\begin{aligned} f = \ln x \quad f' = \frac{1}{x} \\ g' = x^2 \quad g = \frac{x^3}{3} \end{aligned} \rightarrow I = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx$$

$$\rightarrow I = \frac{x^3}{9} (3 \ln x - 1)$$

$$c) I = \int (1+x^2) \sin x \, dx = \int \sin x \, dx + \int x^2 \sin x \, dx = -\cos x + \int x^2 \sin x \, dx$$

Traitons le deuxième terme I_2

$$\begin{array}{l} f = x^2 \quad f' = 2x \\ g' = \sin x \quad g = -\cos x \end{array} \rightarrow I_2 = -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$$

$$\begin{array}{l} f = x \quad f' = 1 \\ g' = \cos x \quad g = \sin x \end{array} \rightarrow I_2 = -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x \, dx$$

$$\rightarrow I_2 = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x$$

Donc

$$\begin{aligned} I &= \cos x - x^2 \cos x + 2x \sin x \\ &= \cos x(1-x^2) + 2x \sin x \end{aligned}$$

$$d) I = \int \ln(1+\sqrt{x}) \, dx$$

$$\text{Soit } t = \sqrt{x} \rightarrow dx = 2t \, dt \rightarrow I = 2 \int \ln(1+t) t \, dt$$

$$\begin{array}{l} f = \ln(1+t) \quad f' = \frac{1}{1+t} \\ g' = t \quad g = \frac{t^2}{2} \end{array} \rightarrow I = t^2 \ln(1+t) - \int \frac{t^2}{1+t} \, dt$$

Traitons le deuxième terme I_2

$$\text{Compte tenu que : } \frac{t^2}{1+t} = t - 1 + \frac{1}{1+t}$$

$$I_2 = -\frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t|$$

$$\text{Donc : } I = t^2 \ln(1+t) - \frac{t^2}{2} + t - \ln|1+t|$$

$$\rightarrow I = x \ln(1+\sqrt{x}) - \frac{x}{2} + \sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})$$

EXANA099 – Louvain, juillet 2002, série 2.

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2} = \sqrt[3]{x^2(x-1)}$$

- Donnez le domaine et les racines de f
- Donnez la ou les asymptotes éventuelles.
- Donnez les maxima et minima éventuels (abscisse et ordonnée) en vous basant sur l'étude de la fonction dérivée $f'(x)$.
- Situez les points d'inflexion et de rebroussement éventuels en sachant que

$$f''(x) = \frac{-2/9}{x^{4/3}(x-1)^{5/3}}$$

- Donnez le graphe de f .

a) $\text{dom } f = \mathbb{R}$

Racines : $x = 0$ et $x = 1$

b) Asymptote oblique

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x^2(x-1)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^2 - x^3}{\sqrt[3]{(x^2(x-1))^2} + x\sqrt[3]{x^2(x-1)} + x^2} = -\frac{1}{3}$$

$$\rightarrow AO \equiv x - \frac{1}{3}$$

Pas d'asymptote verticale ou horizontale..

c) Extrema

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 2x}{3(x^2(x-1))^{\frac{3}{2}}} \rightarrow 3x^2 - 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 0 \\ x = \frac{2}{3} \rightarrow y = -\frac{\sqrt[3]{4}}{3} \cong 0.53 \end{cases}$$

$$d) f''(x) = \frac{-2/9}{x^{4/3}(x-1)^{5/3}}$$

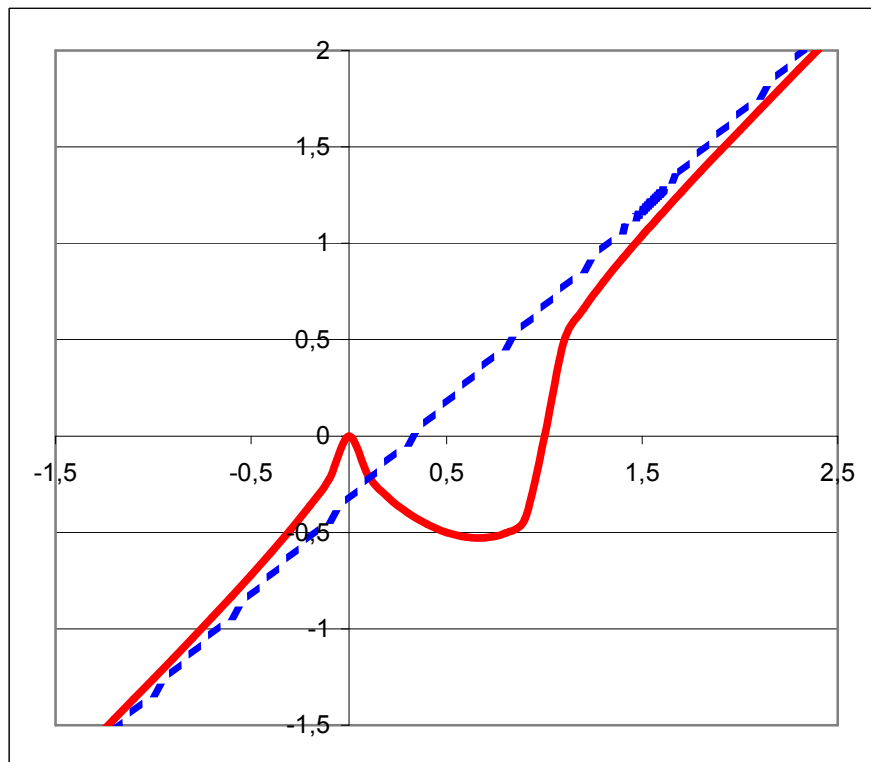
On constate que $f''(x)$ ne change pas de signe au passage par 0, de plus

$\lim_{x \rightarrow 0} f''(x) = \infty$. On a donc un point de rebroussement situé à l'origine.

On constate aussi que $f''(x)$ change de signe au passage par $x = 1$,

de plus $\lim_{x \rightarrow 1} f''(x) = \infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x) = \infty$. On a un point d'inflexion en

$x = 1$ avec une tangente verticale.



Résolu le 24 juin 2004