Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 10

EXGAE100 – EXGAE109

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Mai 10

EXGAE100 – ERM, 2007, série 3.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points
$O(0,0,0)$, $A(2,2,4)$, $B(4,4,2)$, $C(3,1,5)$

On demande :

(1) de déterminer l'équation cartésienne des sphères passant par les points $O, A,$ et B et de rayon $=3\sqrt{3}$;

(2) de déterminer les coordonnées du centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle OAB;

(3) de déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC.

---

(1) Soit le centre de la sphère $D(\alpha,\beta,\gamma)$. Exprimons que D est situé à une distance $3\sqrt{3}$ de O, A et B :

$$\begin{cases} |OD|^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 27 & (1) \\ |AD|^2 = (\alpha-2)^2+(\beta-2)^2+(\gamma-4)^2 = 27 & (2) \\ |BD|^2 = (\alpha-4)^2+(\beta-4)^2+(\gamma-2)^2 = 27 & (3) \end{cases}$$

A partir de (1) et (2), nous obtenons le plan médiateur de OA :

$$\cancel{\alpha^2}-4\alpha+4+\cancel{\beta^2}-4\beta+4+\cancel{\gamma^2}-8\gamma+16=\cancel{27} \Rightarrow \pi_1 \equiv \alpha+\beta+2\gamma=6$$

A partir de (1) et (3), nous obtenons le plan médiateur de OB :

$$\cancel{\alpha^2}-8\alpha+16+\cancel{\beta^2}-8\beta+16+\cancel{\gamma^2}-4\gamma+4=\cancel{27} \Rightarrow \pi_2 \equiv 2\alpha+2\beta+\gamma=9$$

Soit la droite $d \equiv \pi_1 \cap \pi_2 : \begin{cases} \alpha+\beta+2\gamma=6 \\ 2\alpha+2\beta+\gamma=9 \end{cases} \Rightarrow d \equiv \begin{cases} \alpha+\beta=4 & (4) \\ \gamma=1 & (5) \end{cases}$

Injectons (4) et (5) dans (1) : $\alpha^2+(4-\alpha)^2=26 \Rightarrow \alpha^2-4\alpha-5=0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1=5 \to \beta=-1 \to D_1(5,-1,1) \\ \alpha_2=-1 \to \beta=5 \to D_2(-1,5,1) \end{cases}$$

Il y a donc deux sphères : $\boxed{\begin{matrix} S_1 \equiv (x-5)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=27 \\ S_2 \equiv (x+1)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=27 \end{matrix}}$

(2) Le Q centre du cercle circonscrit du cercle à OAB est le milieu de $D_1D_2 \Rightarrow \boxed{Q(2,2,1)}$

(3) Le centre de gravité G du triangle ABC :

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)=\boxed{\left(3,\frac{7}{3},\frac{11}{3}\right)}$$

Le 22 avril 2011

EXGAE101 – ERM, 2009, série 1.

Dans d'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points
$A(1,2,1)$, $B(2,3,2)$, $C(-1,1,-1)$ et $D(4,1,0)$.
On demande:

(a) de déterminer l'équation cartésienne du plan α qui passe par les points A, B et C;

(b) de déterminer les coordonnées du pied de la perpendiculaire issue de D sur α.

$$(a)\ \alpha = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 2-1 & 3-2 & 2-1 \\ -1-1 & 1-1 & -1-1 \end{vmatrix} = -2x+2z+2=0$$

$$(b)\ \overrightarrow{n_\alpha} = (-1,0,1) \Rightarrow d \equiv \begin{cases} x = 4-\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{cases}$$

$$P = \alpha \cap d = -2(4-\lambda)+2\lambda+2=0 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{P = \left(\frac{5}{2},1,\frac{3}{2}\right)}$$

<u>Autre méthode</u> :

Soit $X\ (1,0,0)$ un point du plan α. On a :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DP} = \overrightarrow{OD} + \left(\overrightarrow{DX}.\overrightarrow{1_n}\right).\overrightarrow{1_n} \quad \text{avec } \overrightarrow{1_n} = \frac{\overrightarrow{n_\alpha}}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|}$$

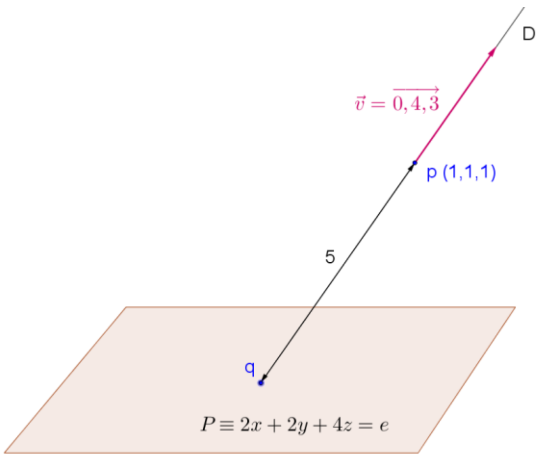
$$= (4,1,0) + \left((-3,-1,0).\frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}}\right).\frac{(-1,0,1)}{\sqrt{2}} = (4,1,0) - \frac{3}{2}(-1,0,1) = \left(\frac{5}{2},1,\frac{3}{2}\right)$$

Le 13 juillet 2010.

EXGAE102 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2011.

Soit le plan P d'équation cartésienne $2x+2y+4z=e$. Soit la droite D passant par le point p de coordonnées $(x,y,z)=(1,1,1)$ et parallèle au vecteur $v=(0,4,3)$.
Soit q le point de percée de D dans P. Trouvez e pour que la distance entre p et q soit égale à 5.

Solution proposée par Nicole Berckmans



<u>1er méthode</u>

$$\left.\begin{array}{l} D \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1+4t \\ z=1+3t \end{cases} \\ P \equiv 2x+2y+4z=e \end{array}\right\} D \cap P \equiv q \Rightarrow t=\frac{e-8}{20} \Rightarrow q=\left(1,1+\frac{e-8}{5},1+\frac{3(e-8)}{20}\right)$$

$$\text{Or } p=(1,1,1) \Rightarrow \left\|\overrightarrow{pq}\right\|=\frac{|e-8|}{5}\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{|e-8|}{4}=5 \Rightarrow |e-8|=20 \Rightarrow \begin{cases} e=28 \\ e=-12 \end{cases}$$

<u>2ème méthode</u>

$\left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{16+9}=5$

1er cas : $\overrightarrow{pq}=\vec{v} \Rightarrow q=p+v=(1,5,4)$

$q \in P$ ssi $2+10+16=e \Rightarrow e=28$

1ème cas : $\overrightarrow{qp}=\vec{v} \Rightarrow q=p-v=(1,-3,-2)$

$q \in P$ ssi $2-6-8=e \Rightarrow e=-12$

<u>3ème méthode</u>

$\overrightarrow{pq}=\lambda\vec{v};\ \left\|\overrightarrow{pq}\right\|=5;$ donc $\lambda=\pm 1$

$q-p=\pm v \Rightarrow \begin{cases} q=p+v \\ q=p-v \end{cases}$ Voir 2ème méthode

---

Le 15 novembre 2011.

EXGAE103 - FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère la droite d_1, passant par les points A et B respectivement de coordonnées $(1,2,3)$ et $(-1,0,2)$, et la droite d_2, passant par les points C, D respectivement de coordonnées $(0,1,7)$ et $(2,0,5)$

(a) Déterminer l'équation cartésienne du plan Π parallèle à la droite d_1 et contenant la droite d_2.

(b) Déterminer la distance entre la droite d_1 et le plan Π.

(c) Déterminer des équations paramètriques et des équations cartésiennes de la droite d_3 passant par C et orthogonale à d_1 et d_2.

(d) Déterminer un point P_1 de d_1 et point P_2 de d_2 tels que le vecteur joignant P_1 à P_2 soit orthogonal à d_1 et à d_2.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

(a) L'énoncé permet de dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, respectivement de composantes $(2,2,1)$ et $(2,-1,-2)$, sont deux vecteurs directeurs du plan Π. Comme ceux-ci ne sont pas parallèles et que le plan contient la droite d_2 (donc en particulier le point $C(0,1,7)$), l'équation cartésienne du plan Π peut être directement obtenue en exprimant l'annulation du déterminant suivant (qui exprime que $P(x,y,z)$ appartient au plan si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{CP}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont linéairement dépendants)

$$det\begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-7 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

On a successivement

$$\begin{aligned} det\begin{pmatrix} x & 2 & 2 \\ y-1 & 2 & -1 \\ z-7 & 1 & -2 \end{pmatrix} &= x(-4+1) - (y-1)(-4-2) \\ &\quad + (z-7)(-2-4) \\ &= -3x+6y-6z-6+42 \\ &= -3\,(x-2y+2z-12). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que l'équation demandée est

$$x-2y+2z=12.$$

(b) La droite d_1 étant parallèle au plan Π, la distance entre cette droite et le plan est égale à la distance entre un point quelconque de la droite et le plan. Choisissons par exemple $B(-1, 0, 2)$ comme point de d_1 pour le calcul. En utilisant le résultat permettant de déterminer directement la distance d'un point à un plan dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on obtient ainsi

$$dist(d_1, \Pi) = dist(B, \Pi) = \frac{|-1-0+2.2-12|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3.$$

(c) La droite d_3 doit être orthogonale à d_1 et à d_2; par définition du plan Π, un vecteur directeur de d_3 est donc fourni par un vecteur normal au plan, à savoir par exemple $\vec{n}(1, -2, 2)$. Cela étant, comme d_3 passe par $C(0, 1, 7)$, des équations paramétriques sont

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 + r1 = r \\ y = 1 + r.(-2) = 1 - 2r, \qquad r \in \mathbb{R} \\ z = 7 + r.2 = 7 + 2r \end{array}\right.$$

et des équations cartésiennes sont

$$\frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-7}{2}.$$

(d) L'énoncé indique que les points P_1 et P_2 sont en fait les intersections, respectivement de d_1, d_2, avec la perpendiculaire commune aux deux droites (d_1 et d_2). Déterminons ces points.

Le point P_1 appartient à la droite d_1; il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de P_1 soient

$$P_1(1 + 2t, 2 + 2t, 3 + t).$$

De même, comme le point P_2 appartient à la droite d_2, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées de P_2 soient

$$P_2(2s, 1 - s, 7 - 2s).$$

Cela étant, pour trouver s et t, il reste à exprimer que le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ est parallèle à $\vec{n}(1, -2, 2)$ (vecteur directeur de d_3).

Avec les notations et les calculs précédents, les composantes du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ sont

$$\begin{aligned} &\Big(2s-1-2t, 1-s-2-2t, 7-2s-3-t\Big) \\ = \quad &\Big(-1+2s-2t, -1-s-2t, 4-2s-t\Big). \end{aligned}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{P_1P_2}$ et $\vec{n}$ sont donc parallèles si et seulement si s et t vérifient le système

$$\frac{-1+2s-2t}{1} = \frac{-1-s-2t}{-2} = \frac{4-2s-t}{2}$$

ou encore

$$\left\{\begin{array}{l} -2+4s-4t = 1+s+2t \\ -2+4s-4t = 4-2s-t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s-2t = 1 \\ 2s-t = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t = 0 \\ s = 1 \end{array}\right.$$

Ils s 'ensuit que les points cherchés sont

$$P_1(1,2,3), \quad P_2(2,0,5).$$

Remarque. On aurait pu alternativement répondre au point (d) de la manière suivante:
D'une part on a $A(1,2,3) \in d_1$, $D(2,0,5) \in d_2$ (par construction); d'autre part $\overrightarrow{AD}$ a pour composantes $(1,-2,2)$ donc est orthogonal à d_1 et à d_2. Il s'ensuit directement que $P_1 = A$ et $P_2 = D$ sont les points cherchés.

EXGAE104 - FACSA, ULG, Liège, septembre 2011.

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère le point P de coordonnées $(1,1,1)$ et la droite d d'équations cartésiennes

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ y + 2z = -3 \end{cases}$$

(a) Montrer que le plan Π d'équation cartésienne : $3x + 2y + z - 6 = 0$ passe par le point P et contient d.

(b) Déterminer l'équation générale des plans orthogonaux à Π qui passent par l'origine du repère.

(c) Parmi les plans évoqués au point précédent, déterminer celui dont l'intersection avec Π est parallèle à la droite d.

(d) Déterminer la distance entre P et d.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

(a) Le point $P(1,1,1)$ appartient au plan car ses coordonnées cartésiennes vérifient l'équation du plan:

$$3 + 2 + 1 - 6 = 0.$$

On a

$$3x + 2y + z - 6 = \frac{3}{2}(2x + y - 5) \ + \ \frac{1}{2}(y + 2z + 3).$$

Il s'ensuit directement que tout point qui appartient à la droite d possède des coordonnées qui vérifient l'équation de Π, donc lui appartient. Ainsi, la droite d est bien incluse dans le plan Π.

(b) Un vecteur normal au plan Π est $\vec{n}(3,2,1)$. Il s'ensuit qu'un plan Π_0 passant par l'origine et orthogonal au plan Π a une équation cartésienne du type

$$ax + by + cz = 0$$

avec $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ (composantes d'un vecteur normal, noté $\vec{n}_0$) et

$$3a + 2b + c = 0,$$

condition exprimant que $\vec{n}_0$ doit être un vecteur orthogonal à $\vec{n}$. La forme générale de l'équation de Π_0 est donc

$$ax + by - (3a + 2b)z = a(x - 3z) + b(y - 2z) = 0,$$

avec $(a,b) \neq (0,0)$ (cette forme indique que les plans dont il est question sont ceux qui forment le faisceau d'axe d_0, droite passant par l'origine et de vecteur directeur $\vec{n}$).

(c) Vu le point précédent, Π_0 a pour vecteur normal

$$\vec{n_0}\ (a, b, -(3a+2b))$$

avec a, b réels non simultanément nuls. Il s'ensuit qu'étant donné Π_0, la droite $\Pi_0 \cap \Pi$ a pour vecteur directeur $\vec{n_0} \wedge \vec{n}$, de composantes

$$(6a+5b, -10a-6b, 2a-3b).$$

Ce vecteur est un vecteur directeur de d si et seulement si ses composantes vérifient le système homogène associé au système d'équations de d, à savoir

$$\begin{cases} 2(6a+5b) - 10a - 6b = 0 \\ -10a - 6b + 2(2a-3b) = 0 \end{cases}.$$

Ce système est équivalent à l'équation

$$a + 2b = 0,$$

dont les solutions non nulles sont les couples $b(-2, 1)$, b réel non nul. Le plan cherché a donc pour équation

$$-2(x-3z) + y - 2z = -2x + y + 4z = 0.$$

(d)

La distance d'un point P à une droite de vecteur directeur $\vec{v}$ passant par A est donnée par l'expression

$$\frac{\left\|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}\right\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Dans la situation présente, on peut prendre $A(1, 3, -3)$ et $\vec{v}(1, -2, 1)$ et on donne $P(1, 1, 1)$. Comme $\overrightarrow{AP} \wedge \vec{v}$ a pour composantes $(6, 4, 2)$, il s'ensuit que la distance cherchée est égale à

$$\sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Remarque. Sans recourir à l'expression explicite ci-dessus, la réponse s'obtient en cherchant la longueur du vecteur joignant P et P_0, P_0 étant la projection orthogonale de P sur d. Le point P_0 est

EXGAE105 - FACS, ULB, Bruxelles, Juillet 2011.

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(0,2,4),(2,0,-2)$ et $(1,-1,3)$.

a) Déterminer l'équation du plan médiateur de $[A,B]$

b) Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale de C sur AB.

c) Déterminer le cosinus de l'angles $\widehat{BAC}$.

d) Déterminer l'aire du triangle ABC.

---

a) $\overrightarrow{AB}=(2,-2,-6) \Rightarrow \overrightarrow{v_{AB}}=(1,-1,-3)$. Milieu M de $[A,B]$: $M=(1,1,1)$

Plan π médiateur de $[A,B]$: $\pi \equiv x-y-3z+d=0$

$M \in \pi \Rightarrow 1-1-3+d=0 \Rightarrow d=3 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv x-y-3z+3=0}$

b) Si C' est la projection de C sur $[A,B]$, alors

$$\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{OA}+\left(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{1_{AB}}\right).\overrightarrow{1_{AB}} \quad \text{avec } \overrightarrow{1_{AB}}=\frac{\overrightarrow{v_{AB}}}{\left|\overrightarrow{v_{AB}}\right|}$$

$$=(0,2,4)+\left((1,-3,-1).\frac{(1,-1,-3)}{\sqrt{11}}\right).\frac{(1,-1,-3)}{\sqrt{11}}=(0,2,4)+\frac{7}{11}(1,-1,-3)=\boxed{\left(\frac{7}{11},\frac{15}{11},\frac{23}{11}\right)}$$

c) $\cos \widehat{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\dfrac{(2,-2,-6)(1,-3,-1)}{\sqrt{44}\sqrt{11}}=\dfrac{7}{11} \Rightarrow \boxed{\widehat{BAC}=50.48°}$

d) $A_{ABC}=\dfrac{1}{2}|AB|.|AC|\cos \widehat{BAC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{44}\times\sqrt{11}\times\dfrac{7}{11}=\boxed{7 \text{ ua}}$

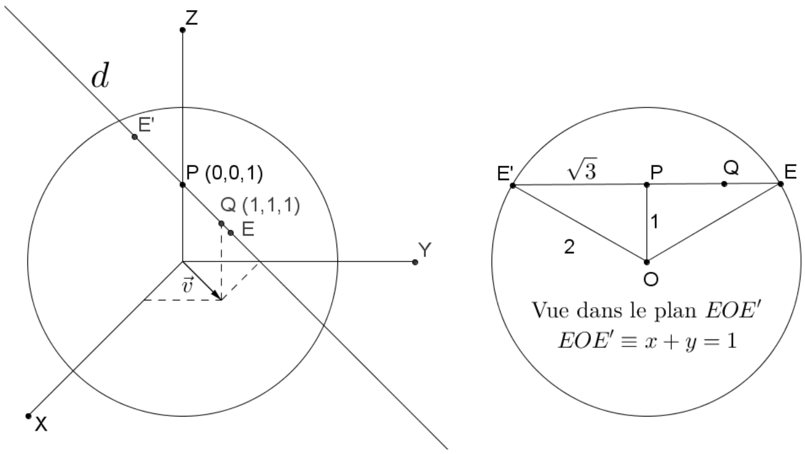
---

12 septembre 2010

EXGAE106 - EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 1.

Une sphère de rayon $R = 2$ est centrée sur l'origine d'un système de coordonnées cartésiennes XYZ. L'on définit la droite d passant par $(x, y, x) = (1,1,1)$ et parallèle au vecteur directeur $v = (1,1,0)$. Quelle la longueur du segment de cette droite qui se trouve à l'intérieur de la sphère?

Solution proposée par Nicole Berckmans



Sphère : $S \equiv x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$$d \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \\ z = 1 \end{cases} \qquad \text{car } P(0,0,1), Q(1,1,1) \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (1,1,0) = \vec{v}$$

$$d \cap S = \begin{cases} E = \left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) \\ E' = \left(+\sqrt{\frac{3}{2}}, +\sqrt{\frac{3}{2}}, 1\right) \end{cases} \Rightarrow \overline{EE'} = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = 2\sqrt{3}$$

Si on considére le plan EOE', il est aussi immédiat que : $\overline{EE'} = 2\sqrt{3}$

---

20 juillet 2012

EXGAE107 - EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 1.

Soit un système de coordonnées XYZ. Dans ce système deux plans sont définis par les équations $x+y+z=3$ et $x-2y+z=6$. Soit d l'intersection entre ces deux plans.
Quelle est (la plus courte) distance qui sépare d de l'origine?

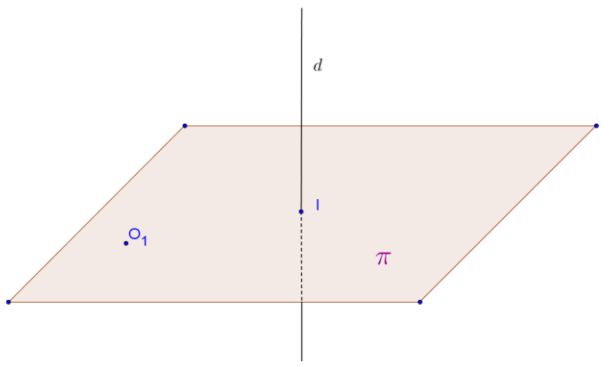
Solution proposée par Nicole Berckmans

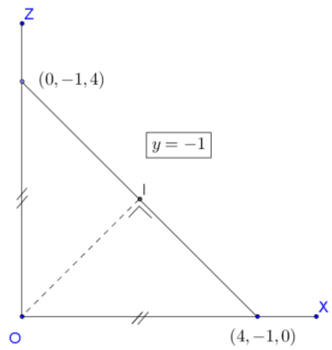
Par O menons le plan π perpendiculaire à d.
Cherchons la direction de d.

- par exemple en chosissant deux points A et B de $d \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{v_d}$
- ou en simplifiant l'écriture de d et en passant à l'équation cartésienne de cette droite

$$d\begin{cases} x+t+z=3 \\ x-2y+z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z=3 \\ 3y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=-1 \\ z=4-\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_d} = (1,0,-1)$$

$\Rightarrow \pi \equiv x-z=0;\ d \cap \pi = I = (2,-1,2) \Rightarrow \overline{OI} = \sqrt{4+1+4} = 3$
Remarque : La trace de d dans le plan $y=-1$ est la droite $x+z=4$
On y retrouve le point I et $\overline{OI} = 3$



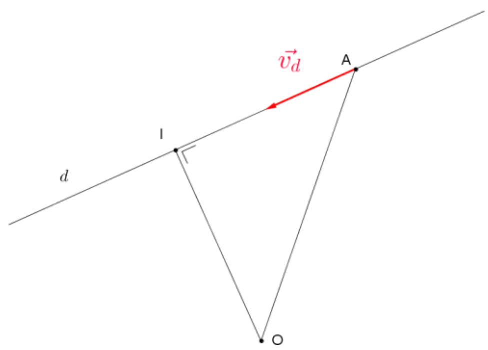


Solution proposée par Jacques COLLOT

Si A est un point quelconque de d et $\overrightarrow{v_d}$ le vecteur directeur de la droite, on peut appliquer le théorème de Pythagore au triangle rectangle IOA

$$\overline{OI} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{IA}^2} = \sqrt{\left\|\overrightarrow{OA}\right\|^2 - \left(\overrightarrow{OA}.\frac{\overrightarrow{v_d}}{\left\|v_d\right\|}\right)^2}$$

Avec $\overrightarrow{v_d} = (1,0,1)$ et $A = (0,1,-4)$, on a : $\overline{OI} = \sqrt{(1+16) - \left(\frac{4}{\sqrt{2}}\right)^2} = 3$



Le 22 aout 2012

EXGAE108 - EPL, UCL, LLN, Septembre 2012.

Soit un plan P de vecteur normal $\overrightarrow{(1,-1,0)}$. on considère, dans ce plan P, un cercle C de centre $(0,0,0)$ et de rayon 2. Soit un autre plan P' de vecteur normal $\overrightarrow{(1,1,0)}$ et passant par le point $(0,1,0)$. Quelles sont les coordonnées des points d'intersection du cercle C avec le plan P'.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_P} : \overrightarrow{(1,-1,0)} \\ P \text{ contient } C : (0,0,0) \in P\end{array}\right\} P \equiv x - y = 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{n_{P'}} : \overrightarrow{(1,1,0)} \\ (0,1,0) \in P'\end{array}\right\} P' \equiv x + y = 1$$

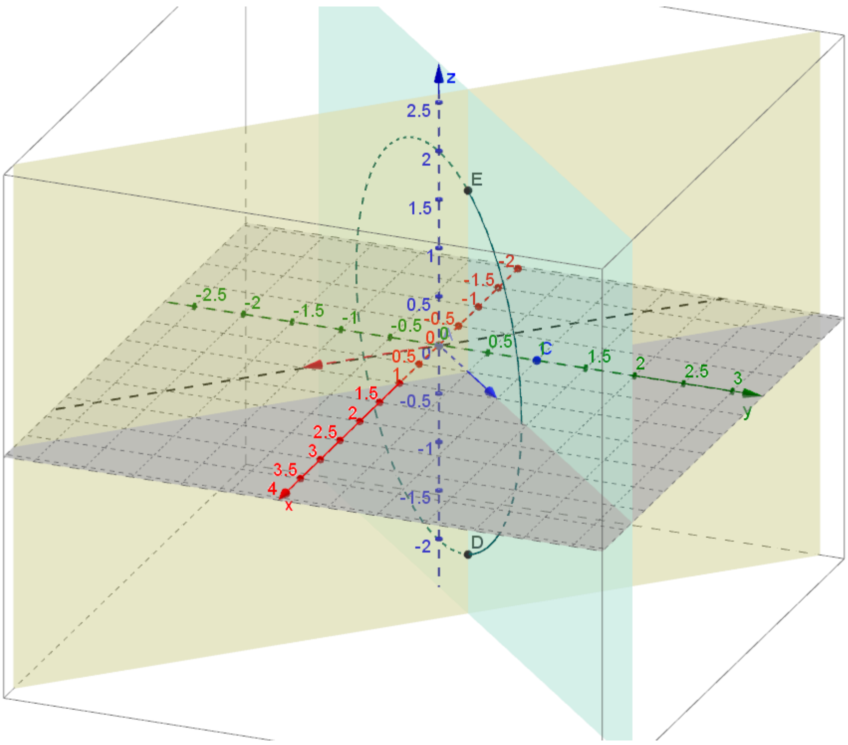
Les points cherchés appartiennent à P et P'.

$$P \cap P' = d \equiv \begin{cases} x = y \\ x + y = 1 \end{cases} \qquad d \equiv \begin{cases} x = 1/2 \\ y = 1/2 \\ z = t \end{cases}$$

On cherchee les 2 pts de d à distance 2 de $(0,0,0)$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + t^2 = 4 \Rightarrow t^2 = \frac{7}{2}$$

Les points cherchés: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$



22 novembre 2012. Modifié le 4 novembre 2013 (Antoine Paris)

EXGAE109 - FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Dans l'espace euclidien rapporté à un trièdre orthonormé $OXYZ$, on donne les points A, B, C et D de coordonnées respectives $(3,0,0),(0,4,0),(0,0,3)$ et $(2,2,p)$.

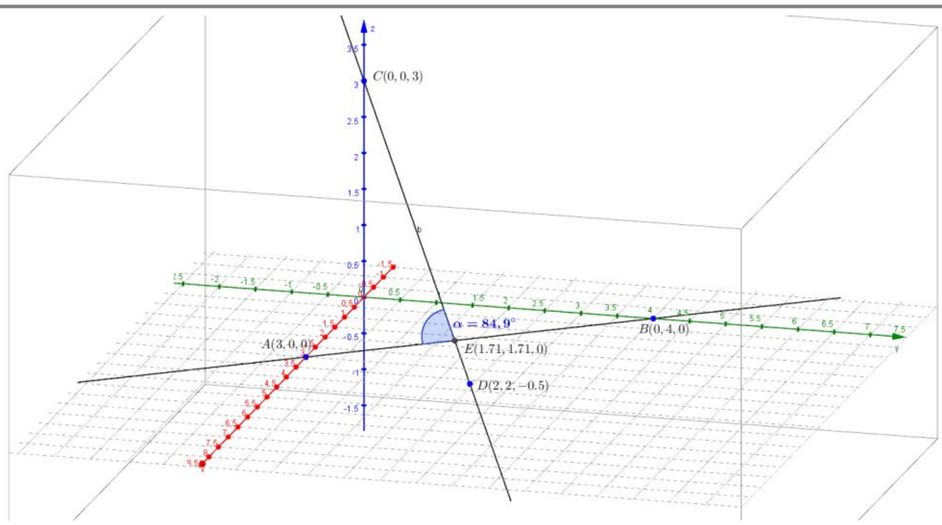
a) Pour quelle valeur de p les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes?

b) Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection?

c) Que vaut l'angle formé par (AB) et (CD) lorsqu'elles se coupent?

d) Que vaut le volume du tétraèdre si $p=3$?

e) Que vaut le rayon de la sphère qui passe par A, B, C et D, si $p=3$?



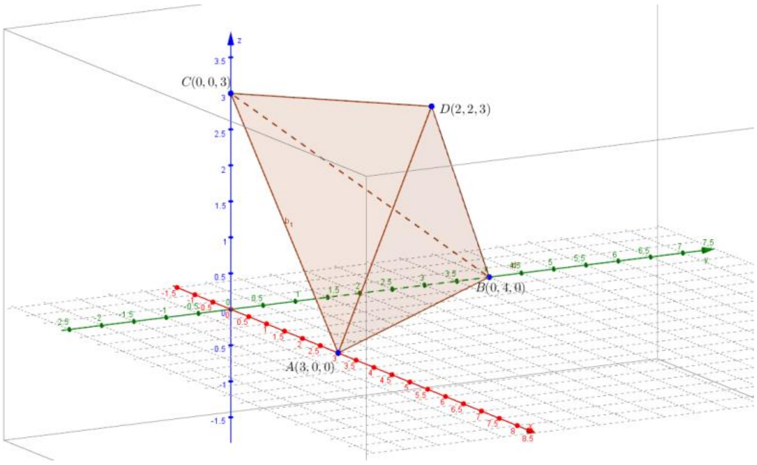
a) $\overrightarrow{AB}(-3,4,0),\ \overrightarrow{CD}(2,2,p-3) \Rightarrow AB \equiv \begin{cases} x=3-3\lambda \\ y=4\lambda \\ z=0 \quad (1) \end{cases}$ et $CD \equiv \begin{cases} x=2\mu \\ y=2\mu \\ z=3+(p-3)\mu \quad (2) \end{cases}$

$E = AB \cap CD \Rightarrow$ De (1) et (2), on tire $\mu = \dfrac{3}{3-p}$

Et donc, on a le système $\begin{cases} 3-3\lambda = 2.\dfrac{3}{3-p} \\ 4\lambda = 2.\dfrac{3}{3-p} \end{cases} \Rightarrow 1-\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{3-p} = \dfrac{2}{3-p} \Rightarrow \boxed{p=-\dfrac{1}{2}}$ et $\begin{cases} \lambda = 3/7 \\ \mu = 6/7 \end{cases}$

b) Finalement : $\boxed{E(12/7, 12/7, 0)}$

c) Angle α formé par (AB) et (CD): $\cos\alpha = \dfrac{|-6+8|}{\sqrt{9+16}\sqrt{4+4+49/4}} = \dfrac{4}{45} \Rightarrow \boxed{\alpha = 84.9°}$

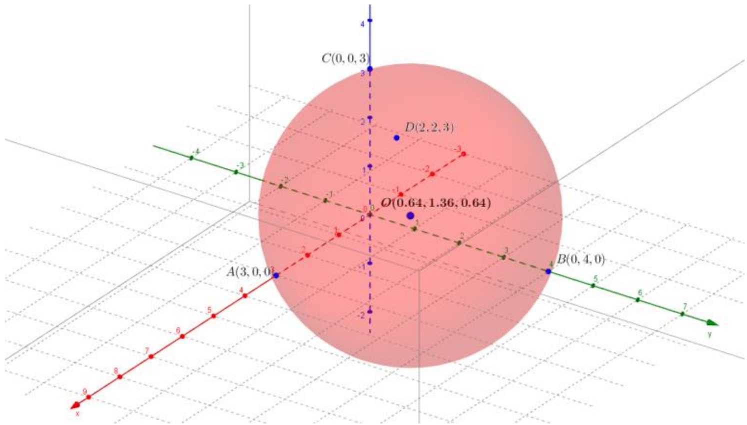


d) Le volume du tétraèdre est le 1/6 du parallèlipipèdee défini par les 3 vecteurs $\overrightarrow{AB}(-3,4,0)$, $\overrightarrow{AC}(-3,0,0)$ et $\overrightarrow{AD}(-1,2,3)$ qui est donné par :

$$V=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{6}(-3,4,0).\begin{vmatrix}\overrightarrow{1_x} & \overrightarrow{1_y} & \overrightarrow{1_z}\\ -3 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{6}(-3,4,0).(-6,6,-6)=\boxed{7}$$

Ou bien on part des coordonnées des 4 points et on calcul le déterminant suivant:

$$V=\frac{1}{6}\det\begin{vmatrix}3 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 4 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1\\ 2 & 2 & 3 & 1\end{vmatrix}=7$$



e) On résoud le système suivant :

$$\begin{cases}(x-3)^2+y^2+z^2=R^2\\ x^2+(y-4)^2+z^2=R^2\\ x^2+y^2+(z-3)^2=R^2\\ (x-2)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=R^2\end{cases} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \begin{cases}-6x+8y=7\\ -x+z=0\\ -x+2y+3z=4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=9/14\\ y=19/4\\ z=9/14\end{cases}$$

Le centre $O(9/14, 19/14, 9/14)$ et le rayon $R=\dfrac{\sqrt{1531}}{14}\cong 2.79$
