

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie analytique dans l'espace**

## **GAE 9**

**EXGAE090 – EXGAE099**

<http://www.matheux.c.la>

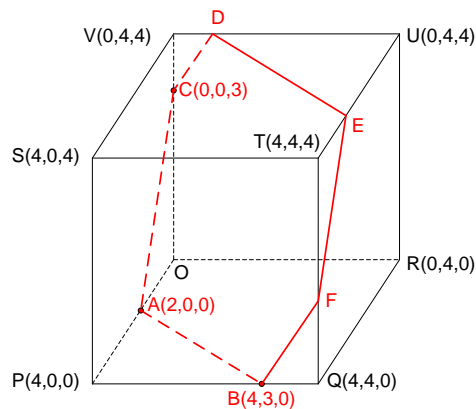
**Jacques Collot  
Benoit Baudalet – Steve Tumson**

Mai 10

## EXGAE090 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2009.

Les axes du repère orthonormé de l'espace  $OXYZ$  coïncident avec trois arêtes d'un cube de côté 4, qui repose sur le plan horizontal  $OXY$ , du côté des  $X$ , des  $Y$  et des  $Z$  positifs.

- Montrez que les trois points  $A(2,0,0)$ ,  $B(4,3,0)$  et  $C(0,0,3)$  appartiennent à trois arêtes distinctes du cube.
- Le plan  $ABC$  coupe le cube selon un hexagone  $BACDEF$ . Déterminez les coordonnées des sommets de polygone.
- Calculez la distance qui sépare le plan  $ABC$  du sommet du cube qui est le plus éloigné de l'origine  $O$  des axes.
- Déterminez le plus petit angle que font les plans  $ABC$  et  $OXY$ .



- Il y a de nombreuses façons de montrer que les points  $A, B$  et  $C$  appartiennent à trois arêtes distinctes du cube. En voici une parmi d'autres :

Les trois points déterminent 3 droites de vecteurs directeurs :

$$\vec{v}_{AB} = (2, 3, 0); \vec{v}_{BC} = (-4, -3, 3); \vec{v}_{CA} = (-2, 0, 0).$$

Aucune de ces directions n'étant parallèles aux axes, les points  $ABC$  ne peuvent appartenir à la même arête.

$$b) \text{ Equation du plan } ABC \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y & z \\ -2 & 0 & 3 \\ 4-2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -9(x-2) + 6y - 6z = 0 \rightarrow ABC \equiv 3x - 2y + 2z - 6 = 0$$

Equation paramétrique de  $VU \equiv \{x = 0; y = k; z = 4\}$

$$D \equiv VU \cap ABC \rightarrow 3 \times 0 - 2k + 2 \times 4 - 6 = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow \boxed{D(0, 1, 4)}$$

Equation paramétrique de  $UT \equiv \{x = k; y = 4; z = 4\}$

$$E \equiv UT \cap ABC \rightarrow 3k - 2 \times 4 + 2 \times 4 - 6 = 0 \rightarrow k = 2 \rightarrow \boxed{E(2, 4, 4)}$$

Equation paramétrique de  $QT \equiv \{x = 4; y = 4; z = k\}$

$$F \equiv QT \cap ABC \rightarrow 3 \times 4 - 2 \times 4 + 2k - 6 = 0 \rightarrow k = 1 \rightarrow \boxed{F(4, 4, 1)}$$

c) Vecteur normal à  $ABC$  :  $\vec{n}_{ABC} = (3, -2, 2)$ . Vecteur unitaire normal :  $\vec{i}_{ABC} = \frac{\vec{n}_{ABC}}{|\vec{n}_{ABC}|} = \frac{(3, -2, 2)}{\sqrt{17}}$

$$\overrightarrow{AT} : (2, 4, 4) \rightarrow \text{Distance de } T \text{ à } ABC : d(T, ABC) = \overrightarrow{AT} \cdot \vec{i}_{ABC} = (2, 4, 4) \cdot \frac{(3, -2, 2)}{\sqrt{17}} = \boxed{\frac{6\sqrt{17}}{17}}$$

d) Calcul de l'angle  $\alpha$  entre les plans  $ABC$  et  $OXY$  :  $\vec{n}_{ABC} = (3, -2, 2)$  et  $\vec{n}_{OXY} = (0, 0, 1)$

$$\rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{n}_{ABC} \cdot \vec{n}_{OXY}}{|\vec{n}_{ABC}| \cdot |\vec{n}_{OXY}|} = \frac{2}{\sqrt{17} \times 1} = \frac{2\sqrt{17}}{17} \rightarrow \boxed{\alpha = 60.98^\circ}$$

---

Le 28 juin 2010

## EXGAE091 – FACSA, ULG, Liège, Juillet 2010.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les droites  $d_a$  et  $d_b$  par leurs équations cartésiennes :

$$d_a : \begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad d_b : \begin{cases} x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases}$$

où  $a$  et  $b$  sont des paramètres réels.

- Montrer que ces droites ne sont pas parallèles, quels que soient  $a$  et  $b$ .
- Déterminer la condition nécessaire et suffisante sur  $a$  et  $b$  pour que les droites soient concourantes.
- Sous la condition déterminée au point précédent, déterminer alors l'équation du plan contenant ces droites.

(a)  $d_a$  peut se mettre sous la forme :  $d_a \equiv \frac{x-a}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{1}$ .

Son vecteur directeur est donc :  $\vec{v}_{d_a} = (1, -3, 1)$

$d_b$  peut se mettre sous la forme :  $d_b \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-4b+7}{1} = \frac{z+6b-1}{-3}$ .

Son vecteur directeur est donc :  $\vec{v}_{d_b} = (1, 1, -3)$

Autrement dit, quels que soient  $a$  et  $b$ , les droites ne sont pas parallèles.

- (b) Si les deux droites  $d_a$  et  $d_b$  sont concourantes alors le système d'équation formé par leurs équations cartésiennes est possible.

$$\begin{cases} x - z - a = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \\ x + 2y + z - 2b = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \quad \text{Résolvons d'abord : } \begin{cases} x - z = a \\ y + 3z = -1 \\ 3x + 3y + 2z = 7 \end{cases} \quad \rightarrow \begin{cases} x = \frac{7a-10}{4} \\ y = -\frac{9a-26}{4} \\ z = \frac{3a-10}{4} \end{cases}$$

Ces coordonnées doivent satisfaire la dernière équation :  $x + 2y + z - 2b = 0$

$$\rightarrow \frac{7a-10}{4} + 2\left(-\frac{9a-26}{4}\right) + \frac{3a-10}{4} - 2b = 0 \rightarrow \boxed{a+b=4}$$

Cette relation est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux droites soient concourantes.

(c) Les vecteurs directeurs des droites sont :  $\vec{v}_{d_a} = (1, -3, 1)$  et  $\vec{v}_{d_b} = (1, 1, -3)$

Le vecteur normal au plan  $\pi$  déterminé par ces deux droites est :

$$\vec{n} = \vec{v}_{d_a} \times \vec{v}_{d_b} = \begin{vmatrix} \vec{1}_x & \vec{1}_y & \vec{1}_z \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (8, 4, 4) = (2, 1, 1)$$

L'équation du plan est alors :  $\pi \equiv 2x + y + z + d = 0$

Déterminons  $d$  est exprimant que ce plan passe par le point d'intersection des deux droites :

$$2 \frac{7a-10}{4} - \frac{9a-26}{4} + \frac{3a-10}{4} + d = 0 \rightarrow d = 1 - 2a$$

$$\rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x + y + z + 1 - 2a = 0}$$

La condition est  $a + b = 0$  et le plan est alors  $\pi \equiv 2x + y + z + 1 - 2a = 0$

$$1) a = 1 \rightarrow b = 3 \rightarrow d_1 \equiv \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \text{ et } d_2 \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \text{ et } \pi \equiv 2x + y + z - 1 = 0$$

Elles se coupent en  $P\left(-\frac{3}{4}, \frac{17}{4}, -\frac{7}{4}\right)$ . Il est facile de vérifier que  $P \begin{cases} \in d_1 \\ \in d_2 \\ \in \pi \end{cases}$

Soit de plus  $A(2, -1, 0) \in d_1$  et  $B(0, 1, 2) \in d_2$ . On vérifie  $A, B \in \pi$

$$2) a = 2 \rightarrow b = 2 \rightarrow d_1 \equiv \begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y + 3z + 1 = 0 \end{cases} \text{ et } d_2 \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 4 = 0 \\ 3x + 3y + 2z - 7 = 0 \end{cases} \text{ et } \pi \equiv 2x + y + z - 3 = 0$$

Elles se coupent en  $P(1, 2, -1)$ . Il est facile de vérifier que  $P \begin{cases} \in d_1 \\ \in d_2 \\ \in \pi \end{cases}$

Soit de plus  $A(1, -1, 0) \in d_1$  et  $B(0, 5, 4) \in d_2$ . On vérifie  $A, B \in \pi$

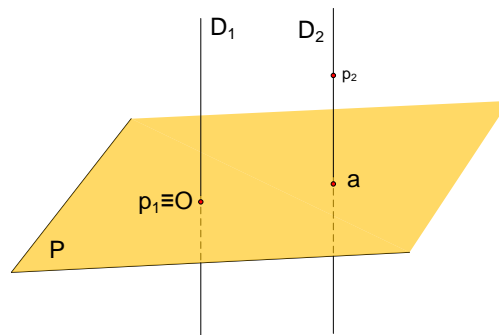
## EXGAE092 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010 série 1.

Soit le plan  $P$  d'équation cartésienne  $3x + 2y + z = 0$ . Soient les points  $p_1$  et  $p_2$  de coordonnées cartésiennes  $(0,0,0)$  et  $(1,1,2)$ , respectivement. Les droites  $D_1$  et  $D_2$  sont toutes deux perpendiculaires à  $P$  et passent par  $p_1$  et  $p_2$ , respectivement.

Calculez la distance entre ces droites ?

---

### Solution proposée par Fabienne Zoetard



$$p_1(0,0,0) \in \text{plan } P$$

$$p_2(1,1,2) \notin \text{plan } P$$

$D_1$  et  $D_2$  sont deux droites perpendiculaires au plan  $P$  et donc sont parallèles entre elles :

$$\rightarrow \text{dist}(D_1, D_2) = \text{dist}(p_1, a) \text{ où } a \text{ est le point de percée de } D_2 \text{ dans } P$$

car  $p_1a \perp D_1$  et  $D_2$ . (La distance entre deux droites parallèles se mesure sur une perpendiculaire commune aux deux droites).

Déterminons  $a$  :

$$D_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1} = (\lambda) \rightarrow D_2 \equiv \begin{cases} x = 3\lambda + 1 \\ y = 2\lambda + 1 \\ z = \lambda + 2 \end{cases} \quad (1)$$

Injectons (1) dans l'équation du plan  $P$  :

$$3(3\lambda + 1) + 2(2\lambda + 1) + (\lambda + 2) = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$$

Ce qui donne les coordonnées de  $a \left( -\frac{1}{2}, 0, \frac{3}{2} \right)$

La distance cherchée est alors :

$$\text{dist}(D_1, D_2) = |p_1a| = \sqrt{\frac{1}{4} + 0 + \frac{9}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

Remarque : On peut éviter le calcul de  $a$  si on connaît la formule qui donne la distance

$$\text{d'un point à une droite} : \text{dist}(D_1, D_2) = \text{dist}(p_1, D_2)$$

## EXGAE93 - Polytech, Umons, Mons, juillet 2010, Série C.

Dans l'espace euclidien  $E_3$ , muni d'une base orthonormée  $OXYZ$ , les coordonnées du centre  $C_1$  d'une surface sphérique  $(S_1)$  sont :  $C_1(12,14,16)$ . Son rayon  $R_1$  vaut 6.

Une seconde surface  $(S_2)$  est tangente aux plans d'équations cartésiennes  $[X = 0]$  et  $[Y = 0]$ .

Son centre  $C_2$  appartient à une droite passant par le point  $A(4,2,3)$  et admettant comme paramètres directeurs les 3 valeurs  $(1,2,\alpha)$  où  $\alpha$  est une inconnue.

Cette seconde surface  $(S_2)$  est aussi tangente à la surface sphérique  $(S_1)$ .

On demande de déterminer l'équation cartésienne de la surface sphérique  $(S_2)$  et de montrer qu'il existe en fait 2 solutions  $(S_{21})$  et  $(S_{22})$  (leurs centres seront appelés " $C_{21}$ " et " $C_{22}$ ").

---

**Solution proposée par Fabienne Zoetard**

Soient les deux sphères  $S_1(C_1(12,14,16),6)$  et  $S_2(C_2,r_2)$

où  $C_2 \in$  aux plans bissecteurs des plans  $xOz$  ( $x = y$  (1)) et  $yoZ$  ( $x = -y$  (2))

$$\text{et } C_2 \in d \equiv \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{\alpha}$$

D'où : soit  $a$  l'abscisse de  $C_2$

$$(1) \text{ abs} = \text{ord} \text{ et vérifie l'équation de } d \rightarrow a-4 = \frac{a-2}{2} = \frac{z-3}{2} \rightarrow a=6 \rightarrow 2 = \frac{z-3}{\alpha}$$

$$\text{donc } \begin{cases} C_2(6,6,2\alpha+3) \\ r_2 = 6 \end{cases}$$

$$(2) \text{ abs} = -\text{ord} \text{ et vérifie l'équation de } d \rightarrow a-4 = \frac{-a-2}{2} = \frac{z-3}{\alpha} \rightarrow a=2 \rightarrow -2 = \frac{z-3}{\alpha}$$

$$\text{donc } \begin{cases} C_2(2,-2,-2\alpha+3) \\ r_2 = 2 \end{cases}$$

Note : Géométriquement, il est impossible dans ce cas que cette sphère soit aussi tangente à  $S_1$ . Ceci sera confirmé plus loin.

Pour que les deux sphères soient tangentes (ici extérieurement), il faut que la distance entre les centres soit égale à la somme des rayons.

$$(1) \|C_2C_1\| = 12 \rightarrow (12-6)^2 + (14-6)^2 + (16-2\alpha-3)^2 = 144$$

$$\rightarrow 4\alpha^2 - 26\alpha - 125 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = -4.84 \\ \alpha = 8.09 \end{cases}$$

$$(2) \|C_2C_1\| = 8 \rightarrow (12-2)^2 + (16+2\alpha-3)^2 = 64$$

$$\rightarrow 4\alpha^2 + 26\alpha + 461 = 0 \rightarrow \Delta = 676 - 4 \times 4 \times 461 < 0 \rightarrow \text{Pas de solutions}$$

Finalement, nous avons deux solutions :

$\alpha = -4.84 \rightarrow C_{21}(6,6,-6.68)$ $\alpha = 8.09 \rightarrow C_{22}(6,6,13.18)$
---



## EXGAE94 - FACSA, ULG, Liège, Juillet 2010.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on donne les plans  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  et  $\pi_4$  par leur équation cartésienne :

$$\begin{aligned}\pi_1 &\equiv x + y = 1 = 0 & \pi_2 &\equiv y + z - 1 = 0 \\ \pi_3 &\equiv z + x - 1 = 0 & \pi_4 &\equiv x - y + z = 0\end{aligned}$$

On donne aussi le point  $A$  de coordonnées  $(1, 1, \lambda)$ , où  $\lambda$  est un paramètre réel.

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur  $\lambda$  pour que les projections orthogonales de  $A$  sur les plans  $\pi_1, \pi_2, \pi_3$  et  $\pi_4$  soient coplanaires.

Soient  $A_1, A_2, A_3, A_4$  les projections de  $A$  sur les plans  $\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ .

Les points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  seront coplanaires s'il existe deux nombres  $\alpha$  et  $\beta$  tel que :

$$\alpha \overrightarrow{A_1 A_2} + \beta \overrightarrow{A_1 A_3} = \overrightarrow{A_1 A_4} \quad (1)$$

Nous allons donc calculer les points  $A_1, A_2, A_3, A_4$  et les vecteurs  $\overrightarrow{A_1 A_2}, \overrightarrow{A_1 A_3}$  et  $\overrightarrow{A_1 A_4}$ .

Pour  $A_1$  :

Vecteur normal au plan  $\pi_1$  :  $\vec{n}_{\pi_1} (1, 1, 0)$

Droite passant par  $A$  et perpendiculaire à  $\pi_1$  :  $d_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \\ z = \lambda \end{cases}$

Point de percée de  $d_1$  dans  $\pi_1$  :  $1 + k + 1 + k - 1 = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow A_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \lambda \right)$

Pour  $A_2, A_3, A_4$ , nous recommençons selon la même procédure. Ce qui donne :

$$\begin{array}{ccc} \vec{n}_{\pi_2} (0, 1, 1) & \vec{n}_{\pi_3} (1, 0, 1) & \vec{n}_{\pi_4} (1, -1, 1) \\ d_2 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + k \\ z = \lambda + k \end{cases} & d_3 \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 \\ z = \lambda + k \end{cases} & d_4 \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 - k \\ z = \lambda + k \end{cases} \\ k = -\frac{\lambda}{2} & k = -\frac{\lambda}{2} & k = -\frac{\lambda}{3} \\ A_2 \left( 1, 1 - \frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2} \right) & A_3 \left( 1 - \frac{\lambda}{2}, 1, \frac{\lambda}{2} \right) & A_4 \left( 1 - \frac{\lambda}{3}, 1 + \frac{\lambda}{3}, \frac{2\lambda}{3} \right) \end{array}$$

Nous obtenons alors les vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{A_1A_2} : \left( \frac{1}{2}, \frac{1-\lambda}{2}, -\frac{\lambda}{2} \right); \quad \overrightarrow{A_1A_3} : \left( \frac{1-\lambda}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{\lambda}{2} \right); \quad \overrightarrow{A_1A_4} : \left( \frac{1-\lambda}{2} - \frac{\lambda}{3}, \frac{1}{2} + \frac{\lambda}{3}, -\frac{\lambda}{3} \right)$$

L'application de la relation (1) nous conduit au système :

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}(1-\lambda)\beta = \frac{1}{6}3 - 2\lambda & (2) \\ \frac{1}{2}(1-\lambda)\alpha + \frac{1}{2}\beta = \frac{1}{6}(3+2\lambda) & (3) \\ -\frac{\lambda}{2}\alpha - \frac{\lambda}{2}\beta = -\frac{\lambda}{3} & (4) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha + 3(1-\lambda)\beta = 3 - 2\lambda & (2) \\ 3(1-\lambda)\alpha + 3\beta = 3 + 2\lambda & (3) \\ 3\alpha + 3\beta = 2 & (4) \end{cases}$$

$$(2) - (4) \Rightarrow 3(1-\lambda)\beta - 3\beta = 1 - 2\lambda \Rightarrow \beta = \frac{2\lambda - 1}{3\lambda} \Rightarrow \alpha = \frac{2 - 3\beta}{3} = \frac{1}{3\lambda} \quad (\text{donc } \lambda \neq 0)$$

Remplaçons dans la (3):

$$3(1-\lambda) \frac{1}{3\lambda} + 3 \frac{2\lambda - 1}{3\lambda} = 3 + 2\lambda \Rightarrow \frac{1-\lambda}{\lambda} + \frac{2\lambda - 1}{\lambda} = 3 + 2\lambda \Rightarrow 1 - \lambda + 2\lambda - 1 = 3\lambda + 2\lambda^2$$

$$\Rightarrow 2\lambda(\lambda + 1) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = -1}$$

Pour cette valeur, nous avons :

$$A_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1 \right); A_2 \left( 1, \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right); A_3 \left( \frac{3}{2}, 1, -\frac{1}{2} \right); A_4 \left( \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3} \right)$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} : \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2} \right); \quad \overrightarrow{A_1A_3} : \left( 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right); \quad \overrightarrow{A_1A_4} : \left( \frac{5}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right)$$

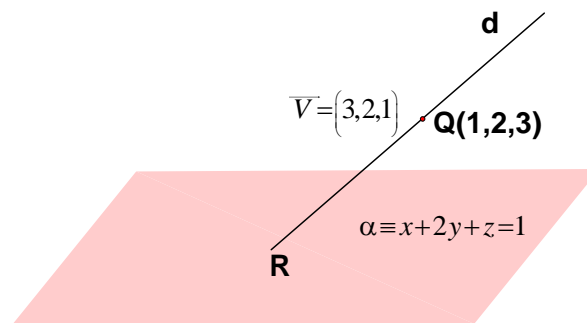
Et avec  $\alpha = -\frac{1}{3}$  et  $\beta = 1$ , nous vérifions

$$-\frac{1}{3} \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_1A_3} = \overrightarrow{A_1A_4}$$

## EXGAE95 - EPL, UCL, Louvain, Septembre 2010.

Soit le système de coordonnées  $(x, y, z)$  dans l'espace. Soit  $Q$  le point de coordonnées  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ . Soit  $\alpha$  le plan d'équation cartésienne  $x + 2y + z = 1$ . Soit le vecteur  $V = (3, 2, 1)$ . Soit la droite  $d$  qui passe par  $Q$  et qui est parallèle à  $V$ . Donnez les coordonnées du point de percée de  $R$  de la droite  $d$  dans le plan  $\alpha$ . Exprimez les coordonnées à l'aide de fractions entières simplifiées.

### Solution proposée par Nicole Berckmans



$$R = d \cap \alpha \text{ avec } \begin{cases} d \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1} = \lambda \\ \alpha \equiv x + 2y + z = 1 \end{cases}$$

On remplace  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans  $\alpha$  en fonction de  $\lambda$ :

$$(3\lambda + 1) + 2(2\lambda + 2) + (\lambda + 3) = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{7}{8}$$

Il suffit de remplacer dans les équations paramétriques de la droite pour obtenir le point de percée :

$$\begin{cases} x = 3\lambda + 1 = -\frac{13}{8} \\ y = 2\lambda + 2 = \frac{1}{4} \\ z = \lambda + 3 = \frac{17}{8} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R\left(-\frac{13}{8}, \frac{1}{4}, \frac{17}{8}\right)}$$

## EXGAE96 - FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.

L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés  $OXYZ$ .

On donne les droites  $d_1$  et  $d_2$  d'équations :

$$d_1 \equiv \begin{cases} Y = -1 \\ Z = -2X \end{cases} \quad d_2 \equiv \begin{cases} Y = 1 \\ Z = 2X \end{cases}$$

a) Démontrez que l'axe  $OY$  est la perpendiculaire commune aux droites  $d_1$  et  $d_2$ .

Soit le plan  $\pi \equiv X = k$  ( $k$  est un réel quelconque) et  $P_1$  et  $P_2$  ses intersections avec  $d_1$  et  $d_2$ .

b) Déterminez les coordonnées des points  $P_1$  et  $P_2$ .

c) Montrez que le milieu du segment  $P_1P_2$  est sur  $OX$ .

d) Ecrivez les équations cartésiennes de la droite  $P_1P_2$ .

Lorsque  $k$  varie, la droite  $P_1P_2$  décrit la surface d'équation  $Z = 2XY$ .

e) Déterminez la nature des courbes d'intersection entre cette surface et les plans d'équation  $Z = b$  où  $b$  est une constante réelle quelconque.

---

### Solution proposée par Steve Tumson

a) Trouvons 2 points de  $d_1$  et  $d_2$  pour déterminer leur équation paramétrique :

$$\begin{cases} (0, -1, 0) \in d_1 \\ (1, -1, -2) \in d_1 \end{cases} \rightarrow d_1 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ vecteur directeur et } \alpha_1 \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} (0, 1, 0) \in d_2 \\ (1, 1, 2) \in d_2 \end{cases} \rightarrow d_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ vecteur directeur et } \alpha_2 \in \mathbb{R}$$

$$\overline{OY} = (0, 1, 0) \Rightarrow \begin{cases} \overline{OY} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow OY \perp d_1 \\ \overline{OY} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow OY \perp d_2 \end{cases}$$

b)

$$d_1 \equiv \begin{cases} Y = -1 \\ Z = -2X \end{cases} \rightarrow P_1 = d_1 \cap \pi \Rightarrow P_1 = (k, -1, -2k)$$

$$d_2 \equiv \begin{cases} Y = 1 \\ Z = 2X \end{cases} \rightarrow P_2 = d_2 \cap \pi \Rightarrow P_2 = (k, 1, 2k)$$

c)  $M(P_1, P_2) = \left( \frac{k+k}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{-2k+2k}{2} \right) = (k, 0, 0) \rightarrow$  Sur l'axe  $OX$

d)

$$P_1P_2 \equiv \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} X = k \\ Y = \beta \\ Z = 2\beta k \end{cases} \Rightarrow P_1P_2 \equiv \begin{cases} X = k \\ Z = 2kY \end{cases}$$

e)

$$(Z = 2XY) \cap (Z = b) \rightarrow XY = \frac{b}{2} \rightarrow \text{Hyperbole équilatère}$$

## EXGAE97 - FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

L'espace est rapporté au système d'axes orthonormés  $OXYZ$ .

On donne les droites  $d_1$  et  $d_2$  d'équations :

$$d_1 \equiv \begin{cases} X = 2 \\ Z = Y \end{cases} \quad d_2 \equiv \begin{cases} X = -2 \\ Z = -Y \end{cases}$$

Soit le plan  $\pi \equiv Y = kX$  ( $k$  est un réel quelconque) et  $P_1$  et  $P_2$  ses intersections avec  $d_1$  et  $d_2$ .

- Déterminez les coordonnées des points  $P_1$  et  $P_2$ .
- Calculez la distance qui sépare  $P_1$  de  $P_2$ .
- Déterminez le plus petit angle que fait  $d_2$  avec la droite  $P_1P_2$ .
- Calculez l'aire du triangle  $P_1OP_2$ .

Lorsque  $k$  varie, la droite  $P_1P_2$  décrit la surface d'équation  $2Y = ZX$ .

- Déterminez la nature des courbes d'intersection entre cette surface et les plans.

---

**Résolution proposée par Steve Tumson**

$$a) \quad d_1 \equiv \begin{cases} X = 2 \\ Z = Y \end{cases} \rightarrow P_1 = d_1 \cap \pi \Rightarrow P_1 = (2, 2k, 2k)$$

$$d_2 \equiv \begin{cases} X = -2 \\ Z = -Y \end{cases} \rightarrow P_2 = d_2 \cap \pi \Rightarrow P_1 = (-2, -2k, 2k)$$

$$b) \quad d(P_1, P_2) = \sqrt{(2+2)^2 + (2k+2k)^2 + (2k-2k)^2} = 4\sqrt{1+k^2}$$

$$c) \quad P_1P_2 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vecteur directeur}$$

$$d_2 \equiv \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ vecteur directeur}$$

$$P_2 = P_1P_2 \cap d_2 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = k = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

$$\rightarrow \begin{cases} \|\vec{u}\| = \sqrt{1+k^2} \\ \|\vec{v}\| = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{k}{\sqrt{2+2k^2}} = f(k)$$

Si nous analysons brièvement  $f(k)$  d'un peu plus près, on observe que ;

- 1)  $\lim_{k \rightarrow +\infty} f(k) = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$  Asymptote horizontale à droite  $\equiv y = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- 2)  $\lim_{k \rightarrow -\infty} f(k) = \frac{-\sqrt{2}}{2} \rightarrow$  Asymptote horizontale à gauche  $\equiv y = \frac{-\sqrt{2}}{2}$
- 3)  $\frac{df}{dk} = \dots = \frac{2}{(2+2k^2)^{3/2}}$  toujours positif et donc  $f(x)$  est toujours croissante.

En résumé, la fonction arrive asymptotiquement de  $f = \frac{-\sqrt{2}}{2}$  ; elle croît

ensuite pour arriver asymptotiquement à son maximum en  $f = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Or, nous avons  $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = f(k)$ , ce qui est donc possible  $\forall k \in \mathbb{R}$

Le plus petit angle est observé pour un cosinus maximum, soit :

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = f_{\max}(k) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\vec{u}, \vec{v}_{\min} = \frac{\pi}{4}}$$

d) Prenons  $P_1P_2$  comme la base du triangle puisque nous avons déjà calculé sa longueur et sa direction dans les points précédents.

Il reste à déterminer la longueur de la hauteur du triangle.

Il faut trouver cette hauteur  $h \mid h \perp P_1P_2$  et  $O \in h$ , avec  $H = h \cap P_1P_2$ .

$$h \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} \quad \text{avec } \vec{w} = \begin{pmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \end{pmatrix} \text{ vecteur directeur de } h$$

$$\text{Il faut } \vec{w} \cdot \vec{u} = x_h + ky_h = 0 \Leftrightarrow x_h = -ky_h \Rightarrow \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On peut donc trouver  $H$  :

$$P_1P_2 \equiv \begin{cases} Y = kX \\ Z = 2k \end{cases} \Rightarrow H = h \cap P_1P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2k \end{pmatrix}$$

La longueur de la hauteur est donc  $\|\overline{OH}\| = |2k|$

N.B.: Notons que la position remarquable des points permettait de trouver

$\|\overline{OH}\|$  en quelques secondes à l'aide d'un petit schéma clair ;)

$$\Rightarrow S_{P_1OP_2} = \frac{1}{2} \|\overline{P_1P_2}\| \cdot \|\overline{OH}\| = \boxed{4|k|\sqrt{1+k^2}}$$

N.B : Certaines personnes connaissent certainement la formule *brute* permettant de calculer la surface d'un triangle dont on connaît les coordonnées des sommets. Si l'origine du repère est l'un des trois sommets, le calcul devient assez rapide et peut faire bonne figure de vérification.

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_A & y_B & y_C \\ z_A & z_B & z_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_A & z_B & z_C \\ x_A & x_B & x_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

$$\xrightarrow{C=(0,0,0)} S = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} x_A & x_B & 0 \\ y_A & y_B & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_A & y_B & 0 \\ z_A & z_B & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_A & z_B & 0 \\ x_A & x_B & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}^2}$$

$$\Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} x_A & x_B \\ y_A & y_B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_A & y_B \\ z_A & z_B \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_A & z_B \\ x_A & x_B \end{vmatrix}^2}$$

$$\Rightarrow S_{R_{OP_2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2k & -2k \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2k & -2k \\ 2k & 2k \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2k & 2k \\ 2 & -2 \end{vmatrix}^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{(8k^2)^2 + (-8k)^2} = 4\sqrt{k^4 + k^2} = \boxed{4|k|\sqrt{1+k^2}}$$

e) A partir de  $P_1P_2 \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ 0 \end{pmatrix}$ , on retrouve bien la surface  $2Y = ZX$  en éliminant  $\alpha$  et  $k$ .

Il faut donc déterminer la courbe déterminée par :  $\begin{cases} 2Y = ZX \\ Y = kX \end{cases} \Rightarrow 2kX = ZX \Rightarrow Z = 2k$

La courbe est donc l'intersection de deux plans :

$$\begin{cases} Y = kX & \text{Perpendiculaire au plan } OXY \text{ et parallèle à l'axe } OZ \\ Z = 2k & \text{Parallèle au plan } OXY \end{cases}$$

En d'autres termes, la courbe d'intersection est une droite parallèle au plan  $OXY$



## EXGAE98 - ERM, 2005, série 1.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points  $A(0, 2, 1)$  et  $B(-1, 1, 3)$ , ainsi que le plan  $\alpha$ , d'équation  $x + 5y + 9z - 13 = 0$  et le plan  $\beta$  d'équation  $3x + ky - 5z + 1 = 0$ , où  $k$  est un paramètre réel.

On demande de déterminer la valeur du paramètre  $k$  afin que la droite  $AB$  coupe la droite d'intersection des plans  $\alpha$  et  $\beta$ .

---

$$\text{On a : } \begin{cases} \alpha \equiv x + 5y + 9z - 13 = 0 & (1) \\ \beta \equiv 3x + ky - 5z + 1 = 0 & (2) \\ AB \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases} & (3) \end{cases}$$

(1) et (3) donne le point de percée  $Q$  de  $AB$  dans  $\alpha$ :

$$\lambda + 5(2 + \lambda) - 5(1 - 2\lambda) - 13 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow Q\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\text{Le point } Q \text{ appartient à } \beta \Rightarrow \frac{3}{2} + \frac{5k}{2} + 0 + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{k = -1}$$

---

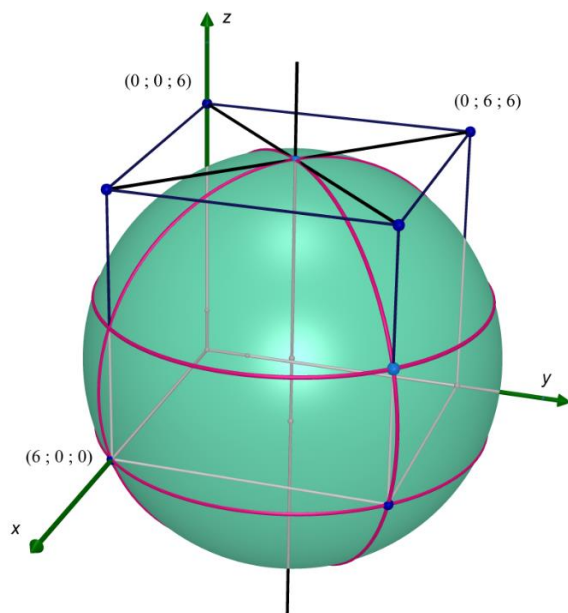
21 avril 2011

## EXGAE99 - ERM, 2006, série 3.

On donne un cube de côté 6.

Une sphère passe par les 4 sommets de la base et elle est tangente au plan supérieur.

On demande d'établir l'équation de cette sphère (dans un repère orthonormé qu'on choisira soi-même).



Réalisé avec Cabri 3D", <http://www.cabri.com/fr/cabri-3d.html>  
(Hugues Vermeiren)

Le repère est défini sur la figure. Si  $O$  est le centre de la sphère, celle-ci a pour équation :

$$(x - x_o)^2 + (y - y_o)^2 + (z - z_o)^2 = R^2$$

Par simple symétrie, le centre  $O$  est situé sur la hauteur élevée au milieu de la base et donc

$$x_o = y_o = 3.$$

D'autre part :  $|A'O| = R \Rightarrow x_o^2 + y_o^2 + z_o^2 = R^2 \Rightarrow 18 + z_o^2 = R^2$

La sphère passe par  $E(3, 3, 6) \Rightarrow (6 - z_o)^2 = R^2 \Rightarrow (6 - z_o)^2 = 18 + z_o^2 \Rightarrow z_o = \frac{3}{2}$

On en déduit le rayon :  $R^2 = 18 + \frac{9}{4} \Rightarrow R = \frac{9}{2}$

Finalement, la sphère a pour équation :

$$\boxed{(x - 3)^2 + (y - 3)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}}$$