Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 5

EXGAE050 – EXGAE059

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Février 06

EXGAE050 – Polytech, UMons, juillet 2003.

1. Calculer l'angle que forme la droite d passant par les points A (2,1,0) et B (0,1,1) avec le plan π d'équation cartésienne $x + y + z = 0$.
2. Calculer le rayon r d'une sphère S de centre (1,0,1) tangente au plan π.
3. Déterminer le centre de gravité du triangle formé par les points de percée A et B de d dans S et le point de contact P de S et π.

---

1) L'angle de la droite avec le plan est l'angle qu'elle fait avec sa projection orthogonale sur ce plan. C'est aussi le complément de l'angle qu'elle fait avec la normale de ce plan.

• Equation paramétrique de $d \equiv \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 1 \\ z = -t \end{cases}$

• Vecteur directeur de $d : \vec{v} = \left(\overrightarrow{2,0,-1}\right)$

• Vecteur normal de $\pi : \vec{n} = \left(\overrightarrow{1,1,1}\right)$

D'où $\vec{v}\,.\,\vec{n} = 1 = \sqrt{5}.\sqrt{3}\cos(90-\alpha)$ et $\alpha = 14.9632°$

2) Pour calculer le rayon de r de la sphère tangente à π, la méthode la plus simple consiste à déterminer le point de percée de P dans π de la normale à ce plan et issue de $C(1,0,1)$.

Equation de CP normale au plan π : $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \\ z = 1+t \end{cases}$

P s'obtient en remplaçant x, y, z dans l'équation de π, soit

$$2+3t = 0 \to t = -\frac{2}{3} \to P\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Le rayon de la sphère a pour valeur la longueur du segment CP, soit

$$CP^2 = \left(\frac{1}{3}-1\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}-1\right)^2 = r^2 \Leftrightarrow r^2 = \frac{12}{9} \Leftrightarrow r = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

3) Les points de percée de d dans $S \equiv (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = r^2$ s'obtiennent de même en remplaçant les valeurs de x, y et z des équations paramétriques de d dans S.

$(2-2t-1)^2 + 1 + (t-1)^2 = \dfrac{4}{3}$ soit $5t^2 + 6t + \dfrac{5}{3} = 0$. On trouve $t = \dfrac{9 \pm \sqrt{6}}{15}$

d'où $A : \left(\dfrac{12+2\sqrt{6}}{15}, 1, \dfrac{-9-\sqrt{6}}{15} \right)$ et $B : \left(\dfrac{12-2\sqrt{6}}{15}, 1, \dfrac{-9+\sqrt{6}}{15} \right)$

Le centre de gravité du triangle :

La moyenne aritmétique des 3 sommets, $A, B,$ et $P,$ soit $G : \left(\dfrac{29}{45}, \dfrac{4}{9}, \dfrac{23}{45} \right)$

Issu le 7 septembre 2005. Steve Tumson

EXGAE051 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2005.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points *A,B,C* par leurs coordonnées respectives :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\5\\7\end{pmatrix}$$

4. Déterminer le lieu des points P tels que ABP soit un triangle équilatéral (donner sa nature).
5. Déterminer la distance de C à la droite AB
6. Calculer l'aire du triangle ABC
7. Calculer le cosinus de l'angle $\widehat{BAC}$
8. Déterminer l'équation du plan ABC

---

1) A et B sont situés sur une droite parallèle à l'axe Oz.

Le premier lieu de P est le plan médiateur de $[AB]$ c'est-à-dire le plan : $z=3$

Puisque le triangle ABP doit être équilatéral : $|AB|=|BP|=|AP|=2$

La distance de P à la droite AB est donc $\sqrt{3}$.

Le deuxième lieu de P est un cercle de $M(1,0,3)$ de rayon $r=\sqrt{3}$ et situé dans le plan

$z=3 \rightarrow$ Lieu de P $\begin{cases}(x-1)^2+y^2=3\\ z=3\end{cases}$

2) <u>Méthode générale</u>

Vecteur unitaire de AB : $\overrightarrow{1_{AB}=(0,0,1)}$

Soit $X(1,0,0)$ un point de $AB \rightarrow \overrightarrow{XC}:(2,5,7) \rightarrow |\overrightarrow{XC}|^2=78$

$$\rightarrow d(C,AB)=\sqrt{|XC|^2-\left(\overrightarrow{1_{AB}.XC}\right)^2}=\sqrt{78-49}=\sqrt{29}$$

<u>Autre méthode</u>

Puisque AB est parallèle à Oz, remarquons que la distance cherchée est égale à la longueur de la projection de AC sur le plan Oxy

$\left.\begin{array}{l}\text{Projection de } A \rightarrow X(1,0,0)\\ \text{Projection de } C \rightarrow Y(3,5,0)\end{array}\right\} \rightarrow d(C,AB)=|XY|=\sqrt{(3-1)^2+5^2}=\sqrt{29}$

3) L'aire du triangle ABC est simplement : $A_{ABC} = \frac{|AB|.d(C,AB)}{2} = \frac{2\sqrt{29}}{2} = \sqrt{29}$

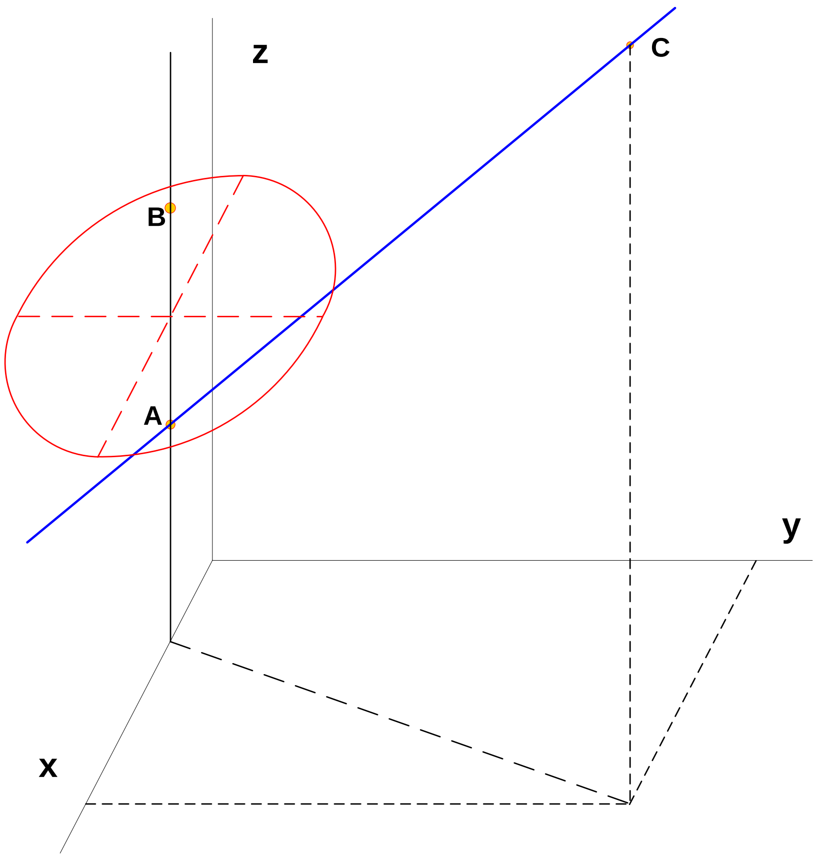
4) $\begin{matrix} \overrightarrow{AB}:(0,0,2) \\ \overrightarrow{AC}:(2,5,5) \end{matrix} \rightarrow \cos BAC = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{2\times5}{\sqrt{4}.\sqrt{4+25+25}} = \frac{5}{\sqrt{54}}$

$BAC = 47.12°$

5) Nous connaissons $A(1,0,2), \overrightarrow{AB}:(0,0,2), \overrightarrow{AC}:(2,5,5)$

Les équations paramétriques du paln ABC sont $\begin{cases} x = 1+2h \\ y = 5h \\ z = 2+2k+5h \end{cases}$

$\rightarrow ABC \equiv 5x-2y-5=0$



Issu le 17 novembre 2005.

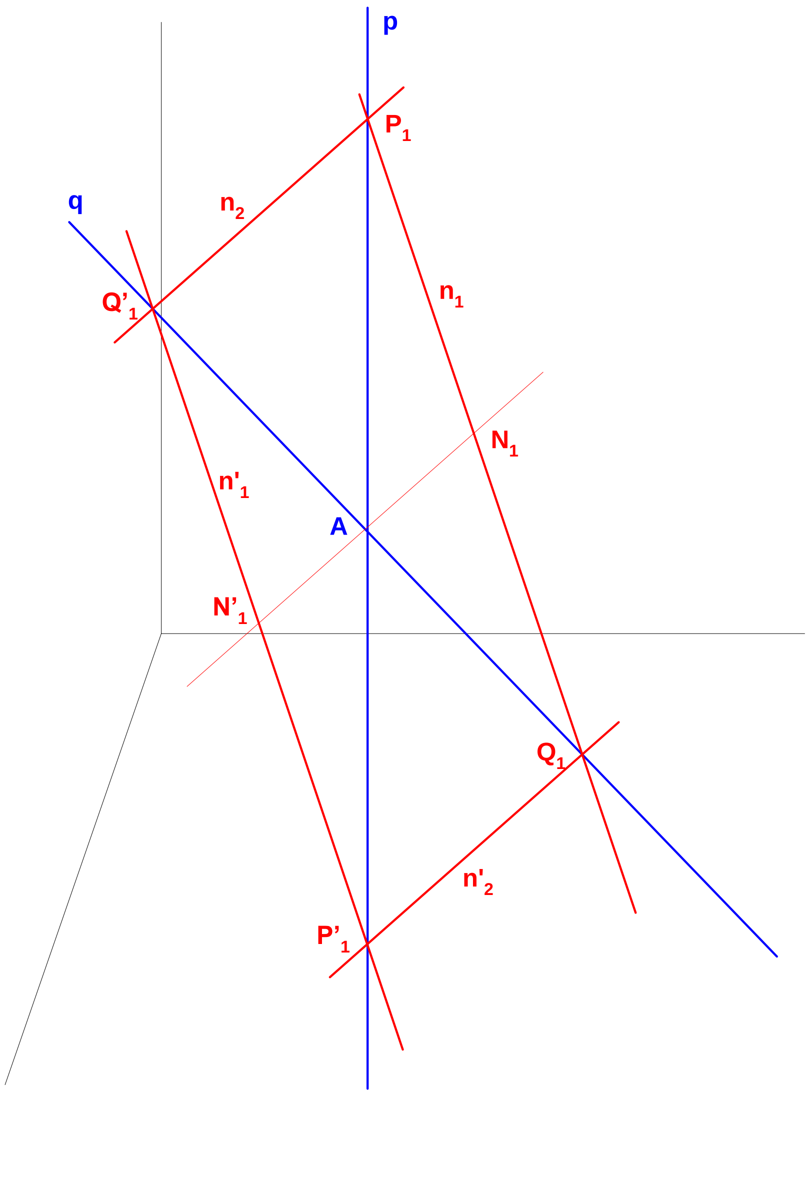
EXGAE052 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2005.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les deux droites

$$p \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$q \equiv \begin{cases} y - x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ces deux droites se coupent avec un angle droit en un point A.
On vous demande de donner les équations paramétriques de toutes les droites qui s'appuient sur p et q en formant un triangle isocèle et dont la distance à A soit égale à $2\sqrt{2}$



Nous trouvons facilement : $\begin{cases} \text{Les coordonnées de } A(0,2,1) \\ \text{Un vecteur unitaire de } p : \quad \overrightarrow{1_p} : (0,0,1) \\ \text{Un vecteur directeur de } q : \ \overrightarrow{v_q} : (1,1,0) \to \overrightarrow{1_q} : \dfrac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Cherchons la droite n_1 qui s'appuie sur p et q en formant un triangle isocèle AP_1Q_1.

Soit N_1 le pied de la hauteur du triangle AP_1Q_1. AN_1 est aussi une bissectrice de l'angle $\widehat{P_1AQ_1}$

La direction $\overrightarrow{v_{AN_1}}$ de AN_1 est donc donnée par : $\overrightarrow{v_{AN_1}} = \overrightarrow{1_p} + \overrightarrow{1_q} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right)$

Nous avons évidemment : $\overrightarrow{AN_1} = k.\overrightarrow{v_{N_1}}$ où $k \in \mathbb{R}$

La distance de N_1 à A doit être égale à $2\sqrt{2}$.

$$\to \left| \overrightarrow{AN_1} \right| = k. \left| \overrightarrow{v_{AN_1}} \right| = 2\sqrt{2} \to k\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1} = 2\sqrt{2} \to k = 2 \to \overrightarrow{AN_1} : \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, 2 \right)$$

Les coordonnées de N_1 sont alors

$$N_1 : (0,2,1) + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, 2 \right) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}}, 3 \right) = \left(\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}, 3 \right)$$

Un vecteur directeur de n_1 peut s'obtenir de multiples façons. Par exemple :

$\overrightarrow{v_{n_1}} = \overrightarrow{1_p} - \overrightarrow{1_q}$ puisque les bissectrices des angles intérieur et extérieur sont perpendiculaires.

$$\to \overrightarrow{v_{n_1}} : \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1 \right) \to n_1 \equiv \begin{cases} x = \sqrt{2} - \dfrac{k}{\sqrt{2}} \\ y = 2 + \sqrt{2} - \dfrac{k}{\sqrt{2}} \\ z = 3 + k \end{cases}$$

La droite n'_1 est symétrique de n_1 par rapport à A.

$$N'_1 = (0,2,1) - \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}, 2 \right) = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}, -1 \right) = \left(-\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}, -1 \right)$$

$$\to n'_1 \equiv \begin{cases} x = -\sqrt{2} - \dfrac{k}{\sqrt{2}} \\ y = 2 - \sqrt{2} - \dfrac{k}{\sqrt{2}} \\ z = -1 + k \end{cases}$$

Puisque les droites p et q se coupent à angle droit, les 4 droites que nous cherchons forment un carré dont les coordonnées des sommets situés sur p sont :

$P_1 \equiv p \cap n_1 \to x = \sqrt{2} - \dfrac{k}{\sqrt{2}} = 0$ (obtenu en égalisant le x de chaque équation paramétrique)

$\to k = 2 \to P_1\left(0,2,5\right)$

$P'_1 \equiv p \cap n'_1$ est le symétrque de P_1 par rapport à $A \to P'_1\left(0,2,-3\right)$

Nous pouvons maintenant écrire les équations des 2 autres droites :

$$n_2 \equiv P_1Q'_1 \equiv \begin{cases} x = \dfrac{k}{\sqrt{2}} \\ y = 2 + \dfrac{k}{\sqrt{2}} \\ z = 5 + k \end{cases} \quad \left(n_2 \text{ est parallèle à } AN_1\right)$$

$$n'_2 \equiv P'_1Q_1 \equiv \begin{cases} x = \dfrac{k}{\sqrt{2}} \\ y = 2 + \dfrac{k}{\sqrt{2}} \\ z = -3 + k \end{cases} \quad \left(n'_2 \text{ est parallèle à } AN_1\right)$$

Issu le 17 novembre 2005.

EXGAE053 – FSA, ULB, Bruxelles, juillet 2005.

Dans l’espace euclidien rapporté à un repère orthonormé d’origine O et d’axes X,Y et Z, on donne le point $P(2,2,6)$ et le plan Π qui passe par les points $O(0,0,0)$, $A(2,0,1)$ et $B(0,2,-1)$

1. Déterminez une équation cartésienne du plan Π et l’angle qu’il fait avec OXY.
2. Déterminez des équations cartésiennes et paramétriques de la droite d passant par P et perpendiculaire à Π.
3. Déterminez les coordonnées du point Q, intersection de d et Π.
4. Déterminez les coordonnées du point R, symétrique de P par rapport à Π.

---

a) $\overrightarrow{OA}:(2,0,1)\quad \overrightarrow{OB}:(0,2,-1)$

Le plan Π est déterminé par son vecteur normal :

$$\overrightarrow{n_\Pi}=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{1_x} & \overrightarrow{1_y} & \overrightarrow{1_z}\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1\end{vmatrix}=(-2,2,4)=(-1,1,2)$$

Et comme Π passe par l'origine, on a directement : $\boxed{\Pi\equiv -x+y+2z=0}\quad(1)$

L'angle entre le plan Π et le plan OXY est égale égal à l'angle fait par les vecteurs

$$\overrightarrow{n_\Pi}\text{ et }\overrightarrow{n_{OXY}}=\overrightarrow{1_z}:(0,0,1)\rightarrow\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{n_\Pi}.\overrightarrow{1_z}}{\left|\overrightarrow{n_\Pi}\right|.\left|\overrightarrow{1_z}\right|}=\frac{2}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{2}{\sqrt{6}}\rightarrow\alpha=35.3°$$

b) La droite d est parallèle à $\overrightarrow{n_\Pi}$ et passe par P :

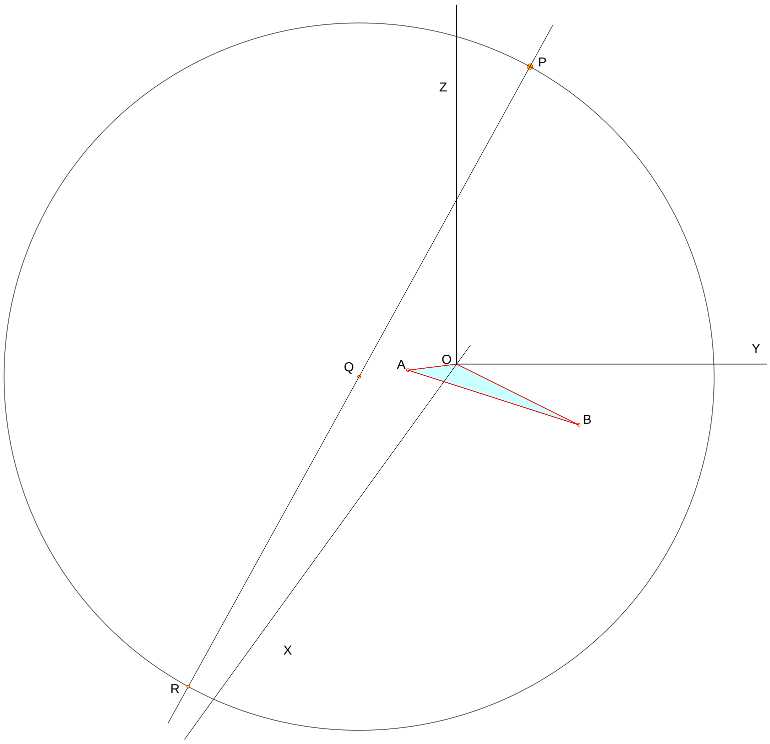
$$\rightarrow d\equiv\begin{cases}x=2-k\\ y=2+k\\ z=6+2k\end{cases}\quad(2)\rightarrow\boxed{d\equiv 2-x=y-2=\frac{z-6}{2}}$$

c) Pour calculer les coordonnées de $Q=d\cap\Pi$, on remplace x,y,z dans l'équation (1) en utilisant les équations paramétriques $(2)\rightarrow -2+k+2+k+12+4k=0\rightarrow k=-2$

$$\rightarrow\boxed{Q:(4,0,2)}$$

d) R est symétrique de P, par rapport à $\Pi\rightarrow Q$ est le milieu de RP

$$\begin{cases}x_Q=\dfrac{x_R+x_P}{2}\\ y_Q=\dfrac{y_R+y_P}{2}\\ z_Q=\dfrac{z_R+z_P}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_R=2x_Q-x_P\\ y_R=2y_Q-y_P\\ z_R=2z_Q-z_P\end{cases}\rightarrow\boxed{R:(6,-2,-2)}$$



Issu le 17 janvier 2006.

EXGAE054 – Bruxelles, septembre 2005.

Dans l'espace euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X,Y et Z, on donne les points M (2, 0, 0), N (0, 1, 0) et P (0, 0, 1). On demande

1. Une équation du plan Π passant par M, N et P.
2. Des équations cartésiennes de la perpendiculaire d au plan Π issue de O.
3. Des équations cartésiennes de la perpendiculaire q à MN issue de P ainsi que les nombres directeurs de cette droite.
4. De montrer que d et q ont un point commun et de calculer ses coordonnées.

---

a) Puisque que les points M, N et P sont sur les axes, on a directement

$$\boxed{\Pi \equiv \frac{x}{2} + y + z = 1}$$

b) La droite d est parallèle à $\overrightarrow{n_\Pi} : \left(\frac{1}{2}, 1, 1\right) = (1, 2, 2)$

$$\rightarrow d \equiv \begin{cases} x = k \\ y = 2k \\ z = 2k \end{cases} \rightarrow \boxed{d \equiv 2x = y = z}$$

c) La droite q est simplement déterminée par le plan Φ perpendiculaire à MN passant par P et le plan Π.

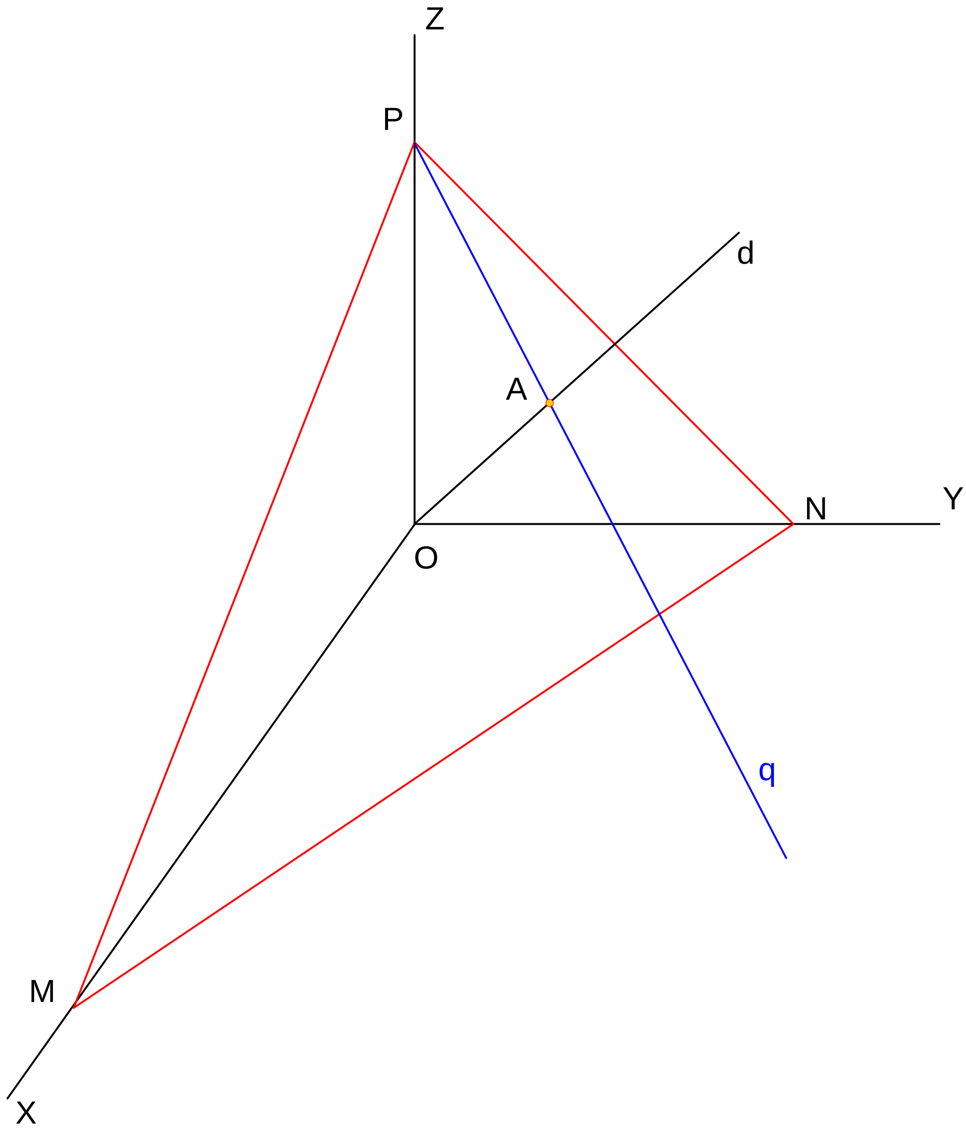
$\overrightarrow{v_{MN}} : (2, -1, 0) \rightarrow \Phi \equiv 2x - y = d$. Or $P \in \Phi \rightarrow d = 0 \rightarrow \Phi \equiv 2x - y = 0$

$$\rightarrow \boxed{q \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ \frac{x}{2} + y + z = 1 \end{cases}}$$

d) q et d sont coplanaires puisqu'elles appartiennent toutes deux au plan Φ

Pour obtenir les coordonnées de $A = q \cap d$, il suffit de résoudre :

$$\begin{cases} 2x = y = z \\ 2x - y = 0 \\ \frac{x}{2} + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \text{ ce qui donne } A : \left(\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right)$$



Issu le 28 février 2006.

EXGAE055– Louvain, juillet 2005, série 1

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les éléments suivants :

- le plan : $\alpha \equiv 12x - 9y + 2z + 226 = 0$,
- le point : $P = (-11; a; -2)$,
- et la droite : $d \equiv \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = bt \end{cases}$

On vous demande
1. de déterminer a afin que le point P appartienne au plan α,
2. de déterminer b afin que la droite d soit parallèle au plan α,
3. de déterminer les équations paramétriques de la droite p passant par le point P et perpendiculaire au plan α.

---

1) Si $P \in \alpha \rightarrow 12 \times (-11) - 9a + 2 \times (-2) + 226 = 0 \rightarrow a = 10$

2) La d droite parallèle au plan α est perpendiculaire au vecteur normal au plan $\overrightarrow{n_a} = (12, -9, 2)$. $\overrightarrow{v_d}\ (1, 2, b) \perp \overrightarrow{n_a} \rightarrow 12 \times 1 - 9 \times 2 + 2b = 0 \rightarrow b = 3$

3) Le vecteur directeur de p est $\overrightarrow{n_a}$. Les équations paramètriques de la droite sont donc : $p \equiv \begin{cases} x = -11 + 12k \\ y = 10 - 9k \\ z = -2 + 2k \end{cases}$

Le 4 avril 2006 . Modifié le 12 juillet 2006 (Benoît Baudelet)

EXGAE056– Louvain, juillet 2005, série 2

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les éléments suivants :

- le plan : $\alpha \equiv 7x + y - 7z = 0$,
- la première droite : $d \equiv 2x + 2 = -y - 3 = -2z + 4$;
- la seconde droite : $p \equiv x + 1 = -2y - 6 = 2z - 4$;

On vous demande de déterminer le(s) point(s) *D* appartenant à la droite *d* et le(s) point(s) *P* appartenant à la droite *p* afin que le segment de droite de *DP* soit de longueur $3\sqrt{2}$ et soit parallèle au plan α.

Soit $P(x_P; y_P)$ et $D(x_D; y_D)$

• DP est parallèle à α, donc $\overrightarrow{DP}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{n_a}$ vecteur normal au plan

$\rightarrow 7(x_P - x_D) + (y_P - y_D) - 7(z_P - z_D) = 0 \quad (1)$

$\bullet \, |DP| = 3\sqrt{2} \rightarrow (x_P - x_D)^2 + (y_P - y_D)^2 + (z_P - z_D)^2 = 18 \quad (2)$

$$\bullet\, D \in d \rightarrow \begin{cases} y_D = -2x_D - 5 & (3) \\ z_D = -x_D + 1 & (4) \end{cases}$$

$$\bullet\, P \in p \rightarrow \begin{cases} y_P = -\dfrac{x_P + 7}{2} & (5) \\ z_P = \dfrac{x_P + 5}{2} & (6) \end{cases}$$

Injectons (3) et (4) dans $(1) \rightarrow$

$$7(x_P - x_D) + \left(-\frac{x_P + 7}{2} + 2x_D + 5\right) - 7\left(\frac{x_P + 5}{2} + x_D - 1\right) = 0 \rightarrow x_D = \frac{x_P - 3}{4} \quad (7)$$

(3) devient $y_D = -\dfrac{1}{2}(x_P + 7)$ $\quad (4)$ devient $z_D = -\dfrac{1}{4}(x_D - 7)$

$$\text{Et donc } \begin{cases} x_P - x_D = x_P - \dfrac{x_p - 3}{4} = \dfrac{3}{4}(x_P + 1) \\ y_P - y_D = 0 \\ z_P - z_D = \dfrac{x_P + 5}{2} + \dfrac{x_P - 7}{4} = \dfrac{3}{4}(x_P + 1) \end{cases}$$

On remet tout cela dans (2): $\dfrac{9}{16}\left((x_P + 1)^2 + (x_P + 1)^2\right) = 18$

$$\rightarrow (x_P + 1)^2 = 16 \rightarrow x = \pm 4 - 1 \rightarrow \begin{cases} x_P = 3 \\ x_P = -5 \end{cases}$$

Il y a donc deux series de points : $\begin{cases} P(3, -5, 4) \\ D(0, -5, 1) \end{cases}$ et $\begin{cases} P(-5, -1, 0) \\ D(-2, -1, 3) \end{cases}$

Le 4 avril 2006

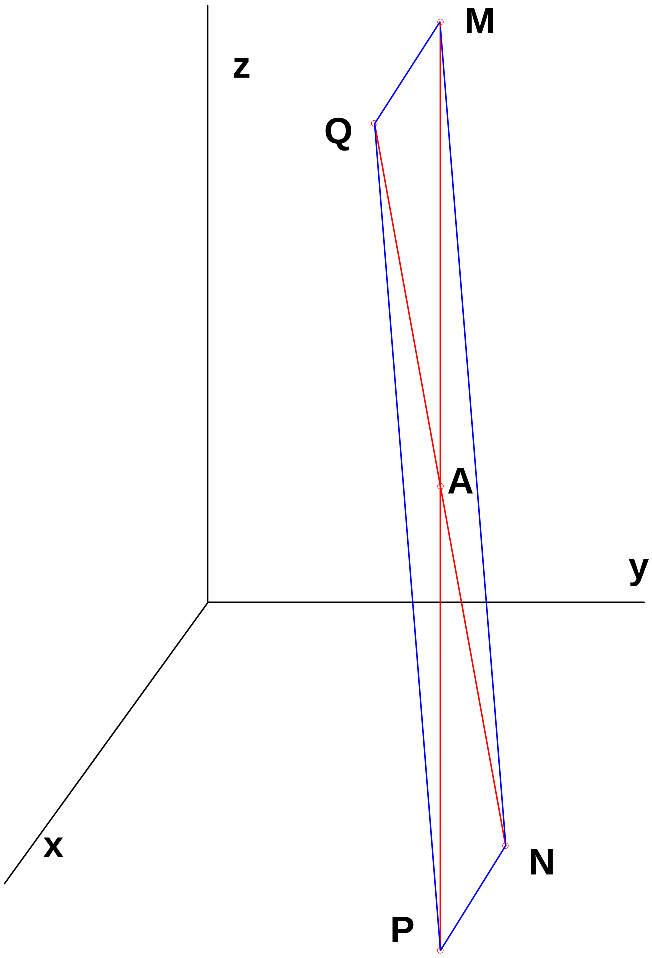
EXGAE057– Louvain, septembre 2005.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les deux droites :

$$p \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$q \equiv \begin{cases} y - x = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ces deux droites se coupent avec un angle droit en un point *A*.
On vous demande de donner les équations paramétriques de toutes les droites qui s'appuyent sur *p* et *q* en formant un triangle isocèle et dont la distance à *A* soit égale à $2\sqrt{2}$.



Les coordonnées de A sont faciles à obtenir : $A(0,2,1)$

Il y a quatre droites qui s'appuyent sur p et q et qui sont équidistantes de $2\sqrt{2}$ de A.
Ces quatre droites forment un carré. Soient M, N, P et Q les sommets de ce carré avec M et $P \in p$ et N et $Q \in q$.

La distance de $2\sqrt{2}$ est la demi-médiane du carré. On en déduit que la demi-diagonale vaut 4 avec $|AM| = |AN| = |AQ| = |AP| = 4$

Calculons les coordonnées de M. $\begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 2 \rightarrow |AM|^2 = (z_M - 1)^2 = 16 \rightarrow z_M = 5 \\ z_M \end{cases}$

$\rightarrow M(0,2,5)$. On en déduit aussi les coordonnées de $P(0,2,-3)$

Calculons les coordonnées de N. $\begin{cases} y_N - x_N = 0 \\ z_N = 1 \end{cases}$

$\rightarrow |AN|^2 = (y_N - 2)^2 + (y_N - 2)^2 = 16 \rightarrow y_N = 2 + \sqrt{2} \rightarrow N\left(2\sqrt{2}, 2+2\sqrt{2}, 1\right)$.

On en déduit aussi les coordonnées de $Q\left(-2\sqrt{2}, 2-2\sqrt{2}, 1\right)$

Le reste est facile :

Vecteurs directeurs : $\begin{cases} \overrightarrow{v_{MN}} = \overrightarrow{v_{QP}} = \left(2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -4\right) \\ \overrightarrow{v_{MQ}} = \overrightarrow{v_{NP}} = \left(-2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}, -4\right) \end{cases}$

Les équations paramétriques sont alors

$$MN \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\sqrt{2}k \\ y = 2 + 2\sqrt{2}k \\ z = 5 - 4k \end{cases} \quad MN \equiv \begin{cases} x = 0 + 2\sqrt{2}k \\ y = 2 + 2\sqrt{2}k \\ z = -3 - 4k \end{cases} \quad MQ \equiv \begin{cases} x = 0 - 2\sqrt{2}k \\ y = 2 - 2\sqrt{2}k \\ z = 5 - 4k \end{cases} \quad MP \equiv \begin{cases} x = 0 - 2\sqrt{2}k \\ y = 2 - 2\sqrt{2}k \\ z = -3 - 4k \end{cases}$$

Le 4 avril 2006

EXGAE59 - Bruxelles – Septembre 2006

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes x,y et z. On donne les points fixes M (0, b , c), N (a , 0 , c) et P (a , b , 0) où a, b et c sont non nuls.

a) Montrez que la longueur de chaque arête du tétraèdre de sommets O, M, N et P est égale à celle de l'arête opposée. Qu'en déduisez-vous au sujet des faces du tétraèdre ?

b) Formez des équations cartésiennes des plans ONP et MNP. A quelle condition ces plans sont-ils perpendiculaires ?

c) Formez des équations cartésiennes des droites OM et PN. A quelle condition ces droites sont-elles orthogonales ?

d) Soient α, β, γ les plans contenant respectivement les droites OM, ON, OP et perpendiculaires respectivement aux plans ONP, OMP et OMN. Montrez que ces plans passent par une même droite.

e) Calculez le volume du tétraèdre $OMNP$

---

a) Calculons le carré de la longueur de chaque arête :

$$|NM|^2 = a^2 + b^2 \quad |MP|^2 = a^2 + c^2 \quad |PN|^2 = b^2 + c^2$$

$$|OP|^2 = a^2 + b^2 \quad |NO|^2 = a^2 + c^2 \quad |OM|^2 = b^2 + c^2$$

les quatre faces du tétraère sont donc isométriques.

$$b)\ ONP \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \boxed{-bcx + acy + ab = 0} \qquad \to \overrightarrow{n_{ONP}} : (-bc, ac, ab)$$

$$MNP \equiv \begin{vmatrix} x & y-b & z-c \\ a & 0-b & c-c \\ a & b-b & 0-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y-b & z-c \\ a & -b & 0 \\ a & 0 & -c \end{vmatrix} = bcx + ac(y-b) + ab(z-c)$$

$$= \boxed{bcx + acy + abz - 2abc = 0} \qquad \to \overrightarrow{n_{MNP}} : (bc, ac, ab)$$

Ces plans sont perpendiculaires si $\overrightarrow{n_{ONP}}.\overrightarrow{n_{MNP}} = 0 \to \boxed{-b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2 = 0}$

$$c)\ \overrightarrow{OM} : (0, b, c) \to OM \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = kb \\ z = kc \end{cases} \to \boxed{OM \equiv \begin{cases} x = 0 \\ \dfrac{y}{b} = \dfrac{z}{c} \end{cases}}$$

$$\overrightarrow{PN} : (0, -b, c) \to PN \equiv \begin{cases} x = a \\ y = 0 - bk \\ z = c + ck \end{cases} \to \boxed{PN \equiv \begin{cases} x = a \\ \dfrac{y}{b} = -\dfrac{z-c}{c} \end{cases}}$$

Les droites seront orthogonales si $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{PN} = 0 \to b^2 - c^2 = 0 \to \boxed{b = \pm c}$

d) Si les trois plans α, β et γ passent par une même droite alors les vecteurs normaux $\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}$ et $\overrightarrow{n_\gamma}$ sont coplanaires.

Le vecteur $\overrightarrow{n_{ONP}}$ normal au plan ONP est donné par le produit vectoriel $\overrightarrow{n_{ONP}} = \overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}$

Dés lors $\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_{ONP}} \times \overrightarrow{OM} = \left(\overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}\right) \times \overrightarrow{OM}$.

Donc :

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \left(\overrightarrow{ON} \times \overrightarrow{OP}\right) \times \overrightarrow{OM} = \left((a,0,c)\times(a,b,0)\right)\times(0,b,c) = \left(ac^2 - ab^2, bc^2, -b^2c\right) \quad (1)$$
$$\overrightarrow{n_\beta} = \left(\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OP}\right) \times \overrightarrow{ON} = \left((0,b,c)\times(a,b,0)\right)\times(a,0,c) = \left(ac^2, bc^2 - a^2b, -a^2c\right) \quad (2)$$
$$\overrightarrow{n_\gamma} = \left(\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{ON}\right) \times \overrightarrow{OP} = \left((0,b,c)\times(a,0,c)\right)\times(a,b,0) = \left(ab^2, -a^2b, b^2c - a^2c\right) \quad (3)$$

On vérifie facilement que $\overrightarrow{n_\alpha} - \overrightarrow{n_\beta} + \overrightarrow{n_\gamma} = (1) - (2) + (3) = \vec{0}$

Autrement dit les trois vecteurs sont coplanaires et les trois plans passent par une même droite.

e) Le volume d'un tétraèdre déterminé par quatre points de coordonnées $(x_i, y_i, z_i) \quad i = 1,2,3,4$ est donné par la valeur absolue de :

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 & a \\ 0 & 0 & b & b \\ 0 & c & c & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & b & b \\ c & c & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}abc\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{V = \frac{abc}{3}}$$

Ce résultat était attendu car c'est le tiers du volume du parallélépipède rectangle dont les arêtes sont a, b et c