Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 0

EXGAE000 – EXGAE009

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXGAE001 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2000.

Donner une équation au plan α tel que :

1) α contient le point $A(1,\ 3,-2)$.

2) α est parallèle à la droite a d'équation: $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{3}$

3) α est perpendiculaire au plan β d'équation : $2x-3y+2z=1$

Le plan α contient le point $A\,(1,\ 3\ ,-2)$:

$$\begin{cases} x-1 = ha_1 + ka_2 \\ y-3 = hb_1 + kb_2 \\ z+2 = hc_1 + kc_2 \end{cases}$$

(a_1, b_1, c_1) et (a_2, b_2, c_2) sont deux vecteurs (c'est-à-dire deux directions).

Recherchons la première direction : // à la droite a

<u>Première méthode</u>

$$a \equiv \begin{cases} \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y+2}{2} \\ \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{z-1}{3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2x-3y-4=0 \\ x-z+2=0 \end{cases}$$

On détermine deux points de la droite :

$$\text{si } x=0 \rightarrow \begin{cases} -3y-4=0 \\ -z+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{4}{3} \\ z=2 \end{cases}$$

$$\text{si } y=0 \rightarrow \begin{cases} 2x-4=0 \\ x-z+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=4 \end{cases}$$

Les points $(0,-4/3,2)$ *et* $(2,0,4)$ donne le vecteur directeur

$(a_1, a_2, a_2) = (2-0, 0+4/3, 4-2) = (2, 4/3, 2) = (3, 2, 3)$

Deuxième méthode

La direction est donnée par le produit vectoriel des deux vecteurs normaux aux plans qui déterminent la droite $a:(2,-3,0)$ et $(1,0,-1)$

$$\to (a_1,a_2,a_2)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(3,2,3)$$

Troisième méthode $\;$ (La plus simple)

Le vecteur directeur est directement donné par les dénominateurs de l'équation donnant $a \;\to\; (3,2,3)$

La deuxième direction est perpendiculaire au plan

$2x\;\text{-}3y+2z=0$, donc // au vecteur $(a_2, b_2, c_2) \;=\; (2, \text{-}3, 2)$.

Le plan recherché est par conséquent :

$$\begin{cases} x\text{-}1=2h+2k \\ y\text{-}3=\dfrac{4}{3}h-3k \;\to\; x-1-z-2=0 \\ z+2=2h+2k \end{cases}$$

$$\to\; x-z-3=0$$

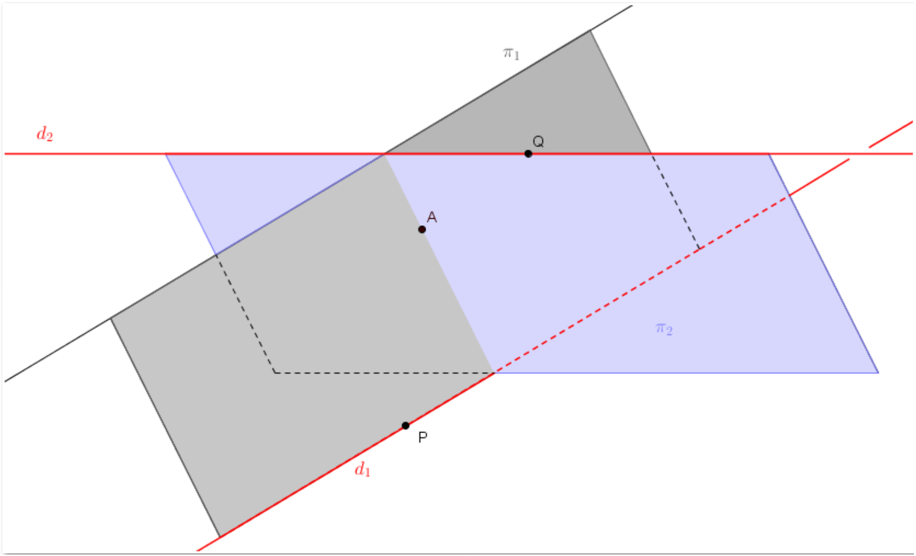
Résolu le 21 janvier 2002. Modifié le 26 août 2004

EXGAE002 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.

Donner les équations d'une droite d astreinte à passer par un point $A:(-1,1,2)$ et à s'appuyer sur $\left(\text{c'est-à-dire être d'intersection non vide avec}\right)$ les droites d_1 et d_2 suivantes.

$$d_1 \quad : \quad \frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{3}=\frac{z-2}{5}$$
$$d_2 \quad : \quad x+1=y=-z$$

- Le point A et la droite d_1 détermine un plan π_1.
- Le point A et la droite d_2 détermine un plan π_2
- L'intersection des deux plans est une droite qui passe par A et s'appuie sur d_1 et d_2.



Dans ce type de problème, on établit l'équation du plan π_1 (π_2) passant par d_1 (resp. d_2) et le point A. L'intersection de π_1 et de π_2 est la droite s'appuyant sur d_1 et d_2 et passant par A.

Remarquons que le problème n'admet pas de solution si d_1 et d_2 sont (strictement) parallèles et $A \notin \pi$ où π est le plan déterminé par d_1 et d_2.

a. Plan π_1 déterminé par d_1 et $A(-1,1,2)$.

- d_1 admet comme vecteur directeur $\vec{u}_1(2,3,5)$ qui est aussi directeur de π_1.
- d_1 passe par $P(1,4,2)$, donc $\vec{u}_2 = \overrightarrow{AP}$ de composantes $(2,3,0)$ est aussi directeur de π_1.
  Toute combinaison linéaire $\alpha\vec{u}_1 + \beta\vec{u}_2$ $(|\alpha|+|\beta|>0)$ donne un vecteur directeur de π_1.
  $\vec{u}_3 = \frac{1}{2}(\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$ de composantes $(0,0,1)$ est donc directeur de π_1.
- L'équation de π_1 peut être établie par déterminant:

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 0 \\ y-1 & 3 & 0 \\ z-2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \boxed{\pi_1 \equiv 3x-2y=-5}.$$

π_1 est un plan parallèle à l'axe Oz (plan "vertical").
On peut aussi établir cette équation en partant des équations paramétriques de π_1 :

$$\pi_1 \equiv \begin{cases} x &= & -1+2\lambda & (L_1) \\ y &= & 1+3\lambda & (L_2) \\ z &= & 2+5\lambda+\mu & (L_3) \end{cases}$$

Le paramètre μ n'intervient que dans L_3 (z varie donc indépendamment de x et de y).
Pour obtenir l'équation cartésienne de π_1, il suffit donc d'éliminer λ de L_1 et L_2 :

$$\lambda = \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} \iff 3x-2y=-5.$$

---

b. Plan π_2 déterminé par d_2 et $A(-1,1,2)$.

- d_2 admet comme vecteur directeur $\vec{v}_1(1,1,-1)$ qui est aussi vecteur directeur de π_2.
- d_2 passe par $Q(-1,0,0)$, donc $\vec{u}_2 = \overrightarrow{QA}$ de composantes $(0,1,2)$ est aussi directeur de π_2.
- D'où l'équation de π_2

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y & 1 & 1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} \iff \pi_2 \equiv \boxed{3x-2y+z=-3}.$$

En passant par les équations paramétriques:

$$\pi_2 \equiv \begin{cases} x &= & -1+\lambda & (L_1) \\ y &= & \lambda+\mu & (L_2) \\ z &= & -\lambda+2\mu & (L_3) \end{cases}$$

De L_1, on tire $\lambda = x+1$. En remplaçant dans L_2 et L_3: $\begin{cases} y = x+1+\mu \\ z = -x-1+2\mu \end{cases}$.

D'où $\mu = y-x-1$ et finalement
$z = -x-1+2(y-x-1) \iff 3x-2y+z=-3$, comme précédemment.

---

c. Equation de la droite d'intersection de π_1 et π_2.

L'équation de $d = \pi_1 \cap \pi_2$ est obtenue en formant le système dont les lignes sont les équations de π_1 et π_2 (facile!) :

$$d \equiv \begin{cases} 3x & - & 2y & & & = & -5 & (L_1) \\ 3x & - & 2y & + & z & = & -3 & (L_2) \end{cases} \iff \begin{cases} 3x-2y &= & -5 \\ z &= & 2 \end{cases}$$

Cette droite est parallèle au plan Oxy (droite "horizontale) et admet comme vecteur directeur $\vec{t}(2,3,0)$.

Un manière simple de trouver un vecteur directeur de d, mais qui n'est valable qu'en repère orthonormé, est de calculer les composantes du produit vectoriel:

$$\vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \vec{i} + 3\vec{j} + 0 \cdot \vec{k}$$

$\vec{n}_1(3, -2, 0)$ est normal à $\pi_1 \equiv 3x - 2y = -5$ et $\vec{n}_2(0, 0, 1)$ est normal au plan d'équation $z = 2$.
Le vecteur $\vec{s} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$ est alors orthogonal à π_1 et à π_2 et est donc directeur de d.

Résolu le 21 janvier 2002. Modifié le 26 août 2004. Modifié le 14 janvier 2016 (Hugues Vermeiren)

EXGAE003 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

On demande d'écrire :

a) L'équation d'une sphère centrée en $A(1,\ 2,\ 3)$ et de rayon $R=6$

b) De montrer que la droite BC définie par

$$2x+3y-5z=-7$$
$$-x-y+2z=3$$

est un diamètre de la sphère précédente.

c) De déterminer les points de percée de BC dans la sphère.

d) De déterminer l'équation du plan tangent à la sphère au point de percée le plus éloigné de l'origine.

e) De montrer que les axes du système de référence percent le plan tangent précédent en 3 points $X\ (\text{sur } Ox), Y\ (\text{sur } Oy)$, et $Z\ (\text{sur } Oz)$ sommets d'un triangle équilatéral.

f) D'écrire l'équation de la hauteur issue de O dans le triangle OXY et de déterminer les coordonnées de son intersection avec XY. Soit V ce point.

g) D'écrire l'équation de la droite ZV et de montrer que cette droite est perpendiculaire a XY. Cette perpendicularité vous suggère-t-elle un théorème ?

$a)$ $\boxed{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=6^2}$

$b)$ On vérifie que le centre appartient à la droite

$$\begin{cases} 2x+3y-5z=-7 \\ -x-y+2z=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 2\times 1+3\times 2-5\times 3=-7 \\ -1-2+2\times 3=3 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} 2x+3y-5z=-7 \\ -x-y+2z=3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1+x \\ z=2+x \end{cases}$$

On remplace dans l'équation de la sphère

$$(x-1)^2+(1+x-2)^2+(2+x-3)^2=6^2$$

$$\rightarrow x=1\pm 2\sqrt{3}$$

$$\boxed{B:\begin{cases} x=1+2\sqrt{3} \\ y=2+2\sqrt{3} \\ z=3+2\sqrt{3} \end{cases} \quad C:\begin{cases} x=1-2\sqrt{3} \\ y=2-2\sqrt{3} \\ z=3-2\sqrt{3} \end{cases}}$$

$d)$ Un point et une normale détermine un plan.

Vecteurs directeurs de $\overline{AB}: \left(1+2\sqrt{3}-1,\ 2+2\sqrt{3}-2,\ 3+2\sqrt{3}-3\right) : (1,\ 1,\ 1)$

Plan tangent : $a\ \left(x-x_B\right)+b\ \left(y-y_B\right)+c\ \left(z-z_B\right)=0$

$$1.\left(x-1-2\sqrt{3}\right)+1.\left(y-2-2\sqrt{3}\right)+1.\left(z-3-2\sqrt{3}\right)=0$$

$$\boxed{x+y+z-6\ \left(1+\sqrt{3}\right)=0}$$

$e)$ Les points d'intersections avec les axes sont

$X=6\ \left(1+\sqrt{3}\right)$

$Y=6\ \left(1+\sqrt{3}\right)$ $\rightarrow$ Ce qui détermine un triangle équilatéral.

$Z=6\ \left(1+\sqrt{3}\right)$

f) Dans le plan oxy, la droite XY a pour équation : $y=-x+6\ \left(1+\sqrt{3}\right)$

La droite $OV\ \perp\ XY$ a donc pour équation: $y=x$

dont les équations paramétriques sont : $\boxed{\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=0 \end{cases}}$

Coordonnées du point V: $\boxed{\left(3+3\sqrt{3},\ 3+3\sqrt{3},\ 0\right)}$

$g)$ $ZV \equiv \dfrac{x-0}{3+3\sqrt{3}-0}=\dfrac{y-0}{3+3\sqrt{3}-0}=\dfrac{z-6\ \left(1+\sqrt{3}\right)}{0-6\ \left(1+\sqrt{3}\right)}$

$$ZV \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ -6\ \left(1+\sqrt{3}\right)\ \ x+z=6\ \left(1+\sqrt{3}\right) \end{cases}$$

Vecteurs directeurs de ZV : $(1,\ 1,\ -1)$

Vecteurs directeurs de XY : $(1,\ -1,\ 0)$

On vérifie que la condition de perpendicularité est remplie :

$$a_1.a_2+b_1.b_2+c_1.c_2=0 \quad \rightarrow \qquad 1\times1+1\times\left(-1\right)+\left(-1\right)\times0=0$$

Résolu le 21 janvier 2002. Modifié le 26 août 2004. Modifié le 20 septembre 2006 (Sabine Bouzette)

EXGAE004 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

a) Donner l'équation cartésienne du plan p_1 parallèle à Oy et passant par les points de coordonnées $X,Y,Z\,(3,\ 0,-2)$ et $(0,\ 0,\ 1)$;

b) Écrire les équations paramétriques de la droite d'intersection de p_1 avec le plan p_2 d'équation $y+z-1=0$

c) Par le point $A(4,\ 3,\ 0)$, on abaisse la normale n au plan p_2.

i) Quelles sont les coordonnées du point de percée B de n dans p_2 ?

ii) Quelle est la valeur de la distance AB ?

$a)$ Les vecteurs directeurs de Oy sont : $(0,\ 1,\ 0)$

L'équation d'un plan connaissant deux points et une direction est :

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-1 \\ 3-0 & 0-0 & -2-1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \boxed{x+z-1=0}$$

$b)$ Equations implicites de la droite : $\begin{cases} x+z-1=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}$

Equations paramétriques : $\boxed{\begin{cases} x=1-t \\ y=1-t \\ z=t \end{cases}}$

$c)$ Vecteur normal à p_2 : $(0,\ 1,\ 1)$

Equation d'une droite connaissant un point et une direction :

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$$

$$\rightarrow n \equiv \frac{x-4}{0} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-0}{1} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x-4=0 \\ y-z-3=0 \end{cases}}$$

$d)$ Point de percée B: $\begin{cases} x-4=0 \\ y-z-3=0 \\ y+z-1=0 \end{cases} \rightarrow B:(4,\ 2,\ -1)$

$e)$ Distance AB :

$$|AB| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

$$= \sqrt{(4-4)^2+(3-2)^2+(1)^2} \quad = \boxed{\sqrt{2}}$$

Résolu le 21 janvier 2002. Modifié le 7 juillet 2004

EXGAE005 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

Soit une sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 5y + 13/4 = 0$$

Déterminer les coordonnées de la projection O' de son centre sur le plan d'équation

$$x - 2y + 2z + 2 = 0$$

En déduire d'intersection du plan et de la sphère.

Réduisons l'équation de la sphère :

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 5y + \frac{13}{4} = 0 \quad \to \quad (x+1)^2 + \left(y + \frac{5}{2}\right)^2 + z^2 = 4$$

C'est donc un sphère de centre $\left(-1,\ -\frac{5}{2},\ 0\right)$ et de rayon 2.

Le plan $x - 2y + 2z + 2 = 0$ détermine la direction de la normale : $(1,\ -2,\ 2)$

La normale qui passe par le centre a pour équation :

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y + \frac{5}{2}}{-2} = \frac{z}{2} \to n \equiv \begin{cases} 2x + y + \frac{9}{2} = 0 \\ y + z + \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

Calculons les coordonnées de la projection O'

C'est l'intersection de la normale et du plan :

$$\begin{cases} 2x & +y & & = & -\frac{9}{2} \\ & y & +z & = & -\frac{5}{2} \\ x & -2y & +2z & = & -2 \end{cases} \to \boxed{O' : \left(-\frac{5}{3},\ -\frac{7}{6},\ -\frac{4}{3}\right)}$$

Calculons la distance OO'

+	-1	$-5/2$	0
–	$\underline{-5/3}$	$\underline{-7/6}$	$\underline{-4/3}$
=	$2/3$	$-4/3$	$+4/3$
Au carré	$4/9$	$16/9$	$16/9$

$\to$ la somme $= 36/9 = 4$

$\to \boxed{|OO'| = \sqrt{4} = 2}$ = le rayon de la sphère. Par conséquent le plan est tangent à la sphère en O'

Résolu le 21 janvier 2002. Modifié le 6 juillet 2004

EXGAE006 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

On considère, dans l'espace euclidien E^3 rapporté au système d'axes de référence orthonormé $OXYZ$, 2 plans d'équation implicites :

Plan $P_1 : x+y+z-1=0$

Plan $P_2 : x=0$

On demande :

a) De dessiner un croquis à main levée représentant ces deux plans dans le système $OXYZ$.

b) De déterminer les équations implicites et les équations paramétriques de la droite d ($d = P_1 \cap P_2$).

c) D'établir l'équation implicite d'un plan P_3 passant par d et par le point $(1,1,1)$

d) D'établir l'équation implicite d'un plan P_4 passant par d et parallèle à l'axe OX : représenter P_4 sur le croquis.

---

2) Soit X, Y et Z les points d'intersections du plan P_1

Le plan P_2 n'est autre que la plan $Oyz \rightarrow ZY \equiv z = -y+1$

Equations implicites: $\boxed{d = P_1 \cap P_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y+z-1=0 \end{cases}}$

Equations paramétriques: $\boxed{d = P_1 \cap P_2 \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}}$

3) Soient deux points appartenant à d : $(0,0,1)$ et $(0,1,0)$

Un plan définit par 3 points a pour équation :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\boxed{P_3 \equiv x-y-z+1=0}$

4) Le plan P_4 est de la forme $By+Cz+D=0$ puisqu'il est $\perp$ à Oyz.

De plus $d \in P_4$, donc l'équation du plan ne peut être que $\boxed{P_4 \equiv y+z-1=0}$

Résolu le 21 janvier 2002. Modifié le 26 août 2004

EXGAE007 – POLYTECH, UMONS, Mons, questions-types 2000-2001.

Soient deux points $A\ (3,-2,-5)$ et $B\ (1,4,3)$. On demande :

a) De donner les équations paramétriques de la droite AB :

b) De préciser quel est le lieu des centres des sphères passant par A et B et de donner l'équation de ce lieu.

$a)$ On a les points $A(\ 3,-2,-5)$ et $B(\ 1,4,3)$

Equations paramétriques:

$$\begin{cases} x-3=k(1-3) \\ y+2=k(4+2) \\ z+5=-k(3+5) \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x=3+2k \\ y=-2-6k \\ z=-5-8k \end{cases}}$$

$b)$ Il est évident que le lieu est le plan médiateur de AB.

Milieu de AB : $M:(\ 2,1,-1)$

Cherchons un vecteur directeur de AB

$k=0 \rightarrow (\ 3,-2,-5\ )$

$k=-1 \rightarrow (\ 1,4,3\ )$

$$\vec{u}:(\ 2,-6,-8\ )=(\ 1,-3,-4\ )$$

Equation du plan :

$$(x-2)-3(y-1)-4(z+1)=0$$

$$\boxed{x-3y-4z-3=0}$$

$c)$ On connait le centre de la sphère : M

Le rayon est égale à AM :

Distance $|AM|^2$:

$+$	3	-2	-5	
-	2	1	-1	
$=$	1	-3	-4	
au carré	1	9	16	somme $=26$

$$\rightarrow \boxed{(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=26}$$

Résolu le 21 janvier 2002. Modifié le 26 août 2004

EXGAE008 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Dans une système d'axes de référence orthonormé $Oxyz$, on considère les points $A(2,0,3), B(0,5,1)$ et $P(0.5,3,0.5)$.

On demande :

a) De trouver un point K appartenant à OP et situé à égale distance des points A et B.

b) De calculer les trois angles du triangle ABK.

c) De déterminer les équations de la hauteur issue de K dans le triangle ABK et d'en rechercher la mesure.

$a)$ Il est évident que K appartient au plan médiateur de AB.

Paramètres directeurs de AB : $(-2, 5, -2)$

Milieu de AB $\quad M : \left(1, \frac{5}{2}, 2\right)$

Plan médiateur $\quad q \equiv -2x + 5y - 2z + d = 0$

Or $M \in q$ donc $\quad -2(1) + 5\left(\frac{5}{2}\right) - 2(2) + d = 0$ ou encore $\quad d = -\frac{13}{2}$

$$q \equiv -2x + 5y - 2z + -\frac{13}{2} = 0$$

Equations paramétriques de OP : $\begin{cases} x = 0.5\,t \\ y = 3t \\ z = 0.5t \end{cases}$

Le point de percée K s'obtient en combinant les équations de q et OP

$$\rightarrow \quad -t + 15t - t = \frac{13}{2} \quad \rightarrow \quad t = \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \boxed{K : \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right)}$$

b) Le triangle ABK est isocèle $\Rightarrow \widehat{KBA} = \widehat{KAB} \Rightarrow \widehat{AKB} = 2\pi - 2\,\widehat{KAB}$

Or $\cos\widehat{KAB} = \dfrac{\overrightarrow{AK}\ \overrightarrow{AB}}{|AK||AB|}$

avec $\overrightarrow{AK} : \left(-\dfrac{7}{4}, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{11}{2}\right)$

$$\overrightarrow{AK}\ \overrightarrow{AB} = -2\times\left(-\frac{7}{4}\right) + 5\times\frac{3}{2} - 2\times\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{33}{2}$$

$$|AK| = \sqrt{\left(-\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{11}{4}\right)^2} = 3.5882$$

$$|AB| = \sqrt{(2-0)^2 + (0-5)^2 + (3-1)^2} = 5.744$$

Donc $\cos\widehat{KAB} = \dfrac{16.5}{3.5882\times 5.744} = 0.8005$

$$\Rightarrow \boxed{\widehat{KBA} = \widehat{KAB} = 36.82°} \Rightarrow \boxed{\widehat{AKB} = 106.35°}$$

c) La hauteur du triangle ABK est une médiane.

or $M : \left(1, \dfrac{5}{2}, 2\right)$ et $K : \left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{3}{2}, \dfrac{1}{4}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{KM \equiv \begin{cases} x = 1 + \dfrac{3}{4}t \\ y = \dfrac{5}{2} + t \\ z = 2 + \dfrac{7}{4}t \end{cases}}$$

et $|KM| = \sqrt{\left(1-\dfrac{1}{4}\right)^2 + \left(\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}\right)^2 + \left(2-\dfrac{1}{4}\right)^2} \Rightarrow \boxed{|KM| = 2.15}$

Résolu le 21 janvier 2002. Modifié le 26 août 2004. Modifié le 16 septembre 2010 (Benoit Baudelet)

EXGAE009 – Polytech, Umons, Mons, questions-types 2000-2001.

Dans un repère cartésien orthonormé, on considère une sphère centrée à l'origine et de rayon 5 et un plan p_1 d'équation

$$x+\sqrt{8}y-4x+12=0$$

On demande :

a) Les équations paramétriques de la droite d passant par l'origine et orthogonale à p_1.

b) Les coordonnées des points de percée de cette droite d dans la sphère.

c) Les équations des plans tangents à la sphère aux points de percée.

---

a) Paramètres directeus de la normale au plan : $\left(1,\sqrt{8},-4\right)$

Droite d passant par l'origine : $\boxed{\begin{cases} x=t \\ y=\sqrt{8}t \\ z=-4t \end{cases}}$

b) Equation de la sphère : $x^2+y^2+z^2=25$

Points de percée : $t^2+8t^2+16t^2=25 \quad \to \quad t=\pm 1$

$\to \quad \boxed{I_1:\left(1,\sqrt{8},-4\right) \quad et \quad I_2:\left(-1,-\sqrt{8},4\right)}$

c) Les plans tangents en I_1 et I_2 sont parallèles à p_1.

$\to \quad \boxed{x+\sqrt{8}y-4z+25=0}$ et $\boxed{x+\sqrt{8}y-4z-25=0}$

Résolu le 21 janvier 2002. Modifié le 26 août 2004