Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 8

EXGAE080 – EXGAE089

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Décembre 08

EXGAE080 – FSA, UCL, Louvain, juillet 08, série 1.

On considère la droite d_1 , passant par le point $(1,0,0)$ et parallèle au vecteur $\vec{x}=(1,2,1)$,
et la droite d_2 , passant par le point $(-3,1,0)$ et parallèle au vecteur $\vec{y}=(-1,1,-1)$.
Soit, en outre, les points $A=(1,0,2)$ et $B=(0,-1,2)$

a) Donnez l'équation du plan π_0 passant par A et contenant d_1
b) Donnez l'équation du plan β passant par A et perpendiculaire à d_1
c) Calculez la distance de A à d_1
d) Donnez l'équation du plan π_1 passant par B et parallèle au plan π_0
e) Donnez les équations de la droite d_3 joignant le point B au point d'intersection de la droite d_2 avec le plan π_1 .

Solution proposée par Steve Tumson

a) $d_1 \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \quad \Rightarrow M = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix} \in d_1$

Il faut donc trouver un plan passant par A, M et N :

$$\pi_0 \equiv \overrightarrow{OM} + r_0\overrightarrow{MA} + k_0\overrightarrow{MN} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r_0\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix} + k_0\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = 1 + k_0 \\ y = 2k_0 \\ z = 2r_0 + k_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_0 \equiv 2x - y = 2}$$

b) Les coefficients d'un tel plan sont désignés par le vecteur normal $\vec{x}$: $\beta \equiv x + 2y + z = d$

Le point A appartenant au plan, on a : $d = 3$

$$\boxed{\beta \equiv x + 2y + z = 3}$$

c) Il suffit de trouver le point de percée P de d_1 dans β puis de calculer la distance entre A et P :

$$d_1 \equiv \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + r_1 \\ y = 2r_1 \\ z = r_1 \end{cases} \xrightarrow{d_1 \cap \beta} 1 + r_1 + 4r_1 + r_1 = 3 \Leftrightarrow r_1 = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow P = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow d(A, d_1) = d(A, P) = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 2\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

d) Si les plans sont parallèles, ils ont le même vecteur normal, donc les mêmes coefficients :

$$\pi_1 \equiv 2x - y = d$$

Ce plan passe par B et donc $d = 1$

$$\boxed{\pi_1 \equiv 2x - y = 1}$$

e) Le point I d'intersection (de percée) s'obtient de façon classique :

$$d_2 \equiv \begin{pmatrix}-3\\1\\0\end{pmatrix} + r_2\begin{pmatrix}-1\\1\\-1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 - r_2 \\ y = 1 + r_2 \\ z = -r_2 \end{cases} \xrightarrow{d_2 \cap \pi_1} -6 - 2r_2 - 1 - r_2 = 1 \Leftrightarrow r_2 = -\frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow I = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

La droite recherchée est donc :

$$d_3 \equiv \overrightarrow{OB} + r_3\overrightarrow{BI} = \begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix} + r_3\begin{pmatrix}-1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix} \Leftrightarrow d_3 \equiv \begin{cases} x = -\frac{1}{3}r_3 \\ y = -1 - \frac{2}{3}r_3 \\ z = 2 + \frac{2}{3}r_3 \end{cases} \xrightarrow{r_3 = -3x} \boxed{d_3 \equiv \begin{cases} -2x + y = -1 \\ 2x + z = 2 \end{cases}}$$

Le 24 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXGAE081 – FPMs, Mons, juillet 08, série 1.

Dans le système d'axes orthonormé, soit une droite *a* passant par le point *A* de coordonnées (1, 2, 3) et soit (5, 2, 1) un triplet de paramètres directeurs de cette droite *a*.
Par un point *P* de coordonnées (4, 8, 6), on abaisse la perpendiculaire sur cette droite *a* et on appelle *Q* le pied de cette perpendiculaire sur cette droite *a*. **Déterminez les coordonnées de ce point *Q*.**
Déterminez ensuite **les équations paramétriques du lieu des points équidistants de *A* et de *Q* et qui appartiennent au plan d'équation cartésienne [*X* = 0].**

Solution proposée par Fabienne ZOETARD

$$a \equiv \frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$$

a) Le plan π est $\perp$ à a et inclut $P \rightarrow \pi \equiv 5x+2y+z=r$ où r est tel que $5\times4+2\times8+1\times6=r$

$\rightarrow \pi \equiv 5x+2y+z=42$

Q : point de percée de a dans π

$$\begin{cases} 5x+2y+z=42 \\ x-1=5z-15 \\ y-2=2z-6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=5z-14 \\ y=2z-4 \\ 5x+2y+z=42 \end{cases} \rightarrow 25z-70+4z-8+z=42 \rightarrow z=4$$

$$\rightarrow \begin{cases} z=4 \\ x=6 \\ y=4 \end{cases} \rightarrow \boxed{Q(6,4,4)}$$

b) Les points équidistants de A et de Q sont dans le plan médiateur de $[AQ]$

M : milieu de $[AQ] \rightarrow M\left(\frac{7}{2},3;\frac{7}{2}\right) \in \alpha$

$\overrightarrow{AQ} = 5\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k} \perp \alpha \rightarrow \alpha \equiv 5x+2y+z=r$ où r est tesl que $5\times\frac{7}{2}+8\times3+\frac{7}{2}\times1=r \rightarrow r=27$

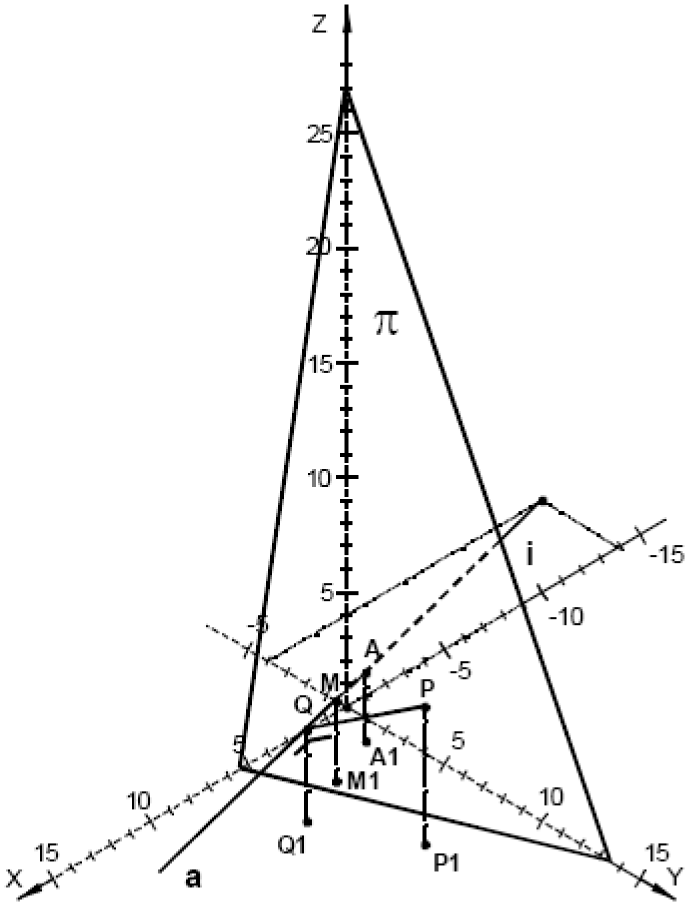
$\rightarrow \alpha \equiv 5x+2y+z=27$

Le lieu des points equidistants de A et B et qui appartiennent au plan $x=0$ est

$$\begin{cases} 5x+2y+z=27 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ 2y+z=27 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=27-2\lambda \end{cases}$$

La figure suivante est reprise de
http://ressourcescms.fpms.ac.be/DocuWebFpms/Forms/AllItems.aspx?RootFolder=%2fDocuWebFpms%2fDossier%20admission&View=%7b0F3B00E4%2dEA3B%2d4EF2%2dB23C%2d446AB398F606%7d

Prof. Dr. ir Y. DURAND (Titulaire de la Chaire de Géométries et Communication Graphique à la FPMs)



Représentation isométrique exacte
(les points indicés « 1 » sont les projections des points sur OXY)

Le 25 juillet 08.

EXGAE082 – FSA, UCL, Louvain, juillet 08, série 2.

Soit la droite d_1, passant par $A=(1,2,3)$ et $B=(-1,\ 0,2)$, et la droite d_2, passant par $C=(0,1,7)$ et $D=(2,0,5)$

1) Ecrivez l'équation du plan π parallèle à d_1 et contenant d_2
2) Calculez la distance entre la droite d_1 et le plan π
3) Ecrivez les équations de la droite passant par C et orthogonale à d_1 et à d_2
4) Cherchez un point P_1 de d_1 et un point P_2 de d_2 tels que le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ soit orthogonal à d_1 et à d_2

Solution proposée par Steve Tumson

1.

Ce plan doit être parallèle à d_1, les coefficients sont donc les composantes d'un vecteur normal à d_1.

L'équation du plan se note : $\pi \equiv ax+by+cz=d$

Le vecteur directeur de d_1 est : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-2,-2,-1)$

Deux vecteurs orthogonaux ont un produit scalaire nul, il faut donc : $-2a-2b-c=0$

L'équation vectorielle de d_2 est :

$$d_2 \equiv \overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{CD}=\begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}\in d_2 \xrightarrow{d_2\subset\pi} \begin{pmatrix}0\\1\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\5\end{pmatrix}\in\pi$$

Nous avons pour le moment 3 équations à 4 inconnues, donc un système simplement indéterminé. Nous noterons donc $a=\lambda$ par exemple. (On ne peut pas choisir un troisième point de d_2 pour compléter les équations car une droite est définie par deux points, tout point supplémentaire serait redondant et nous amènerait à une solution nulle)

Il suffit maintenant de résoudre le système de 3 équations à 3 inconnues obtenu (par le produit scalaire nul et en remplaçant les deux points de d_2 dans l'équation du plan) :

$$\begin{cases}2b+c=-2\lambda\\ b+7c-d=0\\ 5c-d=-2\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\lambda\\ b=-2\lambda\\ c=2\lambda\\ d=12\lambda\end{cases}$$

On a donc :

$$\pi\equiv\lambda x-2\lambda y+2\lambda z=12\lambda \Leftrightarrow \boxed{\pi\equiv x-2y+2z=12}$$

2.

Un vecteur normal au plan π est $\vec{n}=(1,-2,2)$. La droite perpendiculaire n commune au plan π et à la droite d_1, passe par un point de la droite d_1, le point B par exemple.

Son équation vectorielle est donc :

$$n\equiv\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1+k\\ y=-2k\\ z=2+2k\end{cases}$$

Pour trouver le point de percée P de n dans π, il suffit de substituer les équations paramètriques de la droite n dans l'équation de π :

$$\begin{cases}x-2y+2z=12\\ x=-1+k\\ y=-2k\\ z=2+2k\end{cases}\Leftrightarrow -1+k+4k+4+4k=12\Leftrightarrow k=1\Rightarrow P=(0,-2,4)$$

La distance recherchée est donc :

$$d(d_1,\pi)=d(B,P)=\sqrt{(0+1)^2+(-2-0)^2+(4-2)^2}\Leftrightarrow\boxed{d(d_1,\pi)=3}$$

3.
L'équation d'une droite s'écrit comme un système de deux équations de plans. Ici, il s'agit d'un plan π_1 perpendiculaire à d_1 passant par C et d'un autre π_2 perpendiculaire à d_2 passant par C.
Vu que les plans sont perpendiculaires aux droites, leurs coefficients sont ceux de leur vecteur normal qui n'est autre que le vecteur directeur des droites d_1 et d_2 :

$$\begin{cases} n_1 = \overrightarrow{AB} = (-2,-2,-1) \Rightarrow \pi_1 \equiv -2x-2y-z-d_1 = 0 \\ n_2 = \overrightarrow{CD} = (2,-1,-2) \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x-y-2z-d_2 = 0 \end{cases} \xrightarrow{C\in\pi_1,\pi_2} \begin{cases} d_1 = 9 \\ d_2 = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{d \equiv \begin{cases} 2x+2y+z=9 \\ -2x+y+2z=15 \end{cases}}$$

4.

$$\begin{cases} P_1 = \begin{cases} x_1 = -1-2k_1 \\ y_1 = -2k_1 \\ z_1 = 2-k_1 \end{cases} \\ P_2 = \begin{cases} x_2 = 2k_2 \\ y_2 = 1-k_2 \\ z_2 = 7-2k_2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = \begin{cases} x = x_2 - x_1 = 2k_1 + 2k_2 + 1 \\ y = y_2 - y_1 = 2k_1 - k_2 + 1 \\ z = z_2 - z_1 = k_1 - 2k_2 + 5 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{P_1P_2} \perp d_1 \Leftrightarrow 2x+2y+z=0 \Leftrightarrow 9k_1+9=0 \Leftrightarrow k_1=-1 \Rightarrow \boxed{P_1=(1,2,3)} \\ \overrightarrow{P_1P_2} \perp d_2 \Leftrightarrow -2x+y+2z=0 \Leftrightarrow -9k_2+9=0 \Leftrightarrow k_2=1 \Rightarrow \boxed{P_2=(2,0,5)} \end{cases}$$

Le 25 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXGAE83 - FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2008

Soit le cube $OABCDEFG$ de côté égal à 2 (cf.figure).

On donne les points $P(0,2,1)$, $Q(2,1,2)$ et $R(2,0,1)$.

On demande :

a) D'écrire une équation cartésienne du plan π passant par P, Q et R.

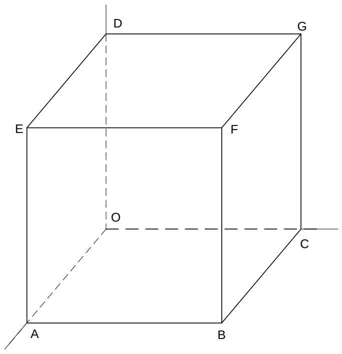
b) De déterminer les coordonnées des points U et V du plan π qui appartiennent à BF et DO, respectivement.

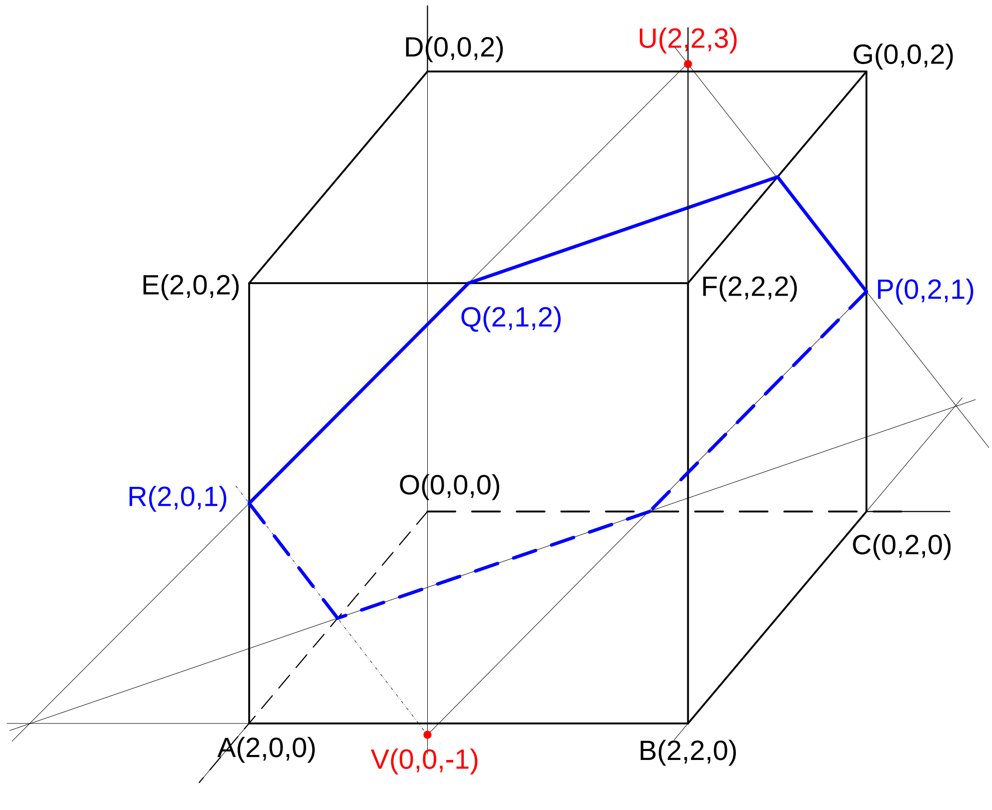
c) De déterminer la nature et l'aire du quadrilatère $VRUP$.

d) D'écrire des équations de la perpendiculaire menée de B au plan π.

e) De calculer la distance de D à π.

f) De déterminer la nature et l'aire du polygone d'intersection entre le cube et le plan π.





a) Equation du plan π: $\pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$\rightarrow \pi \equiv -2(x-2) - 2y + 2(z-1) = -2x - 2y + 2z + 2 = 0$$

$$\rightarrow \boxed{\pi \equiv = x + y - z - 1 = 0}$$

b) Intersection de DO avec π: $DO \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow V = DO \cap \pi = (0,0,-1)$

Intersection de BF avec π: $BF \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \rightarrow U = DF \cap \pi = (2,2,3)$

c) $\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RU}(0,2,2) \\ \overrightarrow{VP}\ (0,2,2) \end{array}\right\} \rightarrow RU\,//\,VP \\ \left.\begin{array}{l} \overrightarrow{RV}(-2,0-2) \\ \overrightarrow{UP}(-2,0,-2) \end{array}\right\} \rightarrow RV\,//\,UP \end{array}\right\} \rightarrow VRUP$ est un parallèlogramme

Aire de $VRUP = \left| \overrightarrow{RV}.\overrightarrow{RU} \right| = \left| (-2,0,-2).(0,2,2) \right| = 4$

d) Le vecteur normal au plan π : $\overrightarrow{n_\pi}(1,1,-1)$

L'équation paramètrique de la perpendiculaire abaissée de B sur π : $p \equiv \begin{cases} x = 2 + k \\ y = 2 + k \\ z = -k \end{cases}$

e) La distance de D à π

$$d(B,\pi) = \left| \overrightarrow{BU}.\frac{\overrightarrow{n_\pi}}{\left\| \overrightarrow{n_\pi} \right\|} \right| = \left| (0,0,3).\frac{(1,1,-1)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} \right| = \left| -\frac{3}{\sqrt{3}} \right| = \boxed{\sqrt{3}}$$

f) Le polygone d'intersection est un hexagone.

Soit $a = \left\| \overrightarrow{RQ} \right\| = \sqrt{2}$ le côté de l'hexagone. Il est facile de montrer que l'aire est donnée par : $S = 6 \times \frac{1}{2} \times a^2 \sin 60° = \frac{3a\sqrt{3}}{2}$

Donc : $\boxed{S = \frac{3a\sqrt{6}}{2}}$

EXGAE84 - EPL, UCL, Louvain, septembre 2008.

a) Trouver le centre et le rayon de la sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y - 2z = 15/4$$

b) Donnez les équations de la droite passant par le centre de la sphère et perpendiculaire au plan π d'équation $x + 2y + 2z = 2$

c) Déterminez les extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan π

Résolution proposée par Steve TUMSON

a)

$$(x-2)^2 - 4 + \left(y - 1/2\right)^2 - (1/4) + (z-1)^2 - 1 = 15/4$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \left(y-1/2\right)^2 + (z-1)^2 = 9 \rightarrow \boxed{\text{Rayon 3 et centre } \left(2, \frac{1}{2}, 1\right)}$$

b)

$$d \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + k \\ y = (1/2) + 2k \\ z = 1 + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = x - 2 \\ y = (1/2) + 2x - 4 \\ z = 1 + 2x - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} 2y - 4x + 7 = 0 \\ z - 2x + 3 = 0 \end{cases}}$$

c)

Le diamètre étant une droite passant par le centre de la sphère, il s'agit en fait de trouver le point de percée de d dans la sphère.

Il suffit pour cela de remplacer l'équation paramétrique de la droite d dans celle de la sphère :

$$(k)^2 + \left(2k\right)^2 + (2k)^2 = 9 \Leftrightarrow 9k^2 = 9 \Leftrightarrow k = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(3, \frac{5}{2}, 3\right) \quad et \quad \left(1, -\frac{3}{2}, -1\right)}$$

---

21 décembre 2008

EXGAE85 - EPL, UCL, Louvain, Juillet 2009 série 1.

Un paraboloïde est donné par $z = a\,(x^2 + y^2)$ dans un système de coordonnées cartésiennes.
L'on dénote par $\boldsymbol{o}$ l'origine des coordonnées.
Quelles sont les coordonnées du centre de la sphère qui passe par $\boldsymbol{o}$ et qui a, en ce même point, suivant les coordonnées x et y, les mêmes dérivées première et seconde que le paraboloïde $(\text{tangence avec même courbure})$?

Ce problème n'est pas hors-matière. Il est même relativement simple à résoudre si on réalise que le paraboloïde proposé est une surface de révolution d'axe OZ.
Pour de simples raisons de symétrie, on en déduit que la sphère cherchée a son centre sur l'axe OZ.
En coupant par le plan XOZ, le problème se ramène à un problème à deux dimensions.
Le paraboloïde coupe le plan XOZ selon une parabole d'équation :

$$z = ax^2 \to z' = 2ax \to z'' = 2a$$

La sphère coupe ce même plan selon un cercle. Soit R le rayon de ce cercle (donc de la sphère).
L'équation de ce cercle qui passe par l'origine est :

$$x^2 + (z-R)^2 = R^2 \to z = -\sqrt{R^2 - x^2} + R$$

(Signe $-$ car on prend la partie inférieure du cercle).

$$\to z' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} \to z'' = -\frac{R^2}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}}$$

On a donc :

$$\begin{cases} -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2ax \\ -\dfrac{R^2}{(R^2 - x^2)\sqrt{R^2 - x^2}} = 2a \end{cases} \to \boxed{R = \frac{1}{2a}}$$

Les coordonnées du centre de la sphère sont : $\boxed{\left(0, 0, \frac{1}{2a}\right)}$

---

12 septembre 2009

EXGAE86 - EPL, UCL, Louvain, Juillet 2009 série 2.

Dans l'espace, les points $\mathbf{r} = (x, y, z)$ d'un plan P sont définis par $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d$ où $\mathbf{n} = (a, b, c)$ est un vecteur unitaire et d est une constante (voir notes ci – dessous).

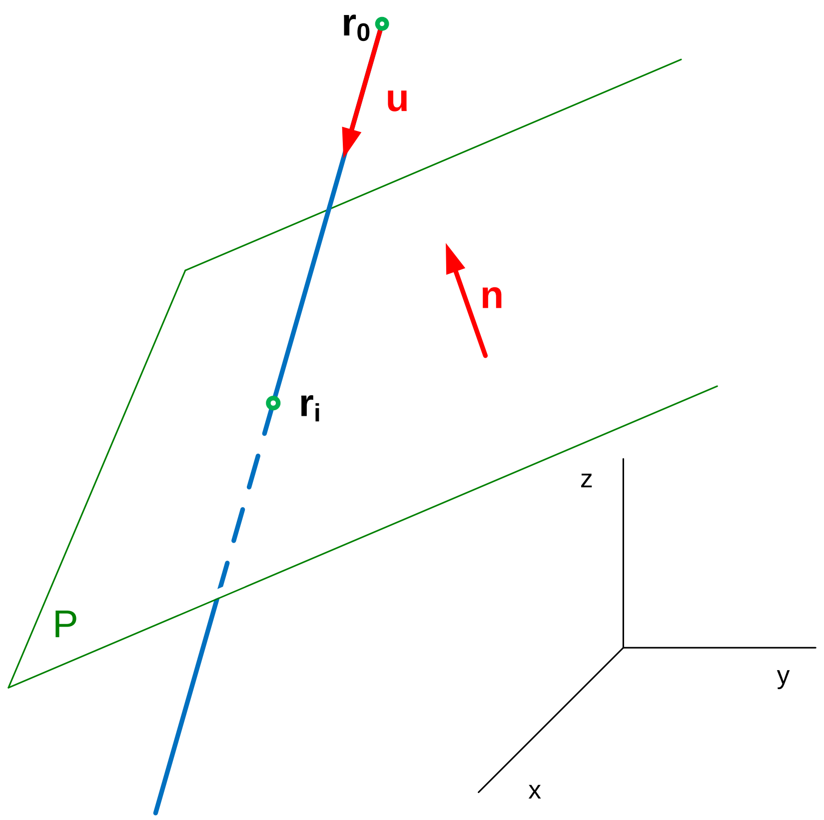
On considère un point $\mathbf{r_o}$ qui n'appartient pas à P et un vecteur unitaire $\mathbf{u}$ qui n'est pas parallèle à P.

Soit la droite D, qui passe par $\mathbf{r_o}$ et qui est parallèle à $\mathbf{u}$. Son point d'intersection avec P est nommé $\mathbf{r_1}$.

1. Faites un dessin représentant une configuration possible du problème ; représentez-y les différents objets (vecteurs, points, plan, droite) mentionnés ci-dessus.
2. Donnez une équation paramétrique pour la droite D.
3. Donnez, uniquement en fonction des vecteurs $\mathbf{n}$, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{r_o}$ et de la constante d, la distance entre $\mathbf{r_o}$ et $\mathbf{r_1}$.

Note 1 : $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$ représente le produit scalaire entre $\mathbf{r}$ et $\mathbf{n}$. Un vecteur unitaire est un vecteur de norme 1.

Note 2 : Pour vous convaincre de ce que $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = d$ représente bien l'équation d'un plan, explicitez le produit scalaire.



L'équation paramètrique de D, avec $\mathbf{u}(\alpha,\beta,\gamma)$ et $\mathbf{r}_0(x_0,y_0,z_0)$,

$$D \equiv \begin{cases} x = x_0 + \alpha k \\ y = y_0 + \beta k \\ z = z_0 + \gamma k \end{cases}$$

Ce qui sous forme vectorielle s'écrit : $D \equiv \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + k\mathbf{u}$

Si $\mathbf{r}_i$ est le point de percée de D dans le plan P :

$$\left.\begin{array}{lll} \text{alors} & \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_0 + k\mathbf{u} & (1) \\ \text{et aussi} & \mathbf{r}_i.\mathbf{n} = d & \end{array}\right\} \rightarrow (\mathbf{r}_0 + k\mathbf{u}).\mathbf{n} = d \rightarrow k = \frac{d - \mathbf{r}_0.\mathbf{n}}{\mathbf{u}.\mathbf{n}}$$

On remplace dans $(1) \rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \dfrac{d - \mathbf{r}_0.\mathbf{n}}{\mathbf{u}.\mathbf{n}}.\mathbf{u} \rightarrow \Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0 = \dfrac{d - \mathbf{r}_0.\mathbf{n}}{\mathbf{u}.\mathbf{n}}.\mathbf{u}$

La distance entre $\mathbf{r}_i$ et $\mathbf{r}_0$ est le module de $\Delta\mathbf{r}$

$$\rightarrow \| \Delta\mathbf{r} \| = \left\| \frac{d - \mathbf{r}_0.\mathbf{n}}{\mathbf{u}.\mathbf{n}}.\mathbf{u} \right\|$$

or $\dfrac{d - \mathbf{r}_0.\mathbf{n}}{\mathbf{u}.\mathbf{n}}$ est un simple nombre réel $\rightarrow \| \Delta\mathbf{r} \| = \left| \dfrac{d - \mathbf{r}_0.\mathbf{n}}{\mathbf{u}.\mathbf{n}} \right| \| .\mathbf{u} \|$

et comme $\mathbf{u}$ est un vecteur unitaire : $\| .\mathbf{u} \| = 1$

Finalement : $\boxed{\| \Delta\mathbf{r} \| = \left| \dfrac{d - \mathbf{r}_0.\mathbf{n}}{\mathbf{u}.\mathbf{n}} \right|}$

Exemple numérique (Pour illustration. Ce n'est pas demandé dans la question)

Soit $\mathbf{n}:\dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}$; $d=2$; $\mathbf{r}_0:(1,2,3)$; $\mathbf{u}:\dfrac{(1,-2,-1)}{\sqrt{6}}$

Méthode "traditionnelle"

$$\left.\begin{array}{l} D\equiv\begin{cases} x=1+\dfrac{k}{\sqrt{6}} \\ y=2-\dfrac{2k}{\sqrt{6}} \\ z=3-\dfrac{k}{\sqrt{6}} \end{cases} \\ P\equiv\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{y}{\sqrt{3}}+\dfrac{z}{\sqrt{3}}=2 \end{array}\right\}\to\frac{1+\dfrac{k}{\sqrt{6}}}{\sqrt{3}}+\frac{2-\dfrac{2k}{\sqrt{6}}}{\sqrt{3}}+\frac{3-\dfrac{k}{\sqrt{6}}}{\sqrt{3}}=2\to k=\sqrt{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$$

$$\to\mathbf{r}_i:\left(1+\left(3-\sqrt{3}\right);2-2\left(3-\sqrt{3}\right);3-\left(3-\sqrt{3}\right)\right)=\left(4+\sqrt{3};-4+2\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$$

$$\to\|\Delta\mathbf{r}\|=\sqrt{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$$

Note : la valeur de k donnait déjà la réponse puisque $\Delta\mathbf{r}=k\mathbf{u}$ avec $\|\mathbf{u}\|=1$

Méthode alternative

Cherchons la distance $d\left(\mathbf{r}_0,P\right)$ de $\mathbf{r}_0$ au plan P. Soit $\mathbf{a}$ un point quelconque de P.

(Bien sûr, on choisit $\mathbf{a}$ pour faciliter les calculs). $\mathbf{a}:\left(2\sqrt{3},0,0\right)$

On en déduit le vecteur $\mathbf{b}=\mathbf{r}_0-\mathbf{a}=\left(1-2\sqrt{3},2,3\right)$

$$\to\text{ la distance } d\left(\mathbf{r}_0,P\right)=\mathbf{b.n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(1-2\sqrt{3}+2+3\right)=\frac{6-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Or $d\left(\mathbf{r}_0,P\right)$ est aussi égal à $\Delta\mathbf{r}.\mathbf{n}=k\mathbf{u}.\mathbf{n}=\dfrac{k}{\sqrt{3}.\sqrt{6}}(1-2-1)=-\dfrac{\sqrt{2}}{3}k$

$$\to k=-\frac{6-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}.\frac{3}{\sqrt{2}}=-\sqrt{6}\left(3-\sqrt{3}\right)\to\qquad\|\Delta\mathbf{r}\|=|k|.\|u\|=\sqrt{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$$

Utilisation de la formule trouvée

$$\|\Delta\mathbf{r}\|=\frac{2-(1,2,3)\dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}}{\dfrac{(1,-2,-1)}{\sqrt{6}}.\dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{3}-(1+2+3)}{\dfrac{1-2-1}{\sqrt{6}}}=\sqrt{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$$

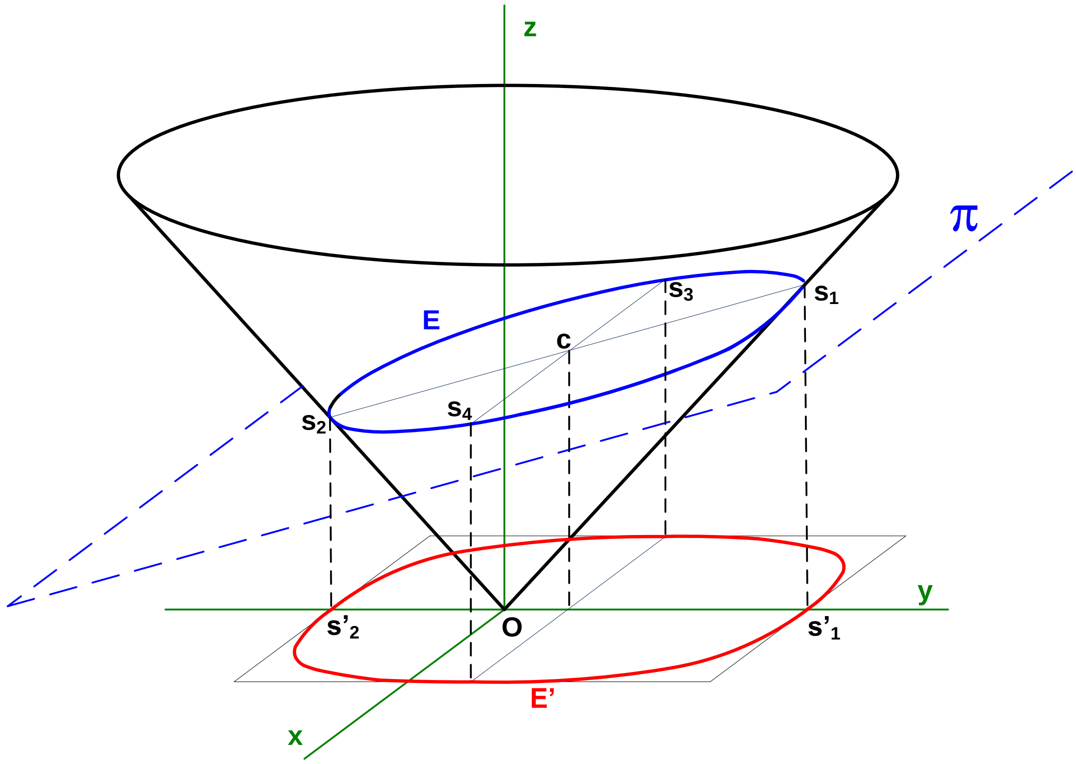
Visiblement plus simple.

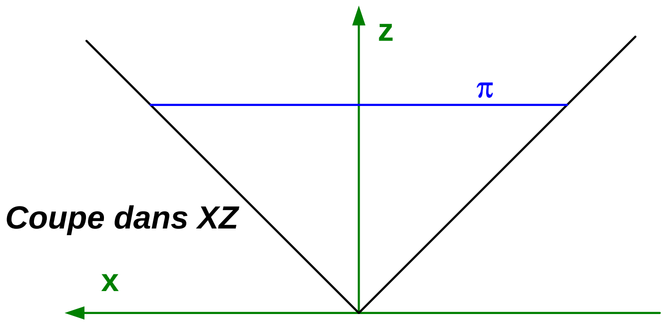
EXGAE87 - EPL, UCL, Louvain, Septembre 2009.

On considère, dans un système de coordonnées cartésiennes, l'ellipse située à l'intersection d'un cône décrit par l'équation $z^2 = a^2\left(x^2 + y^2\right)$ avec le plan $z = by + d$. On supposera que $a, b, d > 0$ et $a > b$.

1. Dessinez des coupes du plan et du cône dans les plans XY et YZ ainsi qu'un projection (parallèlement à l'axe z) de l'ellipse dans le plan XY.
2. Quelle est la longueur (en fonction des paramètres a, b et d du grand axe de l'ellipse? Gardez à l'esprit que l'ellipse est située dans un plan non perpendiculaire à l'axe du cône.
3. Le petit axe se trouve dans un plan $y = c$. Trouvez la constante c.
4. Expliquez brièvement (4 lignes maximum) comment vous pouvez trouver la longueur du petit axe. Un dessin sera le bienvenu.

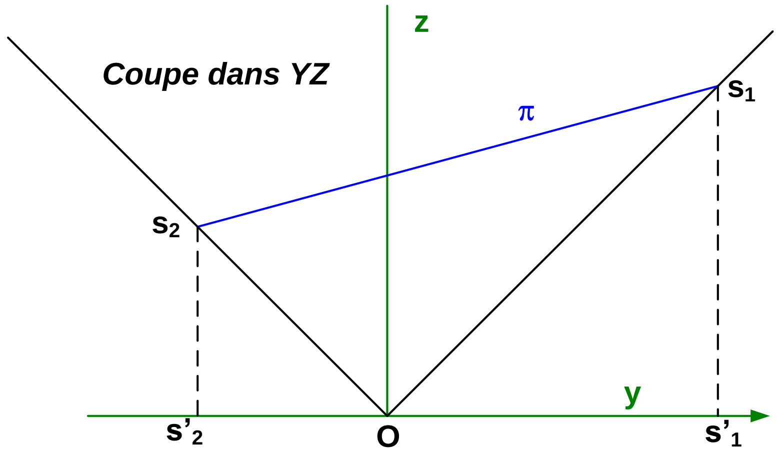
Résolution proposée par Paul Etienne





<u>Coupe dans $(X, Z) \equiv y = 0$</u>

- Le cône coupe le plan en deux droites $\begin{cases} z^2 = a^2x^2 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \pm ax \\ y = 0 \end{cases}$
- Le plan π coupe ce plan en une droite horizontale $\begin{cases} z = d \\ y = 0 \end{cases}$
- L'ellipse E rencontre le plan en deux points $\left(\dfrac{d}{a}, 0, d\right)$ et $\left(-\dfrac{d}{a}, 0, d\right)$



<u>Coupe dans $(Y, Z) \equiv x = 0$</u>

- Le cône coupe le plan en deux droites $\begin{cases} z^2 = a^2y^2 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = \pm ay \\ x = 0 \end{cases}$
- Le plan π coupe ce plan en une droite $\begin{cases} x = 0 \\ z = by + d \end{cases}$
- L'ellipse E rencontre le plan aux sommets du grand axe

$$s_1 : \begin{cases} x = 0 \\ z = ay \\ z = by + d \end{cases} \rightarrow s_1\left(0, \frac{d}{a-b}, \frac{ad}{a-b}\right)$$

$$s_2 : \begin{cases} x = 0 \\ z = -ay \\ z = by + d \end{cases} \rightarrow s_2\left(0, -\frac{d}{a+b}, \frac{ad}{a+b}\right)$$

2) ZY est le plan passant par le sommet du cône et orthogonal à X, il est le plan de symétrie pour le cône et pour π, donc pour l'ellipse E qu'il coupe suivant le grand axe.

La longueur de ce grand axe est la longueur entre s_1 et s_2.

$$d(s_1,s_2)=\sqrt{d^2\left(\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}\right)^2+a^2d^2\left(\frac{1}{a-b}-\frac{1}{a+b}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{4a^2d^2}{\left(a^2-b^2\right)^2}+\frac{4b^2a^2d^2}{\left(a^2-b^2\right)^2}}=\boxed{\frac{2ad}{a^2-b^2}\sqrt{1+b^2}}$$

3) Le centre c est un point du petit axe. Le centre est le milieu de $[s_1,s_2]$.

Il a pour ordonnée : $\frac{1}{2}\left(\frac{-d}{a+b}+\frac{d}{a-b}\right)=\frac{d}{2}\left(\frac{-a+b+a+b}{a^2-b^2}\right)=\frac{bd}{a^2-b^2}$

Donc le petit axe est dans le plan : $\boxed{y=\frac{bd}{a^2-b^2}}$

4) Les deux sommets s_3 et s_4 sont les intersections du plan ci-dessus, du plan π et du cône

Il "suffit" donc de résoudre le système $\begin{cases} z^2=a^2\left(x^2+y^2\right) \\ y=\dfrac{bd}{a^2-b^2} \\ y=by+d \end{cases}$

Il restera à trouver la distance entre ces 2 points, qui ne diffèrent que par leurs abscisses opposées.

Remarque

L'équation de E' est $(by+d)^2=a^2\left(x^2+y^2\right)$ ou $E'=a^2x^2+\left(a^2-b^2\right)y^2-2bdy-d^2=0$

---

12 septembre 2009

EXGAE88 - Compléments.

En utilisant uniquement les propriétés des vecteurs déterminer les coordonnées de la projection orthogonale R d'un point P :

1) Dans l'espace à deux dimensions $\mathbb{R}^2$, sur une droite passant par l'origine.
2) Dans l'espace à deux dimensions $\mathbb{R}^2$, sur une droite ne passant pas par l'origine.
3) Dans l'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$, sur un plan passant par l'origine.
4) Dans l'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$, sur un plan ne passant pas par l'origine.
5) Dans l'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$, sur une droite passant par l'origine.
6) Dans l'espace à trois dimensions $\mathbb{R}^3$, sur une droite ne passant pas par l'origine.

Note : Nous utiliserons aussi les méthodes "traditionnelles" à titre de comparaison.

Voir aussi : EXGAE148

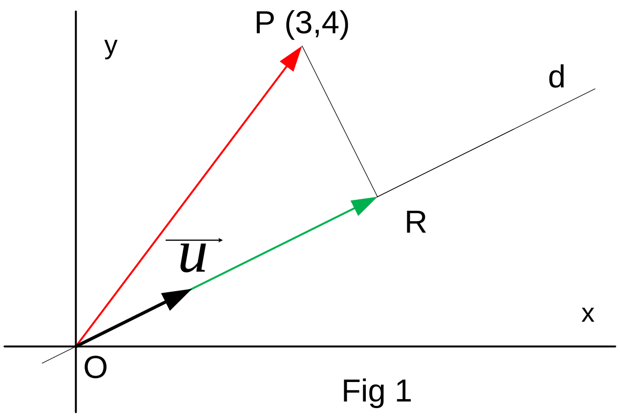


Fig 1

1) Espace à deux dimensions, droite passant par l'origine.

Soit la droite $d \equiv y = mx$ et le point $P(\alpha, \beta)$

Vecteur directeur de la droite : $\vec{u}(1, m) \to$ Vecteur unitaire : $\vec{1_u} = \dfrac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|}$

$$\text{Donc } \overrightarrow{OR} = \overbrace{\underbrace{\left(\overrightarrow{OP} . \vec{1_u}\right)}_{\substack{\text{Produit scalaire} \\ = \text{un nombre}}} \vec{1_u}}^{\substack{\text{Un vecteur multiplié} \\ \text{par un nombre}}}$$

Remarquons que la distance de P à la droite d est le module du vecteur $\overrightarrow{RP}$:

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} \to d(P, d) = \left|\overrightarrow{RP}\right|$$

Exemple

Soit $d \equiv y = \dfrac{x}{2}$ et $P(3,4)$

a) <u>Méthode vectorielle</u>

$$\vec{u} = (2,1) \to \vec{1_n} = \frac{(2,1)}{\sqrt{5}} \to \overrightarrow{OR} = \left[(3,4).\frac{(2,1)}{\sqrt{5}}\right]\frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = 2(2,1) = (4,2)$$

Et donc les coordonnées cherchées sont : $R(4,2)$

La distance de P à d est $d(P,d) = \left|\overrightarrow{RP}\right| = \left|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}\right| = \left|(3,4)-(4,2)\right| = \left|(-1,2)\right| = \sqrt{5}$

b) <u>Méthode traditionnelle</u>

La droite n perpendiculaire à d et passant par $P : n \equiv y - 2 = -2(x-4) \to y = -2x+10$

R est l'intersection de n et d : $\begin{cases} y = \dfrac{x}{2} \\ y = -2x+10 \end{cases} \to R(4,2)$

2) <u>Espace à deux dimensions, droite ne passant pas par l'origine.</u>

Soit la droite $d \equiv y = mx + p$ et le point $P(\alpha,\beta)$. Soit R la projection de P sur d.

Le vecteur directeur de la droite est : $\vec{u}(1,m) \to$ Vecteur unitaire : $\vec{1_u} = \dfrac{\vec{u}}{\left|\vec{u}\right|}$

Prenons un point quelconque X de la droite d.

Alors : $\overrightarrow{XR} = \underbrace{\overbrace{\left(\overrightarrow{XP}.\vec{1_u}\right)}^{\text{Produit scalaire = un nombre}}.\vec{1_u}}_{\text{Un vecteur multiplié par un nombre}} \to \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XP}$ Ce qui détermine les coordonnées de R.

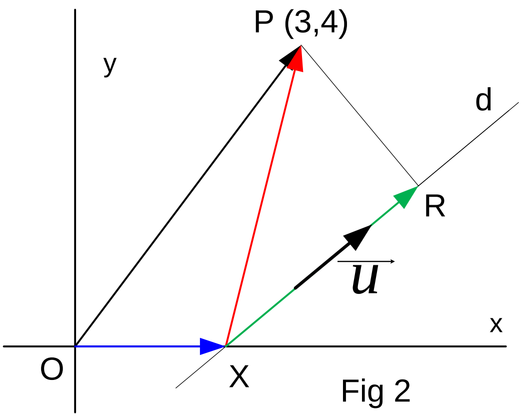


Fig 2

Exemple (*Fig* 2)

Soit $d \equiv y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{3}$ et $P(3,4)$

Soit $X(0,2)$ (Puisque que X est quelconque, on le choisit pour simplifier les calculs)

a) <u>Méthode vectorielle</u>

$$\vec{u} = (6,5) \rightarrow \vec{1_u} = \frac{(6,5)}{\sqrt{61}} \rightarrow \overrightarrow{XR} = \left(\overrightarrow{XP}.\vec{1_u}\right)\vec{1_u} = \left(\frac{(1,4)(6,5)}{\sqrt{61}}\right)\frac{(6,5)}{\sqrt{61}} = \frac{26}{61}(6,5) = \frac{(156,130)}{61}$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XR} = (2,0) + \frac{(156,130)}{61} = \frac{(278,130)}{61} \simeq (4.557;2.131)$$

Et donc les coordonnées cherchées sont : $R(4.557;2.131)$

b) <u>Méthode traditionnelle</u>

La droite n perpendiculaire à d et passant par $P: n \equiv y - 4 = -\frac{6}{5}(x-3) \rightarrow y = -\frac{6}{5}x + \frac{38}{5}$

R est l'intersection de n et d : $\begin{cases} y = \frac{5}{6}x - \frac{5}{3} \\ y = -\frac{6}{5}x + \frac{38}{5} \end{cases} \rightarrow R(4.557;2.131)$

4) Espace à trois dimensions, plan passant par l'origine.

Soit un point $P(\alpha,\beta,\gamma)$ et un plan d'équation cartésienne : $\pi \equiv ax + by + cz = 0$

Un vecteur normal au point est : $\vec{n}(a,b,c)$ et le vecteur unitaire est $\vec{1_n} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Le plan passe par l'origine. Nous avons alors : $\overrightarrow{PR} = \underbrace{\left(\overrightarrow{PO}.\vec{1_n}\right)}_{\substack{\text{Produit scalaire} \\ = \text{un nombre}}} .\vec{1_n}$

Et finalement : $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$

Les composantes de $\overrightarrow{OR}$ sont les coordonnées de R.

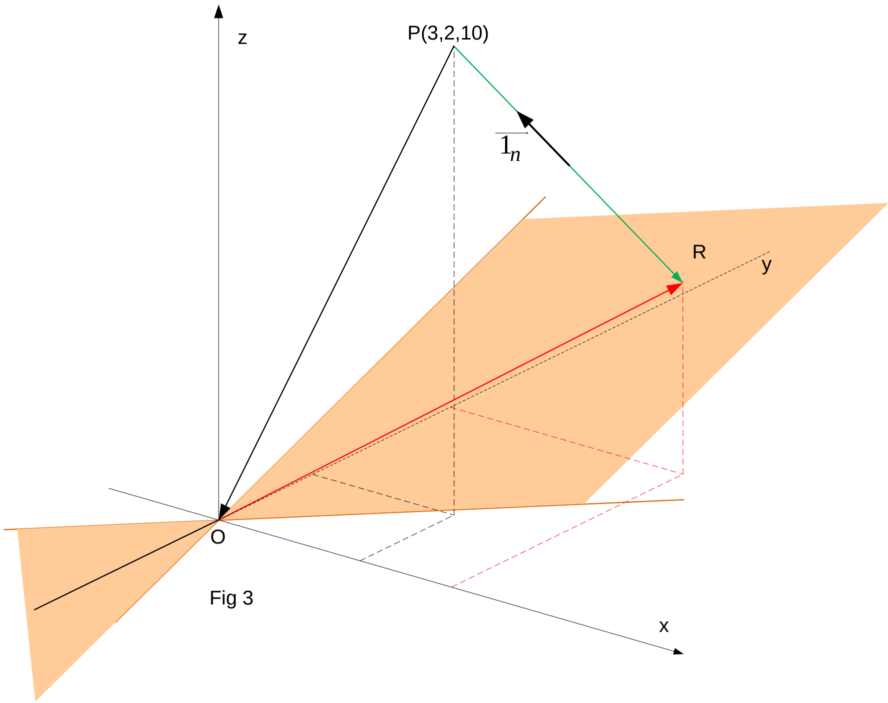


Fig 3

Exemple

a) Méthode vectorielle

Soient : $P(3,2,10)$; $\pi \equiv -2x-3y+6z=0$

$$\vec{n}=(-2,-3,6)\rightarrow \vec{1}_n=\frac{(-2,-3,6)}{7}=(-0.286;-0.429;+0.857)$$

$$\overrightarrow{PR}=\left(\overrightarrow{PO}.\vec{1}_n\right).\vec{1}_n=\left((-3,-2,-10).(-0.286;-0.429;+0.857)\right).(-0.286;-0.429;+0.857)$$

$$=-6.854(-0.286;-0.429;+0.857)=(1,960;2.940;-5,873)$$

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PR}=(3,2,10)+(1,960;2.940;-5,873)=(4,960;4,940;4.127)$$

b) Méthode traditionnelle

Equations paramètriques de la droite passant par $P: n\equiv\begin{cases}x=3-2k\\ y=2-3k\\ z=10+6k\end{cases}$

Le point R appartient à $\pi: -2(3-2k)-3(2-3k)+6(10+6k)=0\rightarrow k=-\frac{48}{49}=-0.980$

$$\rightarrow R:\begin{cases}x=3-2\times(-0.980)=4.960\\ y=2-3\times(-0.980)=4.940\\ z=10+6\times(-0.980)=4.120\end{cases}\rightarrow R:(4,960;4,940;4.127)$$

4) Espace à trois dimensions, plan ne passant pas par l'origine.

Soit un point $P(\alpha,\beta,\gamma)$ et un plan d'équation cartésienne :$\pi \equiv ax+by+cz+d=0$

Un vecteur normal au point est : $\vec{n}(a,b,c)$ et le vecteur unitaire est $\vec{1}_n = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$

Prenons un point X appartenant au plan $\left(0,0,-\dfrac{d}{c}\right)$. Ici nous prenons un point particulier pour simplifier les calculs, mais X peut être quelconque.

Nous avons alors : $\overrightarrow{PR} = \underbrace{\left(\overrightarrow{PX}.\vec{1}_n\right)}_{\substack{\text{Produit scalaire} \\ =\text{ un nombre}}} .\vec{1}_n$

Et finalement : $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR}$

Les composantes de $\overrightarrow{OR}$ sont les coordonnées de R.

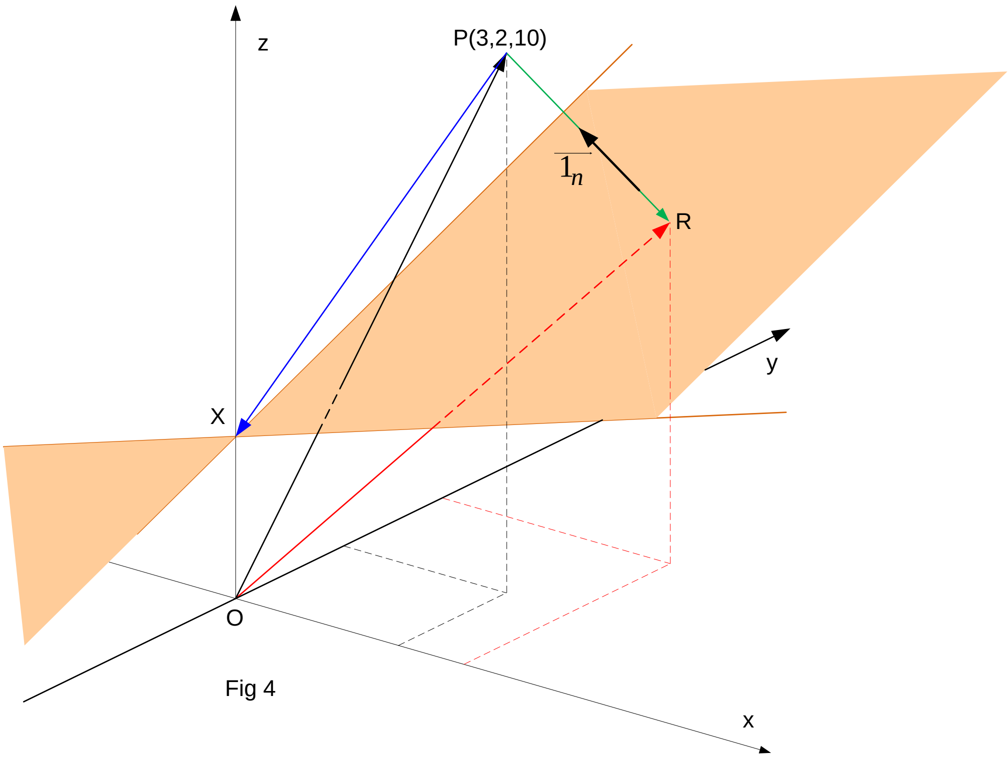


Fig 4

Exemple

Soit : $P(3,2,10)$, $\pi \equiv -2x-3y+6z-18=0$

Soit $X\,(0,0,3)$

a) Méthode vectorielle

$$\vec{n}(-2,-3,+6) \rightarrow \vec{1}_n(-0.286,-0.429,+0.857)$$

$$\overrightarrow{OX}\,(0,0,3) \rightarrow \overrightarrow{PR} = \left(\overrightarrow{PX}.\vec{1}_n\right)\vec{1}_n = \left[(-3,-2,-7).(-0.286,-0.429,+0.857)\right]\vec{1}_n$$

$$= -4.283(-0.286,-0.429,+0.857) = (1.225,1.837,-3.671)$$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PR} = (3,2,10)+(1.225,1.837,-3.671) = (4.225,3.837,6.329)$$

Conclusion : $R(4.225,3.837,6.329)$

b) Méthode traditionnelle

Les équations paramètriques de la perpendiculaire à π et passant par P sont

$$\begin{cases} x = 3-2k \\ y = 2-3k \\ z = 10+6k \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation cartésienne de π :

$$-2(3-2k)-3(2-3k)+6(10+6k)=18 \rightarrow k = -\frac{30}{49} \simeq -0.6122$$

Les coordonnées de R sont alors :

$$R:(3+2\times 0.6122, 2+3\times 0.6122, 10-6\times 0.6122) = (4.224,3.837,6.327)$$

5) Espace à trois dimensions, droite passant par l'origine.

Soit un point $P(\alpha,\beta,\gamma)$ et une plan d'équation cartésienne :$d \equiv \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Un vecteur directeur de la droite d est : $\vec{v}(a,b,c)$ et le vecteur unitaire est $\vec{1}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Nous avons alors : $\overrightarrow{OR} = \left(\overrightarrow{OP}.\vec{1}_v\right).\vec{1}_v$

Les composantes de $\overrightarrow{OR}$ sont les coordonnées de R.

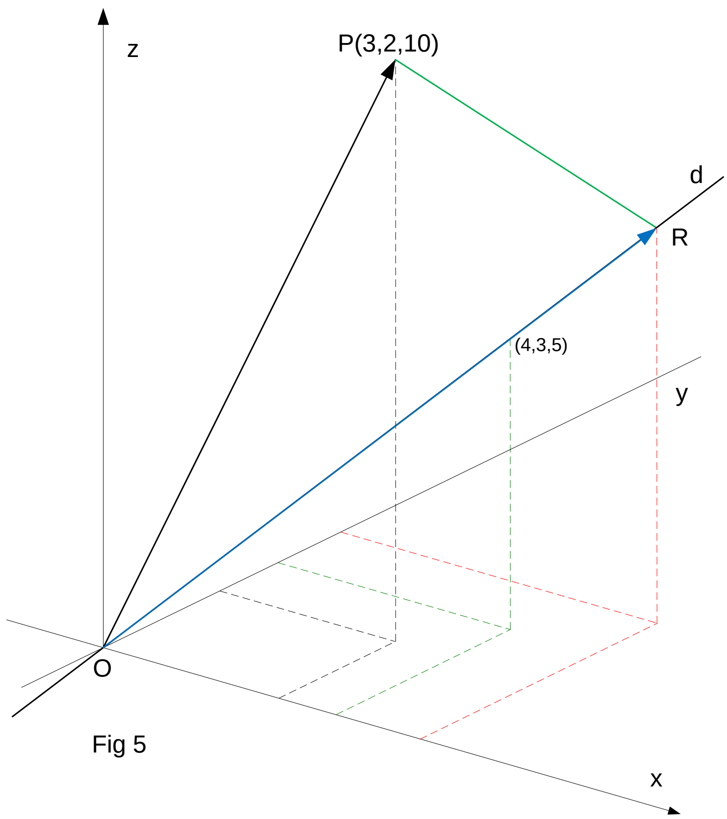


Fig 5

Exemple

a) Méthode vectorielle

Soient $P(3,2,10)$ et $d \equiv \frac{x}{4} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$.

Donc $\vec{v} = (4,3,5) \to \vec{1_v} = (0.566;0.424;0.707)$

$\to \overrightarrow{OR} = \left(\overrightarrow{OP}.\vec{1_v}\right).\vec{1_v} = \left((3,2,10).(0.566;0.424;0.707)\right).(0.566;0.424;0.707)$

$= 9.616(0.566;0.424;0.707) = (5.443;4.077;6.799)$

b) Méthode traditionnelle

Le plan n perpendiculaire à d et passant par P est : $4x + 3y + 5z - 68 = 0$

Les équations paramétriques de d sont $\begin{cases} x = 4k \\ y = 3k \\ z = 5k \end{cases}$

Le point R correspond à la valeur de k qui satisfait :$16k + 9k + 25k = 68 \to k = 1.36$

$\to R(5.44;4.08;6.80)$

6) Espace à trois dimensions, droite ne passant pas par l'origine.

Soit un point $P(\alpha,\beta,\gamma)$ et une plan d'équation cartésienne :$d \equiv \dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{z-z_1}{c}$

Un vecteur directeur de la droite d est : $\vec{v}(a,b,c)$ et le vecteur unitaire est $\vec{1_v} = \dfrac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$

Soit X un point quelconque de d. Nous avons alors : $\overrightarrow{XR} = \left(\overrightarrow{XP}.\vec{1_v}\right).\vec{1_v}$

Donc : $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XR}$

Les composantes de $\overrightarrow{OR}$ sont les coordonnées de R.

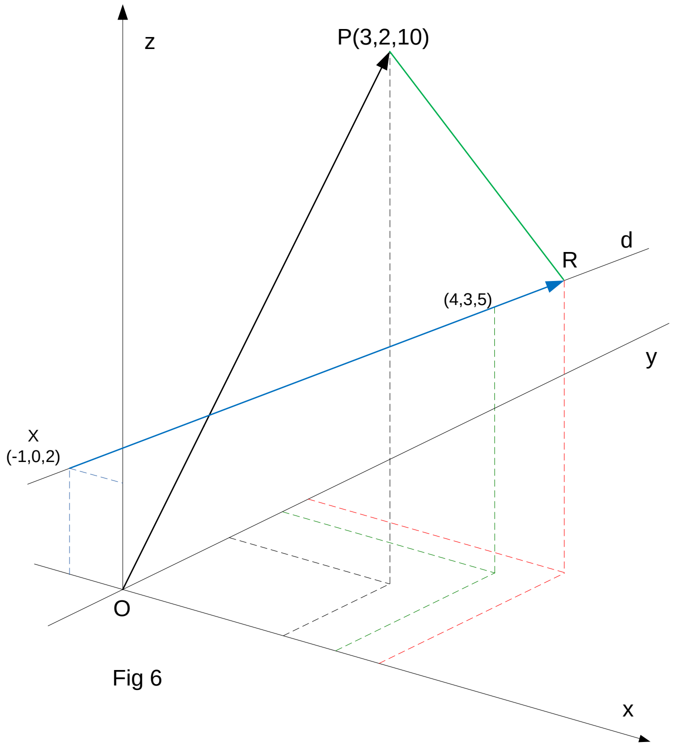


Fig 6

Exemple

a) Méthode vectorielle

Soient $P(3,2,10)$ et d droite définie par les points $(-1,0,2)$ et $(4,3,2)$

$\rightarrow d \equiv \frac{x+1}{5} = \frac{y}{3} = \frac{z-2}{3}$.

Donc $\vec{v} = (5,3,3) \rightarrow \vec{1_v} = \frac{(4,3,3)}{\sqrt{43}}$

$\rightarrow \overrightarrow{XR} = \left(\overrightarrow{XP}.\vec{1_v}\right).\vec{1_v} = \left((5,2,8).\frac{(4,3,3)}{\sqrt{43}}\right).\frac{(4,3,3)}{\sqrt{43}} = \frac{50}{43}(4,3,3) = (5.814, 3.488, 3.488)$

$\rightarrow \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XR} = (-1,0,2) + (5.814, 3.488, 3.488) = (4.814, 3.488, 5.488)$

b) Méthode traditionnelle

Le plan n perpendiculaire à d et passant par P est : $5x+3y+3z-51=0$

Les équations paramétriques de d sont $\begin{cases} x = -1+5k \\ y = 3k \\ z = 2+3k \end{cases}$

Le point R correspond à la valeur de k qui satisfait :

$5(-1+5k)+3(3k)+3(2+3k)-51=0 \rightarrow k = 1.1628$

$\rightarrow R(4.814, 3.488, 5.488)$

EXGAE89 - FACSA, ULB, Bruxelles, Juillet 2009.

OXY est un repère orthonormé de l'espace.

Les droites a et b d'équations $a \equiv \{X = 2, Z = 0\}, b \equiv \{Z = 0, Y = 2\}$ forment un carré $OBAC$ avec les axes OX et OY (A est sur OX et C sur OY).

Les points $P(0,0,h)$ et $Q(0,0,-h)$ (h est réel et positif) constituent, avec trois des sommets du carré, l'hexaèdre (polyèdre de 6 faces) $PQABC$.

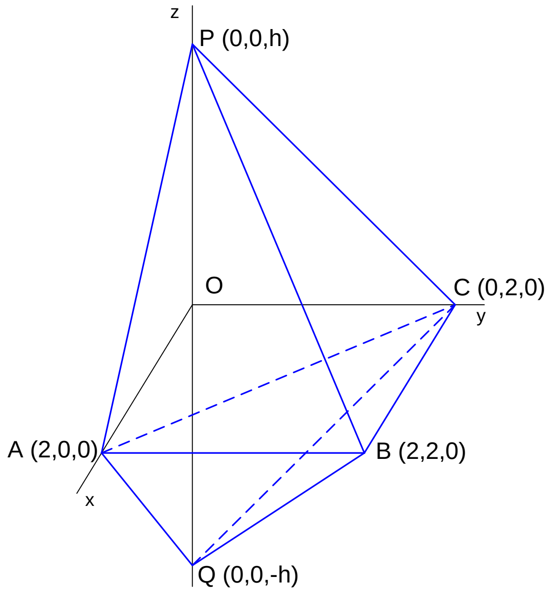
a) Que doit valoir h pour que l'hexaèdre ait un volume égal à celui du cube dont $OABC$ serait une face?

b) Ecrivez une équation cartésienne de chaque face de l'héxahèdre.

c) Ecrivez des équations cartésiennes des droites PA, PB, PB et QC.

d) Que vaut h si l'angle PQB est droit?

e) On pose $h = 2$, écrivez des équations cartésiennes de la perpendiculaire au plan QAB, issue de O.



$a)\ V_{PQABC}=2V_{PABC}=\frac{2}{3}|\ OP\ |.S_{ABC}=\frac{2}{3}\times h\times\frac{2^2}{2}=\frac{4}{3}h$

$V_{cube}=2^3\to V_{PQABC}=V_{cube}\to\frac{4}{3}h=2^3\to\boxed{h=6}$

$$b)\ PAC\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y & z\\ -2 & 0 & h\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2h(x-2)-2hy-4z=0\to\boxed{PAC\equiv hx+hy+2z-2h=0}$$

$$PBC\equiv\begin{vmatrix}x & y-2 & z\\ 0 & -2 & h\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=2h(y-2)+4z=0\quad\to\boxed{PBC\equiv hy+2z+2h=0}$$

$$PAB\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y & z\\ -2 & 0 & h\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2h(x-2)-4z=0\quad\to\boxed{PAB\equiv hx+2z-2h=0}$$

$$QAC\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y & z\\ -2 & 0 & -h\\ -2 & 2 & 0\end{vmatrix}=2h(x-2)+2hy-4z=0\to\boxed{QAC\equiv hx+hy-2z-2h=0}$$

$$QBC\equiv\begin{vmatrix}x & y-2 & z\\ 0 & -2 & -h\\ 2 & 0 & 0\end{vmatrix}=-2h(y-2)+4z=0\quad\to\boxed{QBC\equiv hy-2z-2h=0}$$

$$QAB\equiv\begin{vmatrix}x-2 & y & z\\ -2 & 0 & -h\\ 0 & 2 & 0\end{vmatrix}=-2h(x-2)-4z=0\quad\to\boxed{QAB\equiv hx-2z-2h=0}$$

$c)\ PA\equiv PAB\cap XOZ\equiv\begin{cases}hx+2z-2h=0\\ y=0\end{cases}$ $\qquad PB\equiv PAB\cap PBC\equiv\begin{cases}hx+2z-2h=0\\ hy+2z-2h=0\end{cases}$

$QB\equiv QAB\cap QBC\equiv\begin{cases}hx-2z-2h=0\\ hy-2z-2h=0\end{cases}$ $\qquad QC\equiv QBC\cap YOZ\equiv\begin{cases}hy+2z-2h=0\\ x=0\end{cases}$

$d)$ Si $PBQ=90°\to OBP=45°$ et le triangle PBQ est isocèle rectangle. $\to h=|\ OP\ |=|\ OB\ |=\boxed{2\sqrt{2}}$

$e)\ QAB\equiv 2x-2z-4=0\to$ son vecteur normale est : $\vec{n}_{QAB}=(1,0,-1)$

$\to$ L'équation de la normale est : $\boxed{n\equiv\begin{cases}x=-z\\ y=0\end{cases}}$

Le 26 juin 2010