

## Fiche TRI001 – Les équations trigonométriques.

### 1 – Type $\sin x = a$

**Méthode :**  $\sin x = a \rightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + 2k\pi \\ x = \pi - \arcsin a + 2k\pi \end{cases}$

**Exemple 1 :**  $\sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$

### 2 – Type $\cos x = a$

**Méthode :**  $\cos x = a \rightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi$

**Exemple 2 :**  $\cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

### 3 – Type $\tan x = a$

**Méthode :**  $\tan x = a \rightarrow x = \arctan a + k\pi$

**Exemple 3 :**  $\tan x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

### 4 – Type $\sin x = \sin a$

**Méthode :**  $\sin x = \sin a \rightarrow \begin{cases} x = a + 2k\pi \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{cases}$

**Exemple 4 :**

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{7} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{7} + 2k\pi \\ x = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi \end{cases}$$

**Exemple 5:**

$$\sin 3x = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow \sin 3x = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{6}$$
$$\rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ 3x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \\ x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

**5 – Type  $\cos x = \cos a$**

**Méthode :**  $\cos x = \cos a \rightarrow x = \pm a + 2k\pi$

**Exemple 6:**  $\cos x = \cos \frac{\pi}{7} \rightarrow x = \pm \frac{\pi}{7} + 2k\pi$

**Exemple 7:**

$$\cos^2 x = \sin^2 + \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow \cos 2x = \cos \left( x + \frac{\pi}{2} \right)$$
$$\rightarrow 2x = \pm \left( x + \frac{\pi}{2} \right) + 2k\pi \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{2} \end{cases}$$

**6 – Type  $\tan x = \tan a$**

**Méthode :**  $\tan x = \tan a \rightarrow x = \pm a + k\pi$

**Exemple 8:**  $\tan x = \tan \frac{\pi}{7} \rightarrow x = \frac{\pi}{7} + k\pi$

**Exemple 9:**

$$2 \tan x = (1 - \tan^2 x) \cdot \tan \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \rightarrow \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \tan \left( x - \frac{\pi}{3} \right)$$
$$\rightarrow \tan 2x = \tan \left( x - \frac{\pi}{3} \right) \rightarrow 2x = x - \frac{\pi}{3} + k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

## 7 – Equation homogène en sin x et cos x

### Méthode :

- Diviser par la plus haute puissance de cos x et sin x
- Prendre tan x ou cot x comme inconnue auxiliaire

### Exemple 10:

$$2\sin^2 t - 4\sin t \cos t - 4\cos^2 t = -3$$

$$2\sin^2 t - 4\sin t \cos t - 4\cos^2 t = -3\sin^2 t - 3\cos^2 t$$

$$5\sin^2 t - 4\sin t \cos t - \cos^2 t = 0$$

$$5\tan^2 t - 4\tan t - 1 = 0$$

$$\rightarrow \tan t = \frac{+2 \pm \sqrt{9}}{5} \rightarrow \begin{cases} \tan t = 1 & \rightarrow t = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ \tan t = -\frac{1}{5} & \rightarrow t = 0.1974 \pm k\pi \end{cases}$$

## 8 – Type $a \cos x + b \sin x = c$

### Méthode 1

$$a \cos x + b \sin x = \frac{a}{\cos \varphi} \cos(x - \varphi)$$

$$\text{avec } \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

### Exemple 11:

$$3 \cos x + \sin x + 3 = 0$$

$$\tan \varphi = \frac{1}{3} \rightarrow \varphi = 0.322 \rightarrow \cos \varphi = 0.9487$$

$$\rightarrow \frac{3}{0.9487} \cos(x - 0.322) = -3 \rightarrow \cos(x - 0.322) = -0.9487$$

$$\rightarrow x - 0.322 = \pm 2.82 + 2k\pi \rightarrow \begin{cases} x = 3.142 + 2k\pi \approx \pi + 2k\pi \\ x = -2.498 + 2k\pi \end{cases}$$

## Variante de la méthode 1

$$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi)$$

$$\text{où } r.e^{i\varphi} = a + ib \rightarrow r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \tan \varphi = \frac{b}{a}$$

### Exemple 12 :

Reprenons l'exemple précédent :

$$3 \cos x + \sin x + 3 = 0$$

$$r = \sqrt{10}, \tan \varphi = \frac{1}{3} \rightarrow \varphi = 0.322$$

$$\rightarrow \sqrt{10} \cos(x - 0.322) = -3 \rightarrow \cos(x - 0.322) = -0.9487$$

$$\rightarrow x - 0.322 = \pm 2.82 + 2k\pi \rightarrow \begin{cases} x = 3.142 + 2k\pi \approx \pi + 2k\pi \\ x = -2.498 + 2k\pi \end{cases}$$

## Méthode 2

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi)$$

$$\text{avec } \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ ou } \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

### Exemple 13:

$$3 \cos x + \sin x + 3 = 0$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} \rightarrow \varphi = 1.249$$

$$\rightarrow \sqrt{3^2 + 1^2} \sin(x + 1.249) = -3 \rightarrow \sin(x + 1.249) = -0.9487$$

$$\rightarrow \begin{cases} x + 1.249 = -1.249 + 2k\pi \\ x + 1.249 = \pi + 1.249 + 2k\pi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2.498 + 2k\pi \\ x = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

### Méthode 3

$$\text{On remplace : } \sin x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}$$

#### Exemple 14:

$$3 \cos x + \sin x + 3 = 0 \rightarrow 3 \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} + 3 = 0 \quad (1)$$

On chasse le dénominateur.  $\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} > 0\right)$

$$\rightarrow 3 \left(1 - \tan^2 \frac{x}{2}\right) + 2 \tan \frac{x}{2} + 3 \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) = 0$$

$$\rightarrow 2 \tan \frac{x}{2} = -6 \quad \rightarrow x = -2.498 + 2k\pi$$

On remarque donc que l'on a "perdu" la solution :  $x = \pi + 2k\pi$ . En effet, pour cette valeur de  $x$ ,  $\tan \frac{x}{2} = \infty$  et l'équation (1) est indéterminée. Il convient donc de vérifier si cette valeur est une solution.

#### Exemple 15:

$$\cos 2x + \sqrt{3} \cos \left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{3} \rightarrow \cos 2x - \sqrt{3} \sin x = \sqrt{3}$$

$$\rightarrow \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x} - \sqrt{3} \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x} - \sqrt{3} = 0 \rightarrow (1 + \sqrt{3}) \tan^2 x - 2\sqrt{3} \tan x + \sqrt{3} - 1 = 0$$

$$\rightarrow \tan x = \frac{-\sqrt{3} \pm \sqrt{3 - (3-1)}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} \pm 1}{1 + \sqrt{3}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x = -0.78539 + k\pi \simeq \frac{3\pi}{4} + k\pi \\ x = -0.2618 + k\pi \simeq -\frac{\pi}{12} + k\pi \end{cases}$$

Ici, on n'a pas "perdu" de solution en cours de route.

On vérifie facilement que  $x = \pm \frac{\pi}{2}$  n'est pas une solution.

## 9 – Cas general

### Méthode

- On fait les transformations de façon à faire des facteurs communs aux différents termes.
- On factorise
- On traite séparément chaque facteur.

#### Exemple 16 :

$$4 \sin 2x + 6 \cos x = 0 \rightarrow 8 \sin x + \cos x + 6 \cos x = 0$$

$$\rightarrow 2 \cos x \cdot (4 \sin x + 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} 1) \cos x = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2) \sin x = -\frac{3}{4} \rightarrow \begin{cases} x = -0.848 + 2k\pi \\ x = 3.90 + 2k\pi \end{cases} \end{cases}$$

#### Exemple 17 :

$$\frac{\cot x - \cos x}{\cot x + \cos x} = 2(1 - \sin x) \quad \text{CE : } \begin{cases} \sin x \neq 0 \rightarrow x \neq 0^\circ + k180^\circ \\ \cot x + \cos x \neq 0 \rightarrow \cos x \neq 0 \rightarrow x \neq 90^\circ + k180^\circ \end{cases}$$

$$\frac{\cot x - \cos x}{\cot x + \cos x} = \frac{\frac{\cos x}{\sin x} - \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x} + \cos x} = \frac{\cos x \frac{1 - \sin x}{\sin x}}{\cos x \frac{1 + \sin x}{\sin x}} = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

→ L'équation devient :  $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} = 2(1 - \sin x)$ . Or  $\sin x \neq 1$  en vertu des CE.

$$\rightarrow \frac{1}{1 + \sin x} = 2 \rightarrow 2 \sin x = -1 \rightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \rightarrow \boxed{x = -30^\circ + k360^\circ \text{ ou } x = 210^\circ + k360^\circ}$$

#### Exemple 18 :

$$\cos 9x - 2 \cos 6x = 2 \rightarrow \cos(6x + 3x) - 2 \cos^2 3x + 2 \sin^2 3x = 2(\sin^2 3x + \cos^2 3x)$$

$$\rightarrow \cos 6x \cos 3x - \sin 6x \sin 3x - 4 \cos^2 3x = 0 \rightarrow (2 \cos^2 3x - 1) \cos 3x - 2 \sin^2 3x \cos 3x - 4 \cos^2 3x = 0$$

$$1) \cos 3x = 0 \rightarrow 3x = \pm 90^\circ + k180^\circ \rightarrow x = 30^\circ + k60^\circ$$

$$2) 2 \cos^2 3x - 1 - 2(1 - \cos^2 3x) - 4 \cos 3x = 0$$

$$4 \cos^2 3x - 4 \cos 3x - 3 = 0 \rightarrow \cos 3x = \begin{cases} \frac{3}{2} \text{ A rejeter} \\ -\frac{1}{2} \rightarrow 3x = \pm 120^\circ + k360^\circ \rightarrow x = \pm 40^\circ + k120^\circ \end{cases}$$