Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 2

EXGAE020 – EXGAE029

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Mars 04

EXGAE020 – EPL, UCL, LLN, juillet 1999, série 2.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on considère le point fixe A sur OX, de coordonnées $(a,0,0)$ avec $a \geq 0$, et les points mobiles $B(0,b,0)$ et $C(0,0,c)$sur les axes OY et OZ respectivement. B et C sont tels que $b \leq a$; $c \geq a$; $bc = 2a^2$.

On s'intéresse au plan ABC et à sa distance à l'origine.

Déterminer les distances minimum et maximum entre le plan ABC et l'origine et les valeurs correspondantes de b et c .

Rappel : Pour obtenir la distance de l'origine au pplan

- On considère le vecteur normal au plan $\vec{n}$

- On calcul le vecteur normal unitaire : $\overrightarrow{1_n} = \dfrac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}$

- La distance est égale au produit scalaire de $\overrightarrow{1_n}$ par un vecteur quelconque définit par O et un point du plan.

Plan $ABC \equiv \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1 \quad \rightarrow \quad ABC \equiv bcx + acy + abz = abc$

$\rightarrow \vec{n} : (bc,\, ac,\, ab) \rightarrow \|\vec{n}\|^2 = b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 = a^2(b+c)^2 \quad (\text{car } bc = a^2)$

$\rightarrow \overrightarrow{1_n} : \left(\dfrac{bc}{a(b+c)} ; \dfrac{c}{b+c} ; \dfrac{b}{b+c} \right)$

Soit $\overrightarrow{OA} : (a,\, 0,\, 0) \quad \rightarrow \quad d(ABC, O) = \overrightarrow{1_n} . \overrightarrow{OA} = \dfrac{bc}{b+c} = \dfrac{2a^2}{b+c} = \dfrac{2a^2 b}{b^2 + 2a^2}$

Discussion

Calculons le maximum en annulant la dérivée de $d\left(ABC,O\right)$ par rapport à b.

En effet, $d\left(ABC,O\right)$ est une fonction de b

$$\rightarrow \frac{d\left(d\left(ABC,O\right)\right)}{db}=\frac{4a^4-2a^2b^2}{\left(b^2+2a^2\right)^2} \;\rightarrow\; 4a^4-2a^2b^2=0 \;\rightarrow\; b=\pm a\sqrt{2}$$

Or vu les contraintes $a\geq 0\rightarrow c\geq 0\rightarrow 0\leq b\leq a,$ on ne retient que la solution positive $\rightarrow b=a\sqrt{2}$ $\left(\text{On a bien } b\leq a\right)$

Il s'agit bien d'un maximum puisque $\begin{cases} b<a\sqrt{2} \;\rightarrow\; \dfrac{d\left(d\left(ABC,O\right)\right)}{db}>0 \\ b>a\sqrt{2} \;\rightarrow\; \dfrac{d\left(d\left(ABC,O\right)\right)}{db}<0 \end{cases}$

Le minimum s'obtient en remarquant que $d\left(ABC,O\right)$ est par définition toujours positif

Sa valeur minimale est zéro, ce est vérifié par $b=0$

Conclusions

Maximum : $d\left(ABC,O\right)=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ si $b=c=a\sqrt{2}$

Minimum : $d\left(ABC,O\right)=0$ si $b=0$ et $c=+\infty$

Résolu décembre 2003. Modifié le 10 juillet 2004

EXGAE021 – EPL, UCL, LLN, septembre 1999.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on considère les trois plans :

$$\Pi_1 : \; ax + y + 2z + 3 = 0$$
$$\Pi_2 : \; x + by - z + 2 = 0$$
$$\Pi_3 : \; 2x - y + cz + d = 0$$

De l'origine O, on abaisse les perpendiculaires respectives p_1, p_2, p_3 aux 3 plans.

Déterminer les valeurs de $a,\; b\;, c,\; d$ telles que les trois perpendiculaires formentun trièdre orthogonal.

Il suffit d'exprimer que le produit scalaire des vecteurs normaux aux plans sont nuls.

$$\begin{cases} \overrightarrow{p_1} : (a,1,2) \\ \overrightarrow{p_2} : (1,b,-1) \\ \overrightarrow{p_3} : (2,-1,c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{p_1} \perp \overrightarrow{p_2} \Rightarrow a + b - 2 = 0 \\ \overrightarrow{p_1} \perp \overrightarrow{p_3} \Rightarrow 2a - 1 + 2c = 0 \\ \overrightarrow{p_2} \perp \overrightarrow{p_3} \Rightarrow 2 - b - c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a + 2c = 1 \\ b + c = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{4} \\ b = \dfrac{7}{4} \\ c = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

d est indéterminé

EXGAE022 – EPL, UCL, LLN - juillet 2000, série 1.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on considère les deux droites :

$$d_1 : \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$$

$$d_2 : \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \\ z = c \end{cases}$$

où $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ sont des constantes

a) Déterminer la relation qui doit lier ces constantes pour que les deux droites aient une intersection non vide.

b) Si

$$a = b = 2$$
$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

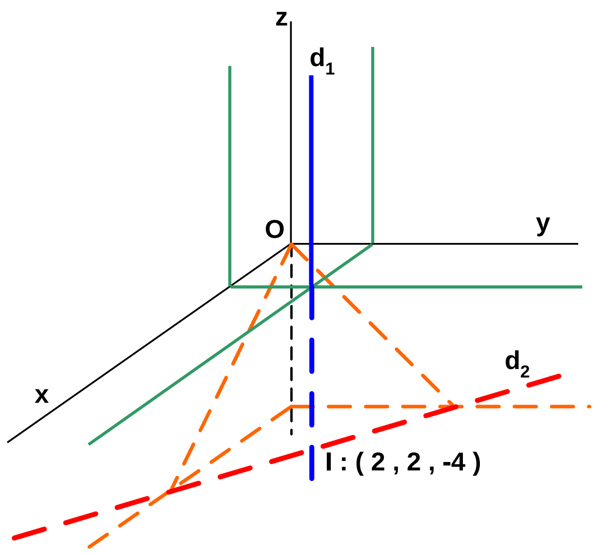
quelle doit être alors la valeur de c pour que cette intersection existe ?

c) Dessiner les données du problème dans le cas 2)

Pour avoir une intersection il faut vérifier le système :

$$\begin{cases} x & & & = a \\ & y & & = b \\ & & z & = c \\ \alpha x & + \beta y & + \gamma z & = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\alpha a + \beta b + \gamma c = 0}$$

Si $a = b = 2$ et $\alpha = \beta = \gamma \rightarrow \boxed{c = -4}$



EXGAE023 – EPL, UCL, LLN, juillet 2000, série 2.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on considère les trois plans :

$$\Pi_1 : x + y + z = 1$$
$$\Pi_2 : 4x + by + cz = 2$$
$$\Pi_3 : \alpha\, x + \beta\, y + \gamma\, z = 4$$

Sachant que :

– ces trois plans ont une droite commune dans le plan de coordonnées OYZ.

– Π_2 est perpendiculaire Π_3.

- Déterminer les valeurs des 5 coefficients $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ b,\ c$
- Esquisser le dessin des 3 plans.

Les paramètres directeurs de la droite, intersection de deux plans, sont donnés par le produit vectoriel des vecteurs normaux aux deux plans.

Soit d la droite commune.

$$\vec{d} = \overrightarrow{n_{\Pi_1}} \wedge \overrightarrow{n_{\Pi_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & b & c \end{vmatrix} = (c-b;\, 4-c;\, b-4)$$

$$\vec{d} = \overrightarrow{n_{\Pi_1}} \wedge \overrightarrow{n_{\Pi_3}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = (\gamma-\beta;\, 1-\alpha;\, \beta-\alpha)$$

Et comme $d \in OYZ$, on déduit : $\begin{cases} c = b \\ \gamma = \beta \end{cases}$

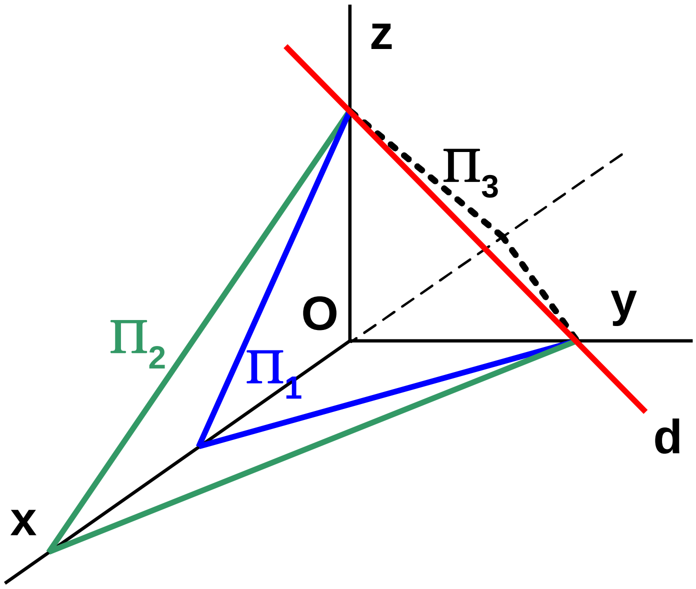
De plus : $\begin{cases} \Pi_1 \cap OYZ \equiv y + z = 1 \\ \Pi_2 \cap OYZ \equiv by + cz = 2 \\ \Pi_3 \cap OYZ \equiv \beta y + \gamma z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y + z = 1 \\ b(y+z) = 2 \\ \beta(y+z) = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = c = 2 \\ \beta = \gamma = 4 \end{cases}$

Reste à déterminer α.

$\Pi_2 \perp \Pi_3 \ \rightarrow\ 4\alpha + b\beta + c\gamma = 0 \ \rightarrow\ \alpha = -4$

<u>Conclusion</u>

Les trois plans sont : $\begin{cases} \Pi_1 \equiv x + y + z = 1 \\ \Pi_2 \equiv 4x + 2y + 2z = 2 \\ \Pi_3 \equiv -4x + 4y + 4z = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \Pi_1 \equiv x + y + z = 1 \\ \Pi_2 \equiv 2x + y + z = 1 \\ \Pi_3 \equiv -x + y + z = 1 \end{cases}$


z
Π_3
y
O
Π_2
Π_1
d
x

EXGAE024 – EPL, UCL, LLN, septembre 2000.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on appelle a, b, et c les intersections respectives d'un plan avec les axes OX, OY et OZ.
Pour l'ensemble des plans tels que $a = b$ et $abc = K$ constant.

- Déterminer a, b et c tels que la distance d du plan à l'origine soit maximum.
- Quelle sera cette distance maximum ?

Plan $\pi \equiv \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \;\rightarrow\; \pi \equiv bcx+acy+abz=abc$

$\overrightarrow{n_\pi}:\left(bc,\, ac,\, ab\right)$

$$\left\|n_\pi\right\|=\sqrt{b^2c^2+a^2c^2+a^2b^2}=\sqrt{abc^2+abc^2+a^2b^2}$$

$$=\sqrt{abc\left(2c+\frac{ab}{c}\right)}=\sqrt{k\left(2c+\frac{k}{c^2}\right)}=\frac{1}{c}\sqrt{k\left(2c^3+k\right)}$$

Vecteur unitaire normal au plan π : $\overrightarrow{1_{n_\pi}}=\frac{\overrightarrow{n_\pi}}{\left\|n_\pi\right\|}$

La distance est donnée par le produit scalaire de $\overrightarrow{1_{n_\pi}}$ par un vecteur définit par un point quelconque du plan, par exemple $\overrightarrow{OA}$: $\left(a,0,0\right)$

Distance du plan à l'origine : $d\left(0,\,\pi\right)=\overrightarrow{1_{n_\pi}}.\overrightarrow{OA}$

$$\rightarrow d\left(0,\,\pi\right)=\frac{bc^2}{\sqrt{k\left(2c^3+k\right)}}=\frac{\sqrt{k}.c}{\sqrt{2c^3+k}}$$

Pour trouver la distance maximum, on annule la dérivée de $d\left(0,\,\pi\right)$ par rapport à c.

$$d'\left(0,\,\pi\right)=\frac{\sqrt{k}\sqrt{2c^3+k}-\sqrt{k}.c.\frac{1}{2\sqrt{2c^3+k}}.6c^2}{2c^3+k}=0$$

$$\rightarrow \sqrt{2c^3+k}-\frac{3c^3}{\sqrt{2c^3+k}}=0 \;\rightarrow\; 2c^3+k=3c^3 \;\rightarrow\; c=\sqrt[3]{k}$$

Et finalement : $\boxed{a=b=c=\sqrt[3]{k}}$

Rappel

Calcul de la distance d'un point $P_0 : (x_1, y_1, z_1)$ à un plan $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$

Méthode 1 : Appliquer directement la formule : $d(P_0, \pi) = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Méthode 2 : $d(P_0, \pi) = \left| \overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{u} \right| \quad P_1 \in \pi \quad \vec{n} \perp \pi$

P_1 est un point quelconque de π

$\vec{n}$ est le vecteur normal à π

$\vec{u} = \frac{\vec{n}}{\left\| \vec{n} \right\|}$ vecteur unitaire normal à π

La méthode 2 permet de se familiariser avec les vecteurs.

(Et la formule précédente se dérive directement de la méthode 2).

EXGAE025 – EPL, UCL, LLN, juillet 2001, série 1.

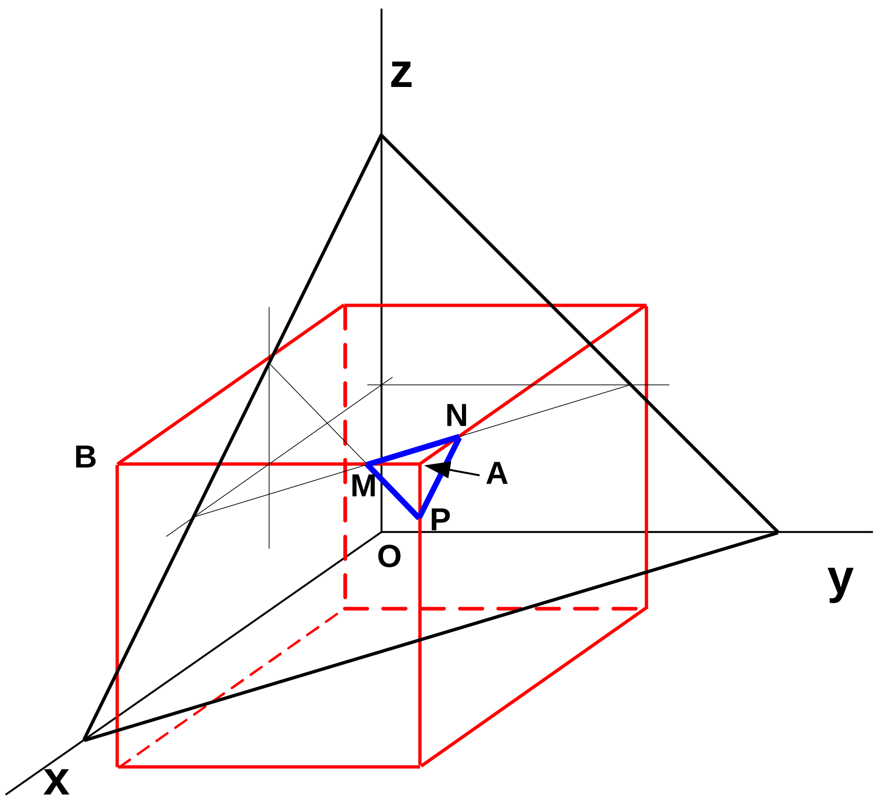
Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on appelle les éléments suivants :

– un cube dont le centre de gravité coïncide avecl'origine O, dont les faces sont perpendiculaires aux vecteurs de baseet dont la longueur des arêtes vaut 2;

– un plan défini par l'équation $x + y + z = a$

On vous demande :

1. De dessiner, avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème,
2. De trouver les valeurs de a telles que le plan divise le cube en deux solides distincts dont le volumes forment un rapport de $1/5$.



Calculons la coordonnée du point M, intersection de l'arète $AB \equiv \begin{cases} x=1 \\ z=1 \end{cases}$

et du plan donné : $x+y+z=a \quad \rightarrow \quad M:(1, a-2, 1)$

De même, $N:(a-2,1,1)$ et $P:(1,1,a-2)$

Le volume du tétraèdre $MNPA$ est donné par :

$$V_T = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_N & x_M & x_P & x_A \\ y_N & y_M & y_P & y_A \\ z_N & z_M & z_P & z_A \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a-2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a-2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a-3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-3 & 0 \end{vmatrix}$$

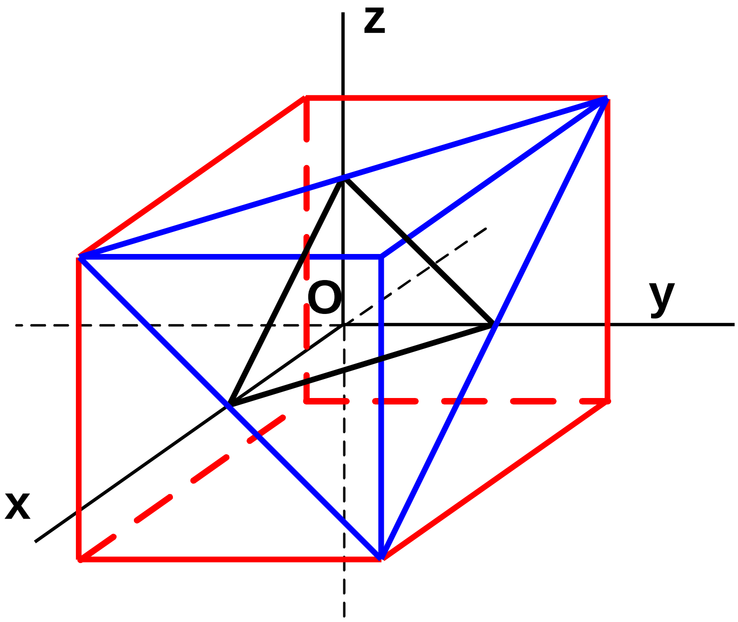
$$= -\frac{(a-3)^3}{6} = \frac{(3-a)^3}{6}$$

Le volume du cube vaut $2^3 = 8$

Le volume de solide restant, après avoir enlevé le tétraèdre : $V_R = 8 - \dfrac{(3-a)^3}{6}$

$$\rightarrow \frac{V_T}{V_R} = \frac{\dfrac{(3-a)^3}{6}}{8-\dfrac{(3-a)^3}{6}} = \frac{1}{5} \quad \rightarrow \quad \boxed{a=1}$$

Et le plan est : $x+y+z=1$



EXGAE026 – EPL, UCL, LLN, juillet 2001, série 2.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on appelle les éléments suivants :

– Trois droites dont les équations cartésiennes sont

$$p:\begin{cases} y=0 \\ z=x \end{cases}$$

$$q:\begin{cases} y=2 \\ z=1-x \end{cases}$$

$$r:\begin{cases} y=1 \\ ax+bz=1 \end{cases}$$

– Une droite horizontale $($parallèle au plan $OXY)$ quelconque h s'appuyant sur p et q (incluse donc dans un plan d'équation $z = a$ où a est un nombre réel quelconque)

On vous demande

1. De dessiner, avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème,
2. D'écrire l'équationde la droite horizontale mobile h en fonction du paramètre a.
3. De déterminer a et b afin que la droite horizontale h (quelle que soit la valeur de a) s'appuie également sur r.

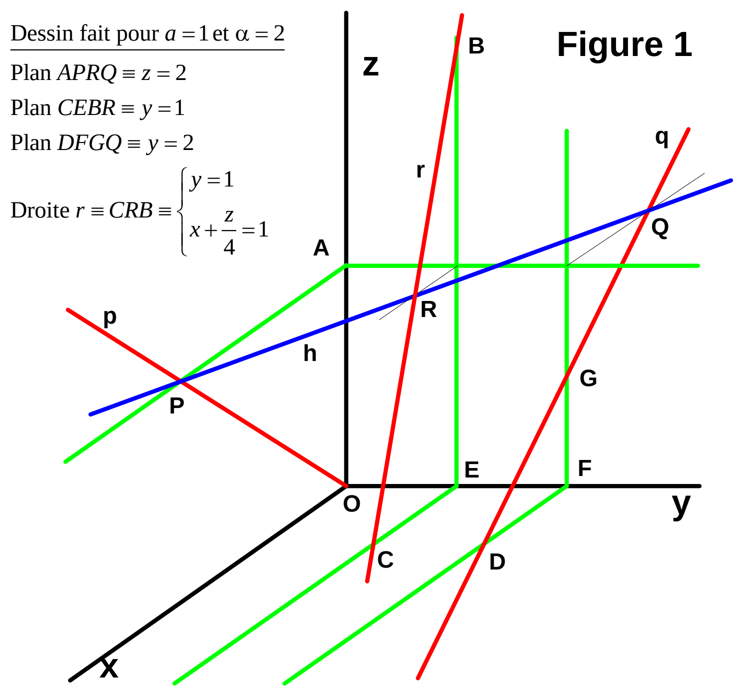


Figure 1

a) Voir figure 1

b) $P:(\alpha,0,\alpha)$ $Q:(1-\alpha,2,\alpha)$ $\rightarrow$ $\overrightarrow{PQ}:(1-2\alpha,2,0)$

Equation paramètrique de la droite $PQ \equiv \begin{cases} x=\alpha+k(1-2\alpha) \\ y=2k \\ z=\alpha \end{cases}$

$\rightarrow$ équation cartésienne $PQ \equiv \begin{cases} x=\alpha+\frac{y}{2}(1-2\alpha) \\ z=\alpha \end{cases}$

La droite r doit passer par R , point de percée de PQ dans le plan $y=1$

$\rightarrow$ $k=\frac{1}{2}$ $\rightarrow$ $R:\left(\frac{1}{2};1,\alpha\right)$ $\rightarrow$ $r \equiv \begin{cases} y=1 \\ ax+bz=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1 \\ a\frac{1}{2}+b\alpha=1 \end{cases}$

La relation recherchée est donc : $\boxed{a=2(1-b\alpha)}$

Il y a donc une infinité de droite qui peuvent passer par *R*.

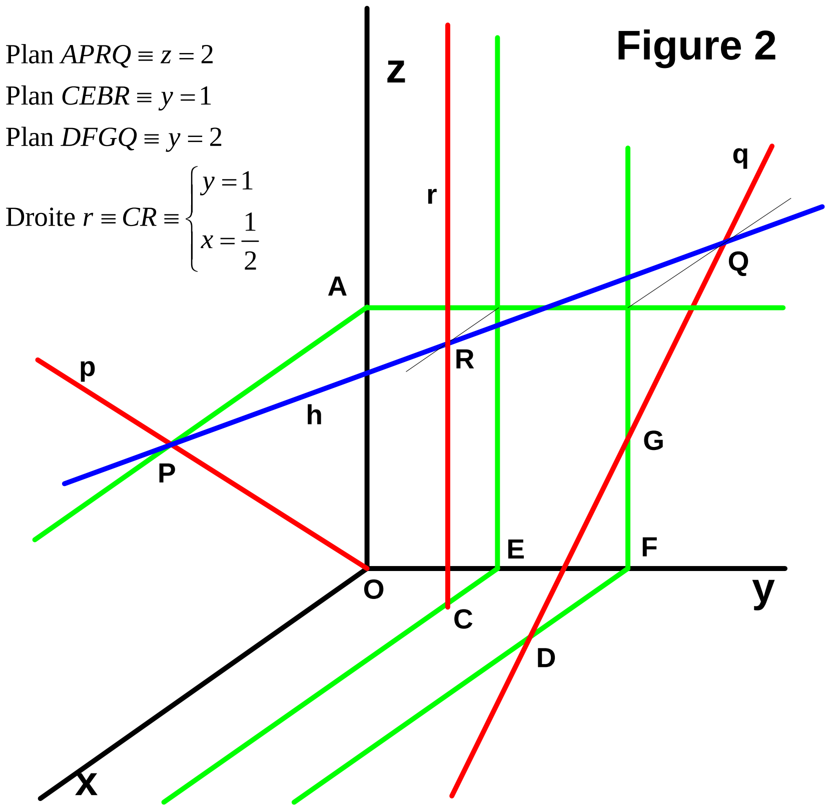
Le dessin est fait pour $\alpha=2$ et $a=1$ $\rightarrow b=\frac{1}{4}$ $\rightarrow$ $r \equiv \begin{cases} y=1 \\ x+\frac{z}{4}=1 \end{cases}$

Et $B:(0,1,4)$ $C:(1,1,0)$ $R:\left(\frac{1}{2},1,2\right)$

c) Si la droite horizontale h doit s'appuyer sur r quelle que soit la valeur de α alors $a=2(1-b\alpha)$ $\rightarrow$ $a+2b\alpha=2$ doit toujours être vérifié

La seule solution possible est $\begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $r:\begin{cases} y=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{cases}$

Voir figure 2



Résolu décembre 2003. Modifié le 10 juillet 2004.

EXGAE027 – EPL, UCL, LLN, septembre 2001.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé $OXYZ$, on appelle les éléments suivants :

– Quatre points dont les coordonnées sont :

$$A:(2,0,0)$$
$$B:(0,2,0)$$
$$C:(1,1,0)$$
$$D:(0,0,1)$$

– Un plan dont l'équation cartésienne est : $\pi \equiv ax+by+cz=2$

On vous demande :

- De fournir l'expression de la distance du plan π au point A en fonction des trois paramètres réels a, b, c.
- De déterminer les valeurs possibles des trois paramètres a, b, c afin que le plan passe par C et D et soit équidistant des points A et B.
- De dessiner avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème.

$\overrightarrow{n_\pi}:(a,b,c)$ $\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ $\overrightarrow{1_{n_\pi}}=\dfrac{\overrightarrow{n_\pi}}{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}=\dfrac{(a,b,c)}{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}$

Soit un point quelconque de π , $E:\left(\dfrac{2}{a},0,0\right) \;\to\; \overrightarrow{EA}:\left(\dfrac{2-2a}{a},0,0\right)$

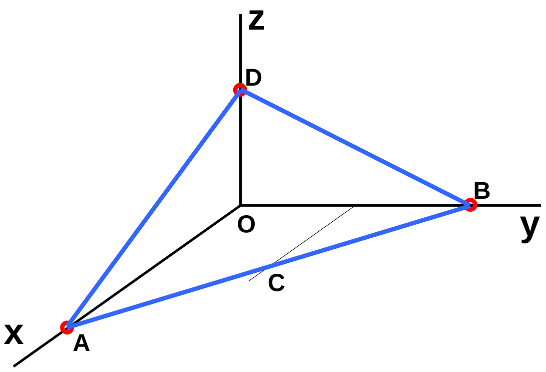
Distance de A au plan π : $d(A,\pi)=\dfrac{(a,b,c)}{\left\|\overrightarrow{n_\pi}\right\|}.\left(\dfrac{2-2a}{a},0,0\right)=\dfrac{2(1-a)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

De même : $d(B,\pi)=\dfrac{2(1-b)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

Le plan passe par C et D : $\begin{cases} C\in\pi \;\to\; a+b=2 \\ D\in\pi \;\to\; c=2 \end{cases}$

or $d(A,\pi)=d(B,\pi) \;\to\; 1-a=1-b \;\to\; a=b=1$ et $c=2$

Le plan $\pi \equiv x+y+2z=2$ passe donc aussi par A et B



EXGAE028 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2002.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé *Oxyz*.

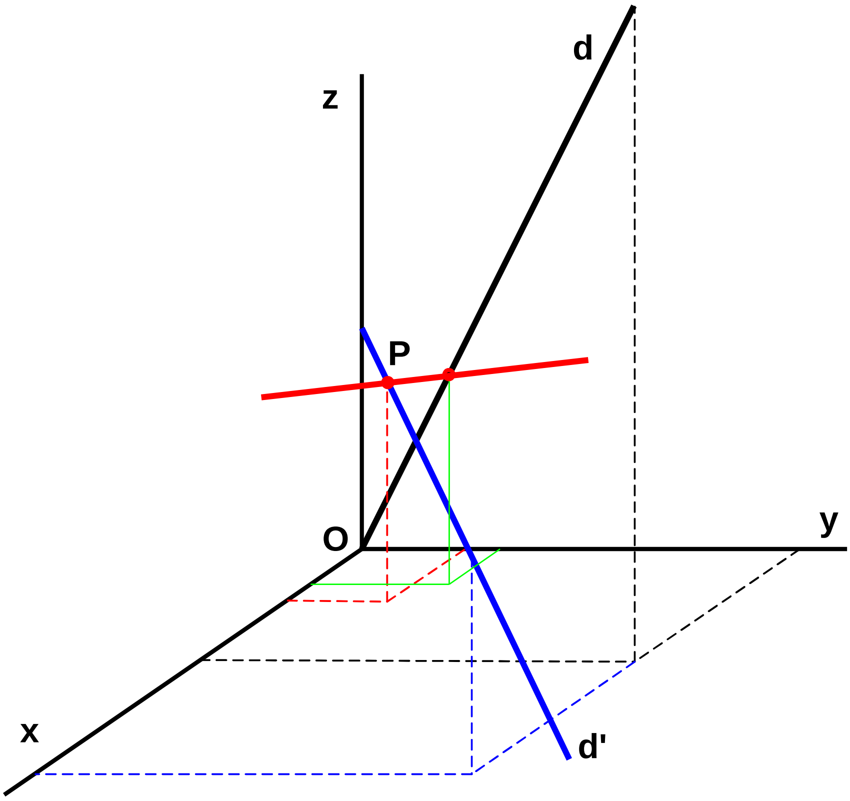
1. Démontrer qu'il existe une droite *d* passant par l'origine et telle que les plans d'équations

$$\left(2r^2+6r-2\right)x-\left(r^2-1\right)y-2rz+r^2+1=0$$

   Où *r* parcourt **R**, soient tous parallèles à *d*.

2. Déterminer la perpendiculaire commune à *d* et à la droite *d'* d'équation.

$$d':\begin{cases}x=y\\ z=1\end{cases}$$



1) Soit $\overrightarrow{v_d}:(\alpha,\beta,\gamma)$, le vecteur directeur de la droite d.

Si d est parallèle au plan alors $\overrightarrow{v_d}$ est orthogonal avec le vecteur normal aux plans.

$\rightarrow\ (2r^2+6r-2)\alpha-(r^2-1)\beta-2r\gamma=0$

$\rightarrow\ (2\alpha-\beta)r^2+2(3\alpha-\gamma)r-2\alpha+\beta=0$

Cette équation doit être vérifiée quelque soit la valeur de r

$$\rightarrow \begin{cases}2\alpha-\beta=0\\3\alpha-\gamma=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\beta=2\alpha\\\gamma=3\alpha\end{cases}$$

La droite de coefficients directeurs $(\alpha;2\alpha;3\alpha)=(1;2;3)$ et passant par l'origine,

donc d'équations $d:\begin{cases}x=h\\y=2h\\z=3h\end{cases}$ est parallèle aux plans donnés quelque soit la valeur de r.

2) <u>Première méthode</u>

Soit π_1 le plan parallèle à d $\left(\overrightarrow{v_d}=(1,2,3)\right)$ et $d'\left(\overrightarrow{v_{d'}}=(1,1,0)\right)$.

Le vecteur normal à π_1 est : $\overrightarrow{n_{\pi_1}}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{1_x}&\overrightarrow{1_y}&\overrightarrow{1_z}\\1&2&3\\1&1&0\end{vmatrix}=(-3,3,-1)$

Soit π_2 le plan perpendiculaire à π_1, contenant d et passant par l'origine

$$\pi_2:\begin{cases}x=k-3t\\y=2k+3t\\z=3k-t\end{cases}$$

Déterminons le point de percée P de d' dans π_2

$$\begin{cases}k-3t-h=0\\2k+3t-h=0\\3k-t=0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}k=\dfrac{9}{19}\\t=-\dfrac{1}{19}\\h=\dfrac{9}{19}\end{cases} \rightarrow P:\left(\frac{9}{19};\frac{9}{19};1\right)$$

La perpendiculaire commune est la droite passant par P et parallèle $\overrightarrow{n_{\pi_1}}$

$$p:\begin{cases}x=\dfrac{9}{19}-3j\\y=\dfrac{9}{19}+3j\\z=1-j\end{cases}$$

On peut vérifier facilement que p est perpendiculaire à d et d';

et que p est coplanaire avec d et d'.

Deuxième méthode

La perpendiculaire p est définie par les plans π_3 et π_4

π_3 contient la droite d et est parallèle à $\overrightarrow{n_{\pi_1}}:(-3,3,-1)$, avec $(0,0,0)\in d$

$$\rightarrow\ \pi_3 \equiv \begin{cases} x = h-3t \\ y = 2h+3t \\ z = 3h-t \end{cases} \ \rightarrow\ \pi_3 \equiv 11x+8y-9z=0$$

π_4 contient la droite d' et est parallèle à $\overrightarrow{n_{\pi_1}}:(-3,3,-1)$, avec $(0,0,1)\in d'$

$$\rightarrow\ \pi_4 \equiv \begin{cases} x = k-3t \\ y = k+3t \\ z = 1-t \end{cases} \ \rightarrow\ \pi_4 \equiv x-y-6z=-6$$

Finalement : $p \equiv \begin{cases} 11x+8y-9z=0 \\ x-y-6z=-6 \end{cases}$

On peut vérifier que la point $P\left(\frac{9}{19},\frac{9}{19},1\right)$ appartient bien à ces deux plans

EXGAE029 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2002.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé. On donne les points P_1, P_2, P_3, P_4 de coordonnées respectives.

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

1. Montrer que P_1, P_2, P_3, P_4 sont coplanaires et donner une équation cartésienne du plan Π qu'ils déterminent.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan Π' perpendiculaire à Π et passant par la droite d'équation

$$d':\begin{cases}2x-y=-1\\3x-z=0\end{cases}$$

---

1) $\overrightarrow{P_1P_2}:(2,-4,2)\quad \overrightarrow{P_1P_3}:(0,-1,2)\quad \overrightarrow{P_1P_4}:(1,-2,1)$

Si les quatre points sont coplanaires alors un des vecteurs est combinaison linéaire des deux autres. Vérifions que $\alpha\overrightarrow{P_1P_2}+\beta\overrightarrow{P_1P_3}=\overrightarrow{P_1P_4}$

$$\rightarrow \begin{cases}2\alpha+0\beta=1\\-4\alpha-\beta=-2\\2\alpha+2\beta=1\end{cases} \quad \text{Ce système est vérifié pour :}\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}\\ \beta=0\end{cases}$$

Les équations paramétriques du plan sont :

$$\begin{cases}x=0+2k-0h\\y=1-4k-h\\z=0+2k-2k\end{cases} \quad\rightarrow\quad \Pi\equiv 3x+2y+z-2=0 \qquad (\text{donc } \overrightarrow{n_\Pi}:(3,2,1))$$

2) Soient deux points de la droite d : $P_5(0,1,0)$ et $P_6(1,3,3)$ $\rightarrow \overrightarrow{P_5P_6}:(1,2,3)$

$$\rightarrow\ \Pi':\begin{cases}x=0+h+3k\\y=1+2h+2k\\z=0+3h+k\end{cases} \quad\rightarrow\quad \Pi'\equiv x-2y+z+2=0$$