Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 1

EXGAE010 – EXGAE019

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

1 avril 03

EXGAE010 – Polytech, UMons, questions-types 2000-2001.

Soit un tétraèdre $ABCD$ dont les coordonnées des sommets sont $A(0,4,2)$, $B(3,1,5)$, $C(-1,3/2,-6)$ et $D(6,-2,1)$.

On demande :

a) L'équation cartésienne du plan contenant la base ABC;

b) De donner les équations paramétriques de la hauteur issue de D et perpendiculaire au plan ABC et de calculer les coordonnées du point de percée dans ce même plan.

a) De calculer lescoordonnées du point H, projection de C, sur AB dans le triangle ABC.

$a)$ Equation du plan ABC : $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & -6 & 1 \end{vmatrix}$

$\rightarrow \quad \boxed{3x+2y-z-6=0}$

$b)$ Equation paramétrique de la hauteur issue de D : $\begin{cases} \mathrm{x}=6+3t \\ y=-2+2t \\ z=1-t \end{cases}$

Point de percée : $3(6+t)+2(-2+2t)-(1-t)=0 \quad \rightarrow \quad t=-\frac{1}{2}$

$\rightarrow \quad \boxed{P:\left(\frac{9}{2},-3,\frac{3}{2}\right)}$

$c)$ H est donné par l'intersection de AB et du plan $\perp$ à AB et passant par C

Paramètres directeurs de AB : $(1,-1,1)$

Plan perpendiculaire à AB : $x-y+z+d=0$

Il passe par C $\rightarrow \quad -1-\frac{3}{2}-6+d=0 \quad \rightarrow \quad d=\frac{17}{2}$

$\rightarrow \quad x-y+z+\frac{17}{2}=0$

Equations paramétriques de AB : $\begin{cases} x=t \\ y=4-t \\ z=2+t \end{cases}$

Intersection de AB et du plan : $t-(4-t)+(2+t)+\frac{17}{2}=0 \quad \rightarrow \quad t=-\frac{13}{6}$

$\rightarrow \quad \boxed{H:\left(-\frac{13}{6},\frac{37}{6},-\frac{1}{6}\right)}$

EXGAE011 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2001.

On donne des équations cartésiennes de trois droites d_1, d_2 et d_3 de l'espace :

$$d_1 : \frac{x-1}{2} = -y = \frac{z+1}{3} \quad d_2 : \frac{x}{3} = y+1 = \frac{z-2}{5} \quad d_3 : \begin{cases} x=1 \\ y+z=2 \end{cases}$$

a) Donner une équation du plan α contenant d_1 et parallèle à d_3.

b) Donner une équation du plan β contenant d_2 et parallèle à d_3.

c) Donner une équation de la droite d s'appuyant sur d_1 et d_2 et parallèle à d_3.

---

a) Déterminons deux points de d_1.

$A_1 \in d_1 : \text{Si } \ y=0 \rightarrow \ x=1 \, et \ z=-1 \quad \rightarrow A_1 : (1;0;-1)$

$B_1 \in d_1 : Si \ \ y=1 \rightarrow \ x=-1 \, et \ z=-4 \quad \rightarrow B_1 : (-1;1;-4)$

Ce qui permet de définir un vecteur directeur de d_1 : $\overrightarrow{V_1} : (2;-1;3)$

Déterminons deux points de d_3.

$A_3 \in d_3 : \text{Si } \ y=0 \rightarrow \quad A_3 : (1;0;2)$

$B_3 \in d_3 : \text{Si } \ y=1 \rightarrow \quad B_3 : (1;2;0)$

Ce qui permet de définir un vecteur directeur de d_3 : $\overrightarrow{V_3} : (0;-2;2)$

Le plan α a donc pour équation :

$$\begin{cases} x-1 = 2k+0h \\ y-0 = -k-2h \\ z+1 = 3k+2h \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1 = 2k \\ y = -k-2h \\ z+1 = 3k+2h \end{cases}$$

Ou bien : $\boxed{x-y-z-2=0}$

b) En utilisant la même méthode :

$A_2 \in d_2 \quad \rightarrow A_2 : (0;-1;2)$

$B_2 \in d_2 \quad \rightarrow B_2 : (3;1;5)$

$\overrightarrow{V_2} : (3;1;5)$

Le plan β *a* donc pour équation :

$$\begin{cases} x-0 = 3k+0h \\ y+1 = k-2h \\ z-2 = 5k+2h \end{cases}$$

Ou bien : $\boxed{2x-y-z+1=0}$

c) L'équation de la droite d est simplement :

$$\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ 2x-y-z+1=0 \end{cases} \text{ ou bien } \boxed{\begin{cases} x=-3 \\ y=5-\lambda \\ z=\lambda \end{cases}}$$

Modifié le 3 mars (Hugues Vermeiren)

EXGAE012 – FACSA, Ulg, Liège, septembre 2001.

a) Quelles sont lescoordonnées du pied Q de la perpendiculaire abaissée du point

$$P(\alpha, \alpha+1, \alpha-1)$$

sur le plan π d'équation

$$2x+\alpha y+\alpha z+\alpha^3+4=0$$

a) Montrer que ces pieds, lorsque a parcourt $\mathbb{R}$, sont tous situés sur une même droite d, dont on déterminera des équations.

$a)$ Soit un vecteur $\perp$ à $\pi : (2, \alpha, \alpha)$

Les équations de la perpendiculaire à π passant par P sont :

$$\begin{cases} x-\alpha = 2h \\ y-\alpha-1=\alpha h \\ z-\alpha+1=\alpha h \end{cases}$$

Les coordonnées du pied Q sont données par la valeur de h qui satisfait l'équation du plan :

$$2(2h+\alpha)+\alpha(\alpha h+\alpha+1)+\alpha(\alpha h+\alpha-1)+\alpha^3+4=0$$

$$\rightarrow h=-\frac{\alpha+2}{2} \text{ et donc}$$

$$\boxed{Q:\left(-2, \frac{2-\alpha^2}{2}, -\frac{2+\alpha^2}{2}\right)}$$

$b)$ Eliminons α :

$$\begin{cases} x=2 \\ y=\dfrac{2-\alpha^2}{2} \\ z=-\dfrac{2+\alpha^2}{2} \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} x=2 \\ y-z=-2 \end{cases}}$$ qui est l'équation d'une droite.

EXGAE013 – FSA, ULB, Bruxelles, juillet 2000.

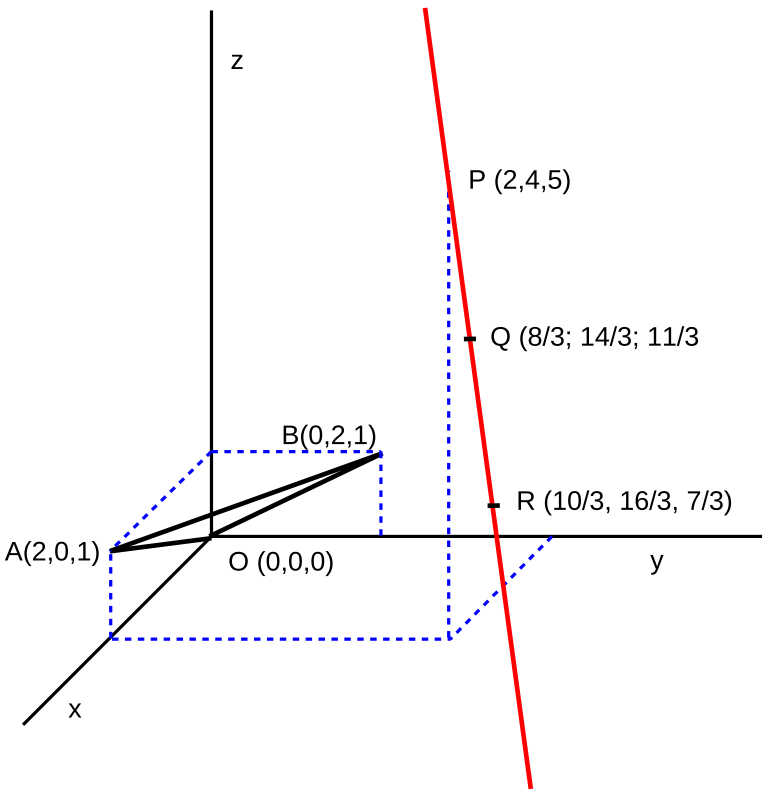
Dans l'espace euclidien muni d'un repère orthonormé, on donne le $P(2,4,5)$et le plan α comprenant les points $O(0,0,0)$, $A(2,0,1)$ et $B(0,2,1)$.

a) Former une équation cartésienne du plan α;

b) Former des équations paramétriques de la droite p comprenant P et perpendiculaire au plan α;

c) Déterminer les coordonnées du point de percée Q de p dans le plan α;

d) Déterminer lescoordonnées du point R, symétrique de P par rapport à α.



$a)\ P(2,4,5)\quad O(0,0,0)\quad A(2,0,1)\quad B(0,2,1)$

$\rightarrow \overrightarrow{OA}:(2,0,1)$ et $\overrightarrow{OB}:(0,2,1)$

Méthode 1 $\alpha \equiv \begin{cases} x = 2r \\ y = 2s \\ z = r+s \end{cases} \rightarrow\ x+y-2z=0$

Méthode 2 $\alpha \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = x+y-2z=0$

Méthode 3 Vecteur normale : $\vec{n} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{1_x} & \overrightarrow{1_y} & \overrightarrow{1_z} \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (1,1,-2)$

Le plan passe par l'origine : $\alpha \equiv x+y-2z=0$

$b)\ p \equiv \begin{cases} x = 2+r \\ y = 4+r \\ z = 5-2r \end{cases}$

$c)$ Point de percée Q de p dans α :

r satisfait à l'équation du plan $\rightarrow 2+r+4+r-2(5-2r)=0 \ \rightarrow\ r=\frac{2}{3}$

$\rightarrow\ Q:\left(\frac{8}{3},\frac{14}{3},\frac{11}{3}\right)$

$d)$ Q est le milieu de PR $\rightarrow$

$$\begin{cases} \frac{8}{3} = \frac{2+x}{2} \\ \frac{14}{3} = \frac{4+y}{2} \\ \frac{11}{3} = \frac{5+z}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{10}{3} \\ y = \frac{16}{3} \\ z = \frac{7}{3} \end{cases} \rightarrow\ R:\left(\frac{10}{3},\frac{16}{3},\frac{7}{3}\right)$$

Vérifions que les distances PQ et QR sont égales :

$$|PQ|^2 = \left(2-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(4-\frac{14}{3}\right)^2 + \left(5-\frac{11}{3}\right)^2 = 2.667$$

$$|QR|^2 = \left(\frac{10}{3}-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{16}{3}-\frac{14}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}-\frac{11}{3}\right)^2 = 2.667$$

EXGAE014 – FSA, ULB, Bruxelles, septembre 2000.

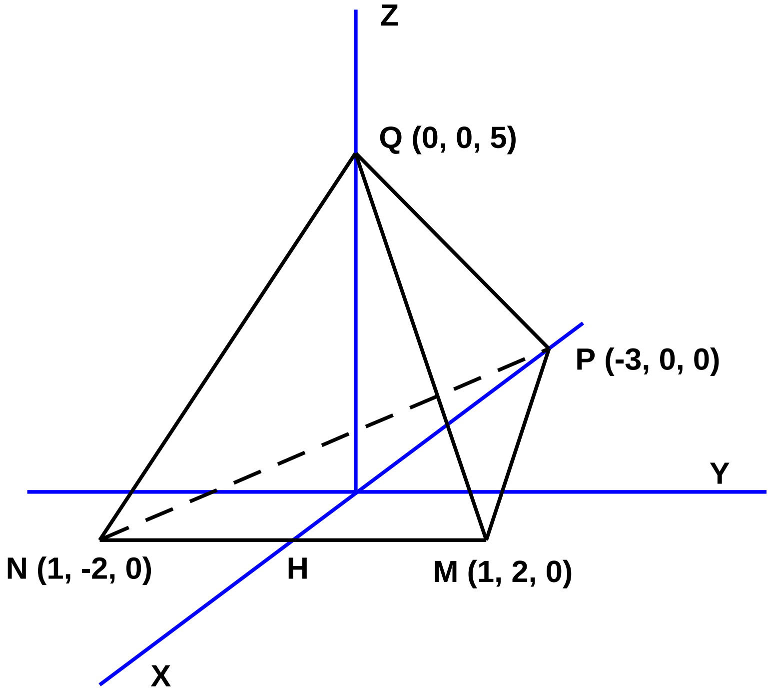
Dans l’espace euclidien muni d’un repère orthonormé d’origine O et d’axes X, Y et Z, on donne les points $M(1,2,0)$, $N(1,-2,0)$, $P(-3,0,0)$et $Q(0,0,5)$.
On demande.

a) Une équation cartésienne des plans MNP et MPQ.

b) Des équations cartésiennes des droites NP et MQ, ainsi que la mesure de l’angle entre ces droites.

c) Des équations de la perpendiculaire p, menée par N au plan MPQ.

d) Les coordonnées du point d’intersection R, de p avec le plan MPQ.



$a)$ Plan $MNP \equiv \boxed{z=0}$

$$\text{Plan } MPQ \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{5x-10y-3z+15=0}$$

$b)$ Vecteur directeur : $\overrightarrow{u_{NP}} : (-4, 2, 0) = (-2, 1, 0)$

$$\text{Droite } MP \equiv \boxed{\begin{cases} x=-3-2r \\ y=r \\ z=0 \end{cases}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x+2y+3=z=0}$$

Vecteur directeur : $\overrightarrow{u_{MQ}} : (-1, -2, 5)$

$$\text{Droite } MQ \equiv \boxed{\begin{cases} x=-r \\ y=-2r \\ z=+5+r \end{cases}} \quad \text{ou} \quad \boxed{2x-y=5x+z-5=0}$$

Angles entre NP et MQ : $\cos\alpha = \dfrac{-2.(-1)+1(-2)+0.5}{\sqrt{2^2+1^2+0^2}\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+5}} = 0$

$\rightarrow$ $\boxed{\alpha = 90°}$ NP et MQ sont donc orthogonales.

$c)$ Vecteur normal au plan MPQ : $\vec{n} : (5, -10, -3)$

$$\rightarrow \text{Perpendiculaire } p \equiv \boxed{\begin{cases} x=1+5r \\ y=-2-10r \\ z=-3r \end{cases}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\begin{cases} 3x+5z-3=0 \\ 3y-10z+6=0 \end{cases}}$$

$d)$ Coordonnées de R :

$$\begin{cases} 5x & -10y & -3z & = & -15 \\ 3x & & +5z & = & 3 \\ & 3y & -10z & = & -6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{33}{67} \\ y = \dfrac{66}{67} \\ z = \dfrac{60}{67} \end{cases} \rightarrow \boxed{R : \left(-\dfrac{33}{67}, \dfrac{66}{67}, \dfrac{60}{67}\right)}$$

d) Volume du tétraèdre

<u>Première méthode</u>

On voit sur la figure que : $NM = 4, \quad HP = 4, \; OQ = 5$

Base : $B = \dfrac{4 \times 4}{2} = 8$

Volume : $V = \dfrac{Bh}{3} = \dfrac{5 \times 8}{3} = \boxed{\dfrac{40}{3}}$

<u>Deuxième méthode</u>

Le volume d'un tétraèdre dont on connait les coordonnées des sommets est donné par la valeur absolue de :

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \boxed{\frac{40}{3}}$$

EXGAE015 – FSA, ULB, Bruxelles, juillet 2001.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X, Y et Z.
On donne les points fixes M, N, P et U, de coordonnées respectives $(\alpha,0,0)$, $(0,\beta,0)$, $(0,0,\gamma)$ et (α,β,γ) (α, β et γ non nuls).
On nomme a la droite passant par les points O et U et b celle qui passe par N et P.
On demande :

a) De déterminer une équation cartésienne du plan parallèle à b contenant a.
b) De déterminer une équation cartésienne du plan parallèle à a contenant b.
c) De montrer que la droite c qui joint M au milieu de NP possède un point commun avec la droite a et de déterminer les coordonnées de ce point.
d) De déterminer les conditions sur α, β et γ pour que c soit perpendiculaire aux droites a et b.
e) De déterminer, dans les conditions trouvées au d), l'angle des droites a et b ainsi que la distance qui les sépare.

$M:(\alpha,0,0)\quad N:(0,\beta,0)\quad P:(0,0,\gamma)\quad U:(\alpha,\beta,\gamma)$

$a\equiv OU \to \overrightarrow{u_a}:(\alpha,\beta,\gamma)\qquad b\equiv NP \to \overrightarrow{u_p}:(0,-\beta,\gamma)$

$$a)\ a\equiv\begin{cases}x=\alpha r\\ y=\beta r\\ z=\gamma r\end{cases}\qquad b\equiv\begin{cases}x=0\\ y=\beta-\beta s\\ z=\gamma s\end{cases}$$

Plan π_1 parallèle à b et contenant a : (ce plan passe par O)

$$\pi_1\equiv\begin{vmatrix}x & y & z\\ \alpha & \beta & \gamma\\ 0 & -\beta & y\end{vmatrix}=2\beta\gamma x-\alpha\gamma y-\alpha\beta z=0$$

$b)$ Plan π_2 parallèle à a et contenant b : (ce plan passe par N)

$$\pi_2\equiv\begin{vmatrix}x & y-\beta & z\\ \alpha & \beta & \gamma\\ 0 & -\beta & y\end{vmatrix}=2\beta\gamma x-\alpha\gamma y-\alpha\beta z+\alpha\beta\gamma=0$$

$c)$ Soit F le milieu de NP : $F\left(0,\dfrac{\beta}{2},\dfrac{\gamma}{2}\right)$

Vecteur directeur de la droite $c\equiv FM$: $\vec{u}_c:\left(-\alpha,\dfrac{\beta}{2},\dfrac{\gamma}{2}\right)\ \to\ c\equiv\begin{cases}x=\alpha-\alpha t\\ y=\dfrac{\beta}{2}t\\ z=\dfrac{\gamma}{2}t\end{cases}$

Si a et c sont sécantes, le système suivant admet une solution :

$$\begin{cases}\alpha r=\alpha-\alpha t\\ \beta r=\dfrac{\beta}{2}t\\ \gamma r=\dfrac{\gamma}{2}t\end{cases}\quad\to\quad\begin{cases}r=\dfrac{1}{3}\\ t=\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

Coordonnée du point $A=a\cap c:\left(\dfrac{\alpha}{3},\dfrac{\beta}{3},\dfrac{\gamma}{3}\right)$

$d)$ Droite $c\perp a$. Il faut que $\vec{u}_c.\vec{u}_a=0\ \to\ -\alpha^2+\dfrac{\beta^2}{2}+\dfrac{\gamma^2}{2}=0\qquad(1)$

Droite $c\perp b$. Il faut que $\vec{u}_c.\vec{u}_b=0\ \to\ -\dfrac{\beta^2}{2}+\dfrac{\gamma^2}{2}=0\qquad(2)$

De (1) et (2), on déduit : $\quad\beta=\pm\gamma\quad$ et $\quad\beta=\pm\alpha$

$e)$ Soit $\boxed{\alpha = \beta = \gamma}$

Angle des droites a et b

$\vec{u}_a = (\beta, \beta, \beta) = (1, 1, 1) \quad \vec{u}_b = (0, -\beta, \beta) = (0, -1, 1)$

$\vec{u}_a \,.\, \vec{u}_b = 0 \times 1 - 1 \times 1 + 1 \times = 0 \quad \rightarrow \quad a$ et b sont perpendiculaires

Distance des droites a et b

Première méthode

Puisque c est perpendiculaire à a et b, la distance est simplement le module de FA

$$F : \left(0, \frac{\beta}{2}, \frac{\beta}{2}\right) \quad A : \left(\frac{\beta}{3}, \frac{\beta}{3}, \frac{\beta}{3}\right)$$

$$\left|\overline{FA}\right| = \sqrt{\left(\frac{\beta}{3}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{3} - \frac{\beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\beta}{3} - \frac{\beta}{2}\right)^2} = \beta \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Deuxième méthode

Cette méthode est générale.

Soit deux droites a et b, de vecteurs directeurs $\vec{u}_a$ et $\vec{u}_b$

On définit le vecteur : $\vec{u}_n = \vec{u}_a \wedge \vec{u}_b$ $\left(\text{Produit vectoriel, } \vec{u}_n \perp \left(\vec{u}_a, \vec{u}_b\right)\right)$

On obtient le vecteur normale unitaire : $\vec{i}_n = \dfrac{\vec{u}_n}{\left|\vec{u}_n\right|}$

Soit A un point quelconque de a, et B un point quelconque de b

La distance est donnée par : $d(a, b) = \left|\vec{i}_n \,.\, \overrightarrow{AB}\right|$

Appliquons ces formules :

$$\vec{u}_a = (1, 1, 1) \quad \vec{u}_b = (0, -1, 1) \quad \rightarrow \quad \vec{u}_n = \vec{u}_a \wedge \vec{u}_b = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, -1)$$

$$\vec{i}_n = \frac{\vec{u}_n}{\left|\vec{u}_n\right|} = \frac{(2, -1, -1)}{\sqrt{6}}$$

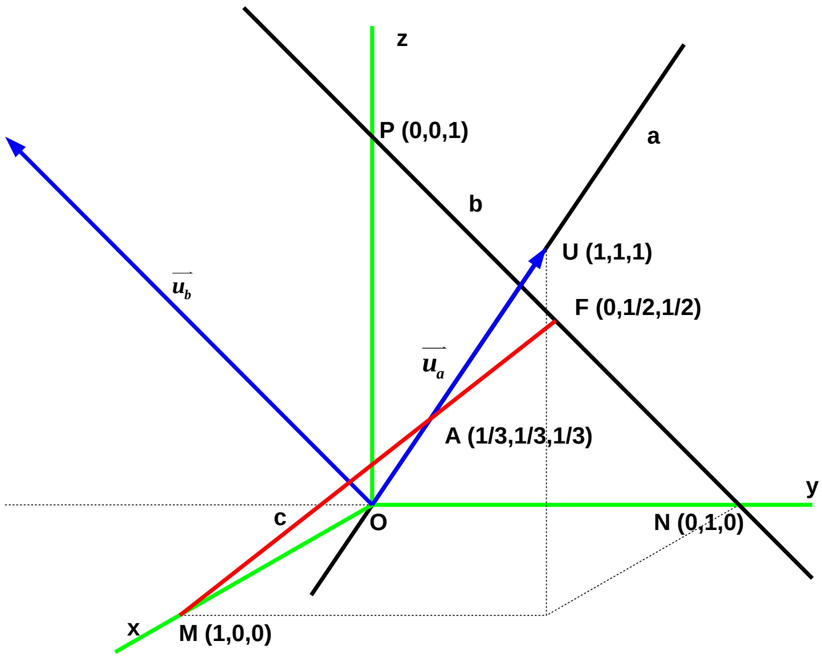
$$O \in a \quad \text{et} \quad N \in b \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{ON} : (0, \beta, 0) \quad \rightarrow \quad d(a, b) = \left|\vec{i}_n \,.\overrightarrow{ON}\right| = \beta \frac{\sqrt{6}}{6}$$

Le tableau suivant reprend tous les cas et utilise la méthode 2.

α	β	$-\beta$	β	$-\beta$
β	β	β	β	β
γ	β	β	$-\beta$	$-\beta$
$\vec{u}_a$	$(1,1,1)$	$(-1,1,1)$	$(1,1,-1)$	$(-1,1,-1)$
$\vec{u}_b$	$(0,-1,1)$	$(0,-1,1)$	$(0,-1,-1)$	$(0,-1,-1)$
$\vec{u}_a.\vec{u}_b$	0	0	0	0
Angle	$90°$	$90°$	$90°$	$90°$
$\vec{u}_n = \vec{u}_a \wedge \vec{u}_b$	$(2,-1,-1)$	$(2,1,1)$	$(-2,1,-1)$	$(-2,-1,1)$
$\vec{i}_n = \frac{\vec{u}_n}{\lvert\vec{u}_n\rvert}$	$\frac{(2,-1,-1)}{\sqrt{6}}$	$\frac{(2,1,1)}{\sqrt{6}}$	$\frac{(-2,1,-1)}{\sqrt{6}}$	$\frac{(-2,-1,1)}{\sqrt{6}}$
$\overrightarrow{ON}$	$(0,\beta,0)$	$(0,\beta,0)$	$(0,\beta,0)$	$(0,\beta,0)$
$d(a,b)$	$\beta\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\beta\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\beta\frac{\sqrt{6}}{6}$	$\beta\frac{\sqrt{6}}{6}$

Les droites a et b sont donc toujours perpendiculaires et distantes de $\beta\frac{\sqrt{6}}{6}$

le dessin suivant illustre le cas : $\beta = 1$



EXGAE016 – FSA, ULB, Bruxelles, septembre 2001.

L'espace est muni d'un repère orthonormé d'origine O et d'axes X, Y et Z.
On donne les points fixes M, N, et U, de coordonnées respectives $(0,b,c)$, $(a',0,c')$, $(1,1,0)$ (b, c, a' et c' sont non nuls).
On demande :

a) De déterminer des équations de la droite m parallèle à OX et contenant M;

a) De déterminer des équations de la droite n parallèle à OY et contenant N;

a) De déterminer des équations de la droite p passant par O et U;

a) De déterminer une équation cartésienne des plans passant par un point P, mobile sur la droite p, et contenant la droite m;

a) De déterminer, une équation cartésienne des plans passant par le point P, considéré ci-dessus et contenant la droite n;

a) De montrer qu'il existe un plan passant par l'origine et qui est parallèle aux plans; déterminés en d) et e), pour toutes les positions de ceux-ci.

$M:(0,b,c) \quad N:(a',0,c') \quad U:(1,1,0)$

$$a)\ m \equiv \begin{cases} x = r \\ y = b \\ z = c \end{cases} \qquad b)\ n \equiv \begin{cases} x = a' \\ y = b \\ z = c' \end{cases} \qquad c)\ p \equiv \begin{cases} x = r \\ y = r \\ z = 0 \end{cases}$$

$d)$ Soit $P:(\alpha, \alpha, 0)$ et deux autres points de la droite m: $M:(0,b,c), M'(1,b,c)$

Les plans sont donnés par :

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & b & c & 1 \\ 1 & b & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ 0 & b & c & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = -cy + (b-\alpha)z + \alpha c = 0$$

$e)$ Soit $N'(a', 1, c') \in n$

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ a' & 0 & c' & 1 \\ a' & 1 & c' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ \alpha & \alpha & 0 & 1 \\ a' & 0 & c' & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x & z & 1 \\ \alpha & 0 & 1 \\ a' & c' & 1 \end{vmatrix} = c'x + (\alpha - a')z - \alpha c' = 0$$

$$f)\ \text{Soit}: \begin{cases} \pi_1 \equiv -cy + (b-\alpha)z + \alpha c = 0 & \text{plan // à } OX \\ \pi_2 \equiv c'x + (\alpha - a')z - \alpha c' = 0 & \text{plan // à } OY \end{cases}$$

Quelque soit la valeur de α, tout plan contenant OX sera parallèle à π_1
et tout plan contenant OY sera parallèle à π_2

EXGAE017 – FSA, ULB, Bruxelles, juillet 2002.

Dans le trièdre trirectangle $OXYZ$, on donne les points A, B et C de coordonnées respectives $(5,0,0),(0,4,0)$ et $(0,0,3)$.

On demande :

a) Une équation cartésienne du plan ABC

a) Les coordonnées du point A, symétrique de l'origine O par rapport au plan ABC.

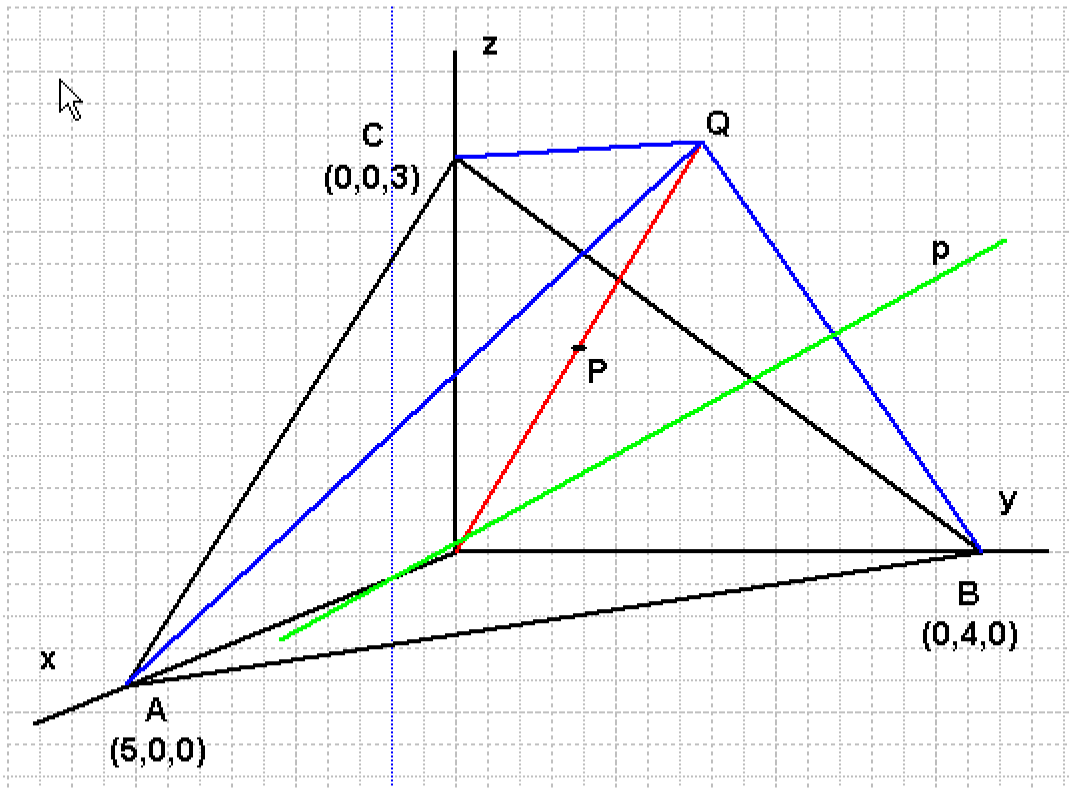
a) Des équations cartésiennes de la droite OQ.

a) Des équations cartésiennes de la perpendiculaire commune à AO et QB.

a) La mesure de l'angle formé par les droites AO et QB.

a) La distance entre AO et QB

a) Le volume du polyèdre (hexaèdre) des sommets $OABCQ$.



$A:(5,0,0) \qquad B:(0,4,0) \qquad C:(0,0,3)$

$a)\ \dfrac{x}{5}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{3}=1$

$b)$ Vecteur normal au plan ABC : $\vec{n}_{ABC}:\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right)$

$$\rightarrow\ OQ\equiv\begin{cases} x=\dfrac{r}{5} \\ y=\dfrac{r}{4} \\ z=\dfrac{r}{3}\end{cases}$$

Point de percée P dans le plan ABC : $\dfrac{r}{25}+\dfrac{r}{16}+\dfrac{r}{9}=1 \quad \Rightarrow \quad r=4.6814$

$\Rightarrow\ P:(0.9363;1.1704;1.5605)$

P est le milieu de $OQ \quad \Rightarrow \quad Q:(1.8726;\ 2.3408;\ 3.1210)$

$$c)\ OQ\equiv\begin{cases} x=\dfrac{r}{5} \\ y=\dfrac{r}{4} \\ z=\dfrac{r}{3}\end{cases} \quad \Rightarrow \quad 5x=4y=3z$$

$d)\ \overrightarrow{AO}:(5,0,0) \qquad \overrightarrow{QB}:(1.8726;-1.6592;3.1210)$

Vecteur perpendiculaire à $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{QB}$

$$\vec{n}=\overrightarrow{AO}\wedge\overrightarrow{QB}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 1.8726 & -1.6592 & 3.1210\end{vmatrix}=(0;-15.6050;-8.2950)=(0;1.881;1)$$

La perpendiculaire commune p à AO et QB est déterminée par

1) Le plan π_1 contenant AO et parallèle à $\vec{n}$ $\qquad \pi_1\equiv y-1.881z=0$

2) Le plan π_2 contenant QB et parallèle à $\vec{n}$

$$\pi_2\equiv\begin{vmatrix} x & y-4 & z \\ 0 & 1.881 & 1 \\ 1.8726 & -1.6592 & 3.121\end{vmatrix}=x+0.2487y-0.4677z-0.9948=0$$

$$\rightarrow\ p\equiv\begin{cases} y-1.881z=0 \\ x+0.2487y-0.4677z=0.9948\end{cases}$$

$e)\ \theta = \arccos \dfrac{5\times 1.8726}{5\times\sqrt{1.8726^2+1.6592^2+3.121^2}} = 62.09°$

$f)\ \vec{n}:(0;1.881;1) \Rightarrow$ Vecteur unitaire normale : $\vec{i}_n = \dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = (0;\,0.883;\,-0.4694)$

$\Rightarrow d(AO, QB) = \overrightarrow{OB}.\vec{i}_n = 4\times 0.883 = 3.532$

$g)$ Volume $OABCQ$ = Volume tétraèdre $OABC$ + Volume tétraédre $ABCQ$

$= 2\times$ Volume tétraèdre $OABC$

$$= 2\,\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

Ou bien

Base Tétraèdre $OABC : B = \dfrac{AO.OB}{2} = \dfrac{5\times 4}{2} = 10$

Hauteur : $OC = 3$

Volume tétraèdre : $V_T = \dfrac{10\times 3}{3} = 10$

Volume héxaèdre : $V_H = 2V_T = 20$

EXGAE018– FSA, ULB, Bruxelles, septembre 2002.

Dans le trièdre trirectangle $OXYZ$, on donne le plan γ d'équation $2X+Y=2$ ainsi que les points A et C de coordonnées $(3,0,0)$ et $(0,0,2)$.

On demande :

a) Une équation cartésienne du plan π parallèle à OY et contenant AC;

b) Le volume du solide contenu entre les plans de coordonnés et les plans γ et π;

c) Des équations cartésiennes de la droite d, intersection des plans γ et π;

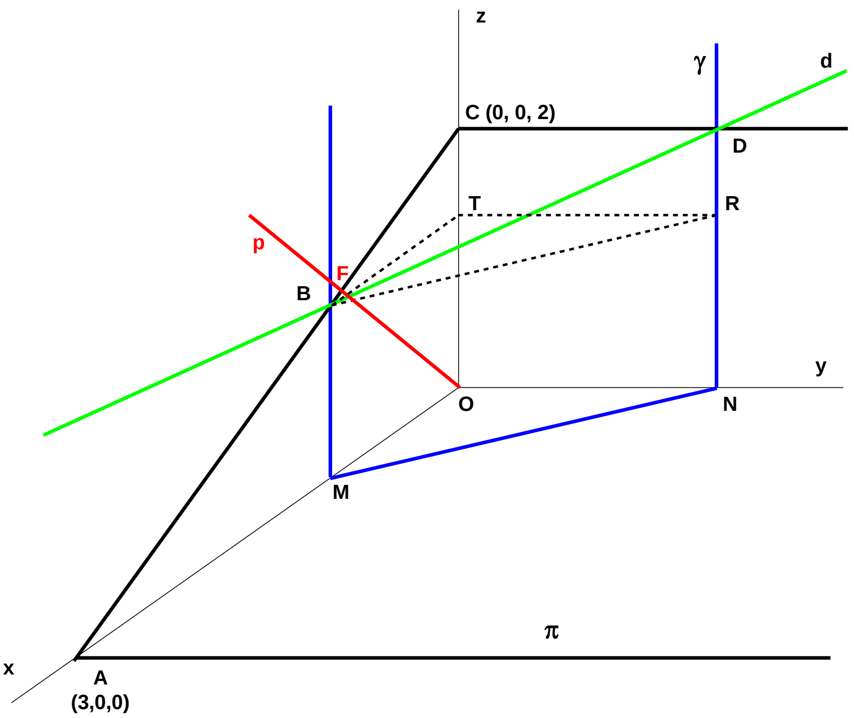
d) Des équations cartésiennes de la droite p, issue de l'origine et perpendiculaire à π;

e) Les coordonnées du point F, intersection de p et π;

f) Des équations cartésiennes de la droite g, issue de l'origine et perpendiculaire à d;

g) La distance qui sépare F de l'intersection de g et d;

h) La mesure de l'angle formé par les droites p et g.



$a)\ A:(3,0,0) \quad C:(0,0,2) \quad \rightarrow \quad \vec{u}_{AC}:(-3,0,2)$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2y+3z-6=0$$

$b)\ B:\left(1,0,\frac{4}{3}\right) \quad D:(0,2,2)$

Aire OMN : $A_{OMN} = \frac{2\times 1}{2} = 1$

Volume prisme $BTROMN$: $V_{BTROMN} = 1\times\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

Volume pyramide $CDRIB$: $V_{CDRIB} = \frac{1}{3}\times 1\times 2\times\left(2-\frac{4}{3}\right) = \frac{4}{9}$

Volume $BCDNMO$: $V = \frac{4}{3}+\frac{4}{9} = \frac{16}{9}$

$$c)\ d \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

$d)$ Vecteur normale à π: $\overrightarrow{n_\pi}:(2,0,3) \rightarrow p \equiv \begin{cases} x=2r \\ y=0 \\ z=3r \end{cases} \rightarrow \ p \equiv y = 3x-2z=0$

$e)$ Dans la face OXZ : $\begin{cases} 3x-2z=0 \\ 2x+3z=6 \end{cases} \rightarrow \ F:(0.923;0;1.385)$

$f)\ B:\left(1,0,\frac{4}{3}\right) \quad D:(0,2,2) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{u_d}:(-3,6,2)$

Plan $\perp$ à d et passant par l'origine : $-3x+6y+2z=0$

Plan contenant d et passant par l'origine :

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & \frac{4}{3} \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4x+3y-3z=0$$

$$\rightarrow \quad g \equiv \begin{cases} -3x+6y+2z=0 \\ 4x+3y-3z=0 \end{cases}$$

g) Calculons les coordonnées de $K = d \cap g$

$$g \equiv \begin{cases} -3x+6y+2z=0 \\ 4x+3y-3z=0 \end{cases} \qquad \rightarrow \quad K:(0.9795;\, 0.0408;\, 1.3469)$$

$$d \equiv \begin{cases} 2x+y=2 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$$

$$d(F,K)=\sqrt{(0.9795-0.923)^2+0.0408^2+(1.3469-1.385)^2}=0.0794$$

h) $\vec{u}_p:(0.923;\, 0;\, 1.385) \quad \vec{u}_g:(0.9795;\, 0.0408;\, 1.3469)$

$$\theta = arc\cos\left(\frac{0.923\times 0.9795+0\times 0.0408+1.385\times 1.3469}{\sqrt{0.923^2+1.385^2}\sqrt{0.9795^2+0.0408^2+1.3469^2}}\right)=2.28°$$

EXGAE019– Louvain, juillet 1999, série 1.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à unrepère orthonormé $OXYZ$, on considère un cercle de rayon R appartenant au plan OXY et centré à l'origine, ainsi qu'un point A sur OZ, de coordonnées $(0,0,a)$. L'ensemble définit un cône circulaire droit.

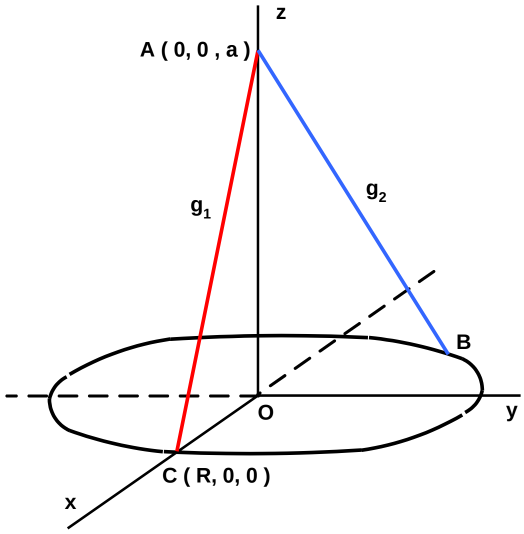
Soit g_1 la génératrice joignant A au point $(R,0,0)$.

On cherche à déterminer une génératrice g_2 perpendiculaire à g_1.

a) Déterminer la coordonnée x_B du point B où g_2 doit rencontrer le cercle.

b) Quelle est la relation entre a et R telle que l'opération soit possible ?

c) Que devient x_B si $a = R$?



a) Equation du cercle : $x^2 + y^2 = R^2$

Paramètres directeurs de $g_1 : (R,0,-a)$

g_2 est situé dans le plan perpendiculaire à g_1

$\rightarrow$ Plan perpendiculaire à g_1 et passant par $A: Rx - az + a^2 = 0$

Ce plan coupe le plan Oxy selon la droite : $d \equiv Rx = -a^2$ (dans le plan $z = 0$)

$\rightarrow$ La coordonnée $x_B = -\dfrac{a^2}{R}$

b) Intersection du cercle et de la droite d : $\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ Rx = -a^2 \end{cases} \rightarrow R^2 y^2 = R^4 - a^4$

Cette équation à une solution si : $R^4 \geq a^4 \rightarrow -a \leq R \leq a$

$c)$ Si $a = R \rightarrow$ la droite d est tangente au cercle et le point B est sur l'axe Ox

---