Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 14

EXGAE140 – EXGAE149

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Février 2017

EXGAE140 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2014.

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axe orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(-1,0,0), B(0,-2,0), C(0,0,2)$ et $D(1+r,1-r,1+r)$, où $r \in \mathbb{R}$ est un paramère.

a) Donnez des équations cartésiennes de la droite AB.

b) Donnez des équations cartésiennes du plan α décrit par la droite CD lorsque r varie dans $\mathbb{R}$.

c) Déterminez la valeur de r pour laquelle les droites AB et CD sont coplanaires, ainsi que des équations paramètriques de leur plan commun pour cette valeur de r.

d) Déterminez la valeur de r pour laquelle AB et CD sont orthogonales, ainsi que la distance entre ces deux droites pour cette valeur de r.

---

1) $$\overrightarrow{AB} = (1,-2,0) \Rightarrow AB \equiv \begin{cases} \dfrac{x}{1} = \dfrac{y+2}{-2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow AB \equiv \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

2) Remaquons que D se déplace sur une droite $d \equiv \begin{cases} x = 1+r \\ y = 1-r \\ z = 1+r \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_d} = (1,-1,1)$

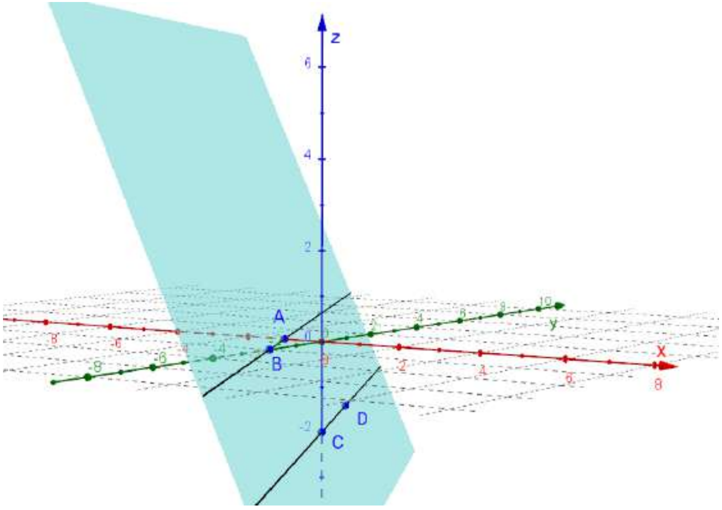
Si $r = 0 \Rightarrow D = (1,1,1)$ et $\overrightarrow{CD} = (1,1,3)$

Le plan α est alors : $\alpha \equiv \begin{vmatrix} x & y & z+2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha \equiv -2x - y + z + 2 = 0$

3) $$AB\,//\,CD \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1,-2,0) \\ \overrightarrow{CD} = (1+r,1-r,3+r) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 1+r \\ -2k = 1-r \Rightarrow r = -3 \Rightarrow D = (-2,4,2) \\ 0 = 3+r \end{cases}$$

Leur plan commun est alors

$$plan(ABC) \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y+0 & z+0 \\ 0+1 & -2+0 & 0+0 \\ 0+1 & 0+0 & -2-0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow plan(ABC) = 2x + y + z + 2 = 0$$



4) Les droites seront orthogonales si le produit scalaire de leur vecteur directeur

est nul : $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = 1 + r - 2 + 2r = 0 \Rightarrow r = \dfrac{1}{3}$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{v_{CD}} = (2,1,5)$$

<u>Distance entre les droites AB et CD</u>

<u>1er méthode</u> :

Plan perpendiculaire à AB et passant par $D : \pi_1 \equiv x - 2y + d = 0$

$$D \in \pi_1 \Rightarrow \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + d = 0 \Rightarrow d = 0 \Rightarrow \pi_1 \equiv x - 2y = 0$$

Cherchons $E = AB \cap \pi_1 \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \Rightarrow ... \Rightarrow E = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0\right) \\ z = 0 \end{cases}$

Plan perpendiculaire à CD passant par $A : \pi_2 \equiv 2x + y + 5z + d = 0$

$$A \in \pi_2 \Rightarrow d = 2 \Rightarrow \pi_2 \equiv 2x + y + 5z + 2 = 0$$

Cherchons $F = CD \cap \pi_2 \Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 5z + 2 = 0 \\ x = 2k \\ y = 2k \\ z = -2 + 5k \end{cases} \Rightarrow ...$

$$\Rightarrow k = \frac{4}{15} \Rightarrow F = \left(\frac{8}{15}, \frac{4}{15}, \frac{-2}{3}\right)$$

La distance entre les deux droites est donnéé par $\overline{EF}$

$$d(AB, CD) = \overline{EF} = \sqrt{\left(-\frac{4}{5} - \frac{8}{15}\right)^2 + \left(-\frac{2}{5} - \frac{4}{15}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = ... = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

2ème méthode

Déterminons le vecteur unitaire perpendiculaire aux deux droites AB et CD

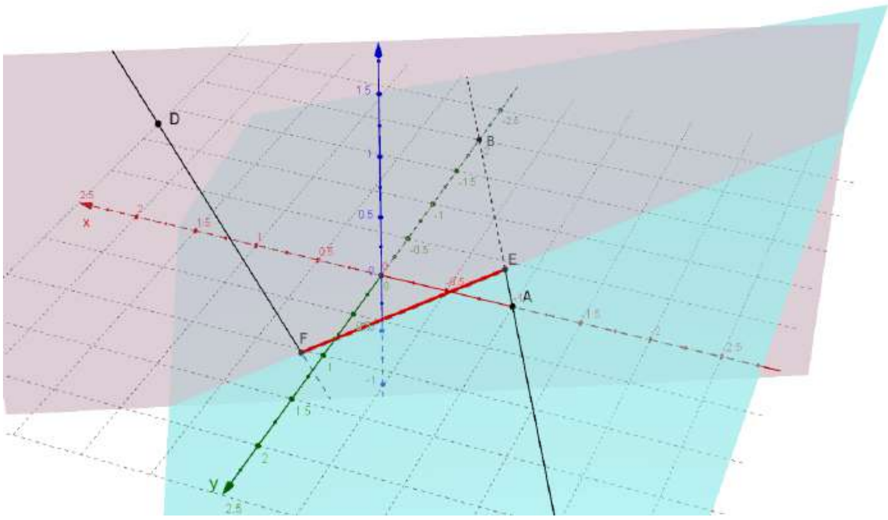
$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CD} = \begin{vmatrix} \vec{1_x} & \vec{1_y} & \vec{1_z} \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (10,5,-5) \text{ équivalent à } (2,1,-1)$$

$$\Rightarrow \vec{1_n} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(2,1,-1)}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{(2,1,-1)}{\sqrt{6}}$$

Or $\overrightarrow{AC} = (1,0,-2)$ (En fait, on peut prendre un vecteur déterminé par un point quelconque de AB et un point quelconque de CD)

La distance entre les deux droites est donnée par le produit scalaire de $\vec{1_n}$ et $\overrightarrow{AC}$

$$d(AB,CD) = \vec{1_n}.\overrightarrow{CD} = \frac{(2,1,-1)}{\sqrt{6}}.(1,0,-2) = \frac{2+2}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$



Le 30 mars 2017

EXGAE141 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(1,0,0), B(1,2,0), C(1,2,3)$ et $D(3,2,1)$

a) Donner des équations paramètriques de la droite *AB.*

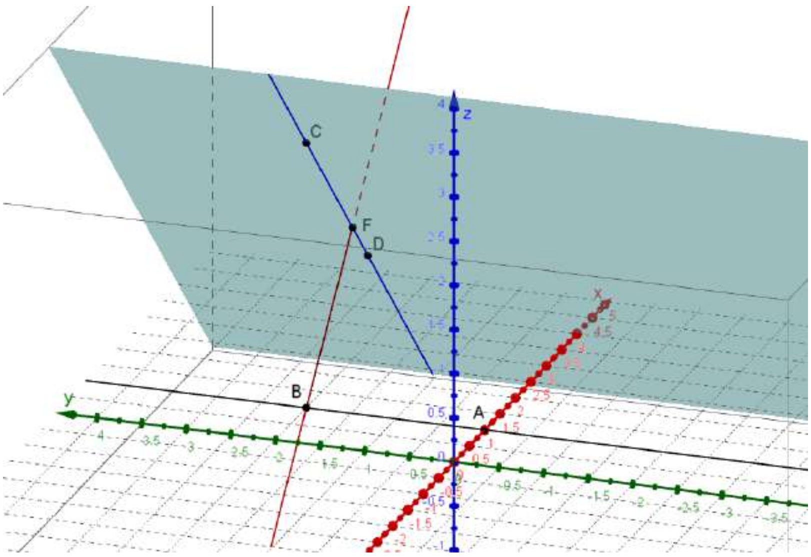
b) Donner des équations cartésienne de la droite *CD.*

c) Donner une équation cartésienne du plan α parallèle à *AB* et passant par *CD.*

d) Donner des équations paramètriques de la perpendiculaire commune à *AB* et *CD.*

e) Calculez la distance entre le plan α et la droite *AB.*

Solution proposée par Jacques COLLOT



$a)\ \overrightarrow{v_{AB}} = (0,2,0) = (0,1,0) \Rightarrow AB = \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

$b)\ \overrightarrow{v_{CD}} = (2,0,-2) = (1,0,-1) \Rightarrow CD = \begin{cases} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{z-3}{-1} \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow CD = \begin{cases} x - z + 4 = 0 \\ y = 2 \end{cases}$

$c)\ \overrightarrow{v_{AB}}$ et $\overrightarrow{v_{CD}}$ sont deux vecteurs directeurs de α

$$\alpha = \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -x - z + 4 = 0$$

$d)$ Les points B, C, D sont situés dans le plan $y = 2$ qui est perpendiculaire à AB et comme AB est aussi parallèle à α, on en déduit que la perpendiculaire commune p à AB et CD est la perpendiculaire abaissée de B sur CD donc aussi sur α.

$$\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{n_\alpha} = (-1,0,-1) \Rightarrow p = \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 2 \\ z = -k \end{cases}$$

$e)$ La distance de AB à CD est la longueur du segment BF où $F = CD \cap p = \alpha \cap p$

$$\Rightarrow -(1-k) - (-k) + 4 = 0 \Rightarrow k = -\frac{3}{2} \Rightarrow F\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow d(\alpha, AB) = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 1\right)^2 + (2-2)^2 + \left(\frac{3}{2} - 0\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Autre méthode.

Soit $X(0,0,4)$ un point de α. On a directement

$$d(\alpha, AB) = \overrightarrow{XB} \cdot \frac{\overrightarrow{n_\alpha}}{\left\|\overrightarrow{n_\alpha}\right\|} = (1,2,-4) \cdot \frac{(-1,0,-1)}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

Le 19 septembre 2013.

EXGAE142 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 1.

Cette question prend place dans le plan euclidien de repère $OXYZ$. Veuillez inscrire votre réponse dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires. Vos raisonnements peuvent faire appel à toutes vos connaissances mathématiques.

Guillaume Tell s'entraîne au tir à l'arc avec son fils. La tête de ce dernier est une sphère de rayon 1 et de centre $(0,7,11)$.

On pose sur sa tête une citrouille, sphère de rayon 3/2 et de centre $(0,7,27/2)$.

Guillaume lance une flèche depuis le point $(0,0,15)$ dans le plan $x=0$. La flèche décrit une ligne droite parfaite. Guillaume souhaite que la flèche traverse la citrouille de part en part mais sans toucher la tête de son fils.

(1) On recherche la trjactoire la plus haute possible de la flèche, qui réalise cet objectif. Décrivez cette trajectoire en équations cartésiennes.

Trajectoire $\equiv$

(2) On recherche la trjactoire la plus basse possible de la flèche, qui réalise cet objectif. Décrivez cette trajectoire en équations cartésiennes.

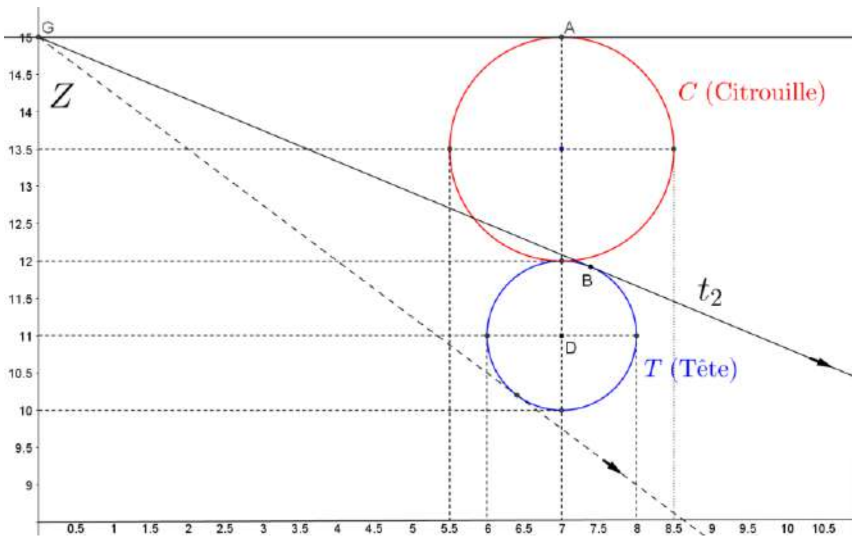
Trajectoire $\equiv$

(3) Représentez la tête, la citrouille, les deux trajectoires extrêmes calculées ci-dessus, vues dans un plan OYZ, par un schéma clair.

(4) Quelle est l'équation cartésienne de la surface de la citrouille?

Citrouille $\equiv$

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux



(1) $\boxed{t_1 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 15 \end{cases}}$

(2) Dans YOZ, la droite t_2 passe par le point $(0{,}15)$.

Posons α sa pente $\Rightarrow t_2 \equiv z = \alpha y + 15$ ou encore $-\alpha y + z - 15 = 0$

La distance du point $D(7{,}11)$ à t_2 vaut $1 \Rightarrow \dfrac{|-\alpha \times 7 + 11 - 15|}{\sqrt{\alpha^2 + 1}} = 1$

$$\Rightarrow |-7\alpha - 4| = \sqrt{\alpha^2 + 1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow 48\alpha + 56\alpha + 15 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\dfrac{9}{12} \\ \alpha = -\dfrac{5}{12} \end{cases}$$

La pente de $t_2 = \alpha_{\text{minium}} = -\dfrac{5}{12} \Rightarrow \boxed{t_2 \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 5y + 12z = 180 \end{cases}}$

(3) L'équation de la surface de la citrouille est :

$$\boxed{\text{Citrouille } \equiv x^2 + (y-7)^2 + \left(z - \frac{27}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}}$$

Le 10 aout 2017

EXGAE143 - EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 2.

Cette question prend place dans le plan euclidien de repère $OXYZ$. Veuillez inscrire votre réponse dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires. Vos raisonnements peuvent faire appel à toutes vos connaissances mathématiques.

Blutch et Chesterfield, valeureux soldat de l'armée du Nord, observent les positions sudistes à bord de leur mongolfière, assimilée à une sphère de rayon 1 (on néglige de modéliser la nacelle).

Malheureusement le vent les pousse vers les positions sudistes. La position du centre de la montgolfière au temps t le point de coordonnées $(2t, 2t+1, 6)$. L'artillerie sudiste est en $(10,11,0)$ et a une portée de 9 (ils peuvent atteindre tout point à distance 9 de leurs canons).

(1) A quel instant la montgolfière est-elle à portée de tir des Sudistes (càd qu'un point au moins de la montgolfière peut être atteint par l'artillerie)? A quel endroit se trouve-t-elle à ce moment (coordonnées du centre)?

Temps d'entrée $=$
Position du centre de la montgolfière $=$

(2) Si la montgolfière continue sur cette trajectoire, combien de temps restera-t-elle sous le feu ennemi?

Temps sous le feu ennemi $=$

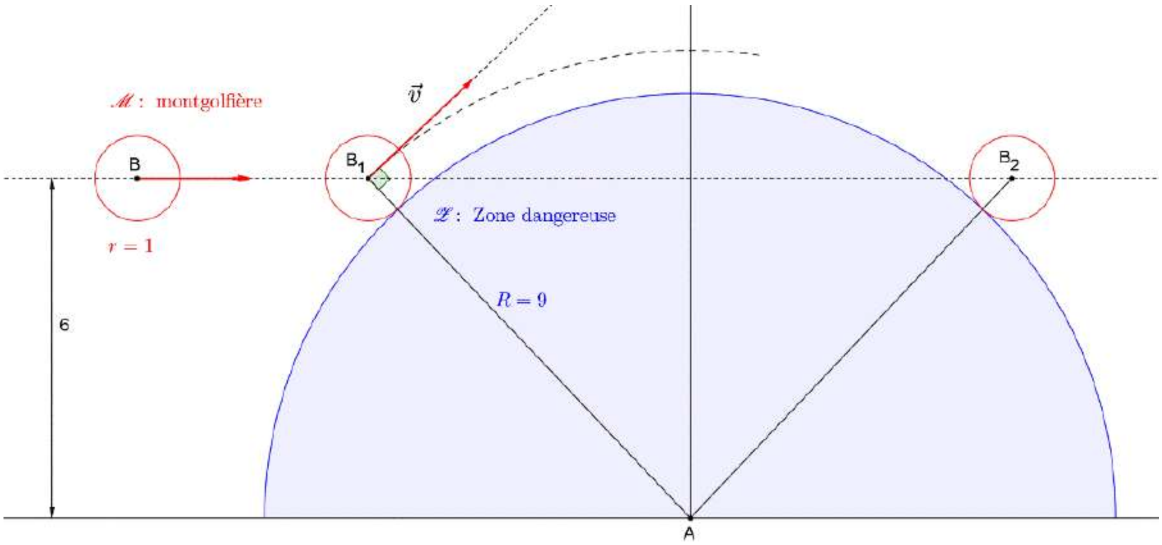
(3) Au moment où la montgolfière est sur le point d'entrer la zone dangereuse, Blutch remarque qu'en lâchant du lest, la montgolfière augmente son altitude à une vitesse de $2m$ (altitude gagnée par unité de temps), où m est la masse de lest jetée (les composantes x et y de sa trajectoire ne sont pas affectées). Autrement dit, le nouveau vecteur vitesse après le largage du lest est $(2, 2, 2m)$.

Quelle est la masse minimale à délester pour éviter la zone dangereuse?

Quelle est alors la trajectoire de la montgolfière (exprimée en coordonnées cartésiennes)?

Masse minimale $=$
Trajectoire après délestage $=$

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux



La montgolfière $\mathscr{M}$ est une sphère de centre B et de rayon $r = 1$

La zone dangereuse $\mathscr{Z}$ est une sphère de centre A et de rayon $R = 9$

1) $A = (10,11,0)$, $B = (2t, 2t+1, 6)$

$$\overrightarrow{AB} = 10 \Leftrightarrow (2t-10)^2 + (2t+1-11)^2 + (6-0)^2 = 100$$

$$.... \Leftrightarrow t = 5 \pm 2\sqrt{2} \begin{cases} t_1 = 5 - 2\sqrt{2} & \text{pour } B_1 \\ t_2 = 5 + 2\sqrt{2} & \text{pour } B_2 \end{cases}$$

$$B_1 = (2t_1, 2t_1 + 1, 6) = ... = (10 - 4\sqrt{2}, 11 - 4\sqrt{2}, 6)$$

2) $t_2 - t_1 = 5 + 2\sqrt{2} - 5 + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

3) $\vec{v} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{(2,2,m)}.\overrightarrow{(-4\sqrt{2}, -4\sqrt{2}, 6)} = 0 \Rightarrow ...m = \dfrac{4\sqrt{2}}{2}$

$$\vec{v} = \left(2, 2, \frac{8\sqrt{2}}{3}\right) // \left(3, 3, 4\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2}\vec{v}$$

$$d \equiv \frac{x - 10 + 4\sqrt{2}}{2} = \frac{y - 11 + 4\sqrt{2}}{3} = \frac{z - 6}{4\sqrt{2}}$$

EXGAE144 - EPL, ULB, Bruxelles juillet 2017.

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés Oxyz, on donne les points $A(1,1,0)$ et $B(0,0,h)$, où $h \in \mathbb{R}$ est un paramètre variable.

a) Déterminez des équations paramétriques de la droite AB.

b) Déterminez les coordonnées du point P, projeté orthogonal du point O sur la droite AB.

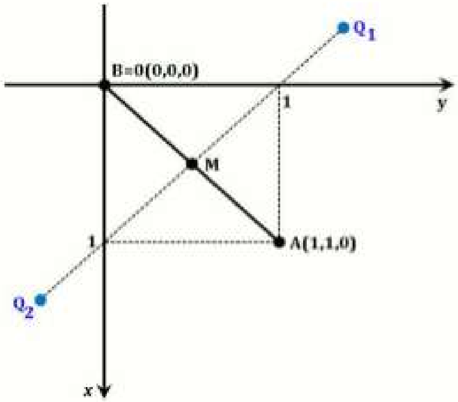
c) Déterminez une équation cartésienne du plan π orthogonal à la droite OP et passant par la droite AB.

d) Déterminez des équations paramétriques du plan σ, plan médiateur du segment [AB].

e) Déterminez les coordonnées d'un point Q du plan π tel que le triangle ABQ est équilatéral.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Lorsque $h = 0$, il s'agit d'un problème de géométrie analytique dans le plan Oxy (sauf pour le point d). Nous l'avons représenté ci à droite d'une façon qui facilite la comparaison avec la figure dans l'espace pour le cas général. On a que :



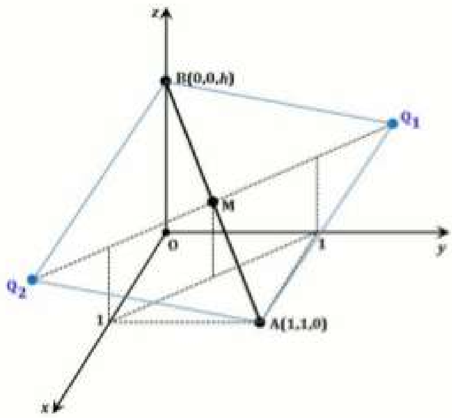
$$AB \equiv \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R}) \qquad P = O(0,0,0) \qquad \pi \equiv z = 0$$

$$\sigma \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 - \alpha \\ z = \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

Dans le plan $z = 0$, on peut construire deux triangles équilatéraux dont le segment [AB] est un côté, avec les sommets Q_1 et Q_2 de part et d'autre de la droite AB sur la droite médiateur du segment [AB].

La longueur du côté du triangle est $\overline{AB} = \sqrt{2}$. La hauteur d'un triangle équilatéral est les $\sqrt{3}/2$ de son côté. Par conséquent : $\overline{MQ_1} = \overline{MQ_2} = \sqrt{6}/2$. La projection de cette hauteur sur les axes x et y vaut $\sqrt{3}/2$ et les coordonnées du milieu du segment [AB] sont $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Les coordonnées des sommets sont donc : $Q_1\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ et $Q_2\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

Dans la suite, nous supposons $h \neq 0$. Les données, ainsi que les deux triangles équilatéraux, sont représentés ci à droite pour $h > 0$.



a) Equations paramétriques de la droite passant par B et de vecteur directeur $\vec{u}(1,1,-h)$:

$$\boxed{AB \equiv \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = -hk + h \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})}$$

b) Equation cartésienne du plan ω perpendiculaire à AB et passant par O :

$\omega \equiv x + y - hz = 0$

Projection orthogonale P de O sur AB : $P = \omega \cap AB$

$$k_P + k_P - h(-hk_P + h) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (h^2 + 2)k_P = h^2 \quad \Rightarrow \quad x_P = y_P = \frac{h^2}{h^2 + 2} \quad \text{et} \quad z_P = \frac{2h}{h^2 + 2}$$

$$\boxed{P\left(\frac{h^2}{h^2+2},\frac{h^2}{h^2+2},\frac{2h}{h^2+2}\right)}$$

c) Equation cartésienne du plan π orthogonal à la droite OP et passant par la droite AB :

Un vecteur normal à π est vecteur directeur de OP : $\vec{n}(h,h,2)$. Donc : $\pi \equiv hx + hy + 2z + d = 0$

$B \in \pi \iff 2h + d = 0 \iff d = -2h$

$$\boxed{\pi \equiv hx + hy + 2z - 2h = 0}$$

d) Equations paramétriques du plan σ, plan médiateur du segment [AB].

Equation cartésienne d'un plan perpendiculaire à AB et donc de vecteur normal $(1,1,-h)$:

$\sigma \equiv x + y - hz + d = 0$

Le plan médiateur passe par $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{h}{2}\right) \iff \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{h^2}{2}+d=0 \iff d=\frac{h^2}{2}-1$

$$\sigma \equiv x + y - hz + \frac{h^2}{2} - 1 = 0$$

En posant $x = \alpha$ et $z = \beta$, on en tire les équations paramétriques :

$$\boxed{\sigma \equiv \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 - \alpha + h\beta - \dfrac{h^2}{2} \\ z = \beta \end{cases} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})}$$

e) Dans le plan π, on peut construire deux triangles équilatéraux dont le segment [AB] est un côté, avec les sommets Q_1 et Q_2 de part et d'autre de la droite AB, sur la droite médiateur du segment [AB] et parallèle au plan Oxy. On a donc déjà que

$$z_{Q_1} = z_{Q_2} = z_M = \frac{h}{2}$$

La longueur du côté du triangle est $\overline{AB} = \sqrt{h^2+2}$. La hauteur d'un triangle équilatéral est les $\sqrt{3}/2$ de son côté. Par conséquent : $\overline{MQ_1} = \overline{MQ_2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{h^2+2}$. La projection de cette hauteur sur les axes x et y vaut $\frac{\sqrt{6}}{4}\sqrt{h^2+2}$ et les coordonnées du milieu du segment [AB] sont $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{h}{2}\right)$. Les coordonnées des sommets sont donc :

$$\boxed{Q_1\left(\frac{2-\sqrt{6}\sqrt{h^2+2}}{4},\frac{2+\sqrt{6}\sqrt{h^2+2}}{4},\frac{h}{2}\right) \text{ et } Q_2\left(\frac{2+\sqrt{6}\sqrt{h^2+2}}{4},\frac{2-\sqrt{6}\sqrt{h^2+2}}{4},\frac{h}{2}\right)}$$

EXGAE145 - EPL, UCL, LLN, septembre 2017.

Celle que l'on surnomme la Mère des Dragons se promène gentiment dans les airs, juchée sur le cou de son enfant terrible cracheur de feu, carbonisant ici un mouton - et quelquefois le beger -, là-bas une armée en campagne.
Au temps t elle et son dragon (l'attelage étant assimilé à un point) occupent la position de coordonnées cartésiennes $(60-10t, 60-10t, 50-10t)$.
Un soldat quelque peu taquin est aux commandes d'un scorpion (c-à-d une arbalète géante) et décide pour s'amuser de viser le dragon. Le carreau (projectile du scorpion) est propulsé selon une droite de vecteur directeur $(2,2,1)$ et une vitesse 10, en partant du point $(0,0,0)$ à un temps t_{tir} chosi par le tireur. Rappelons que la vitesse est la distance parcourue par unité de temps.

(1) A quel instant t_{tir} la carreau doit-il être tiré pour toucher le dragon?
A quel instant le dragon est-il touché?

t_{tir} =   Instant de l'impact =

(2) Le dragon, blessé, poursuit néanmoins sa trajectoire. Il peut cracher dans toute direction un flamme que nous assimilons à un segment de longueur 20.
A partir de quel instant est-il en mesure de rôtir l'impertinent et son scorpion (toujours au point $(0,0,0)$)?

Instant du rôtissage =

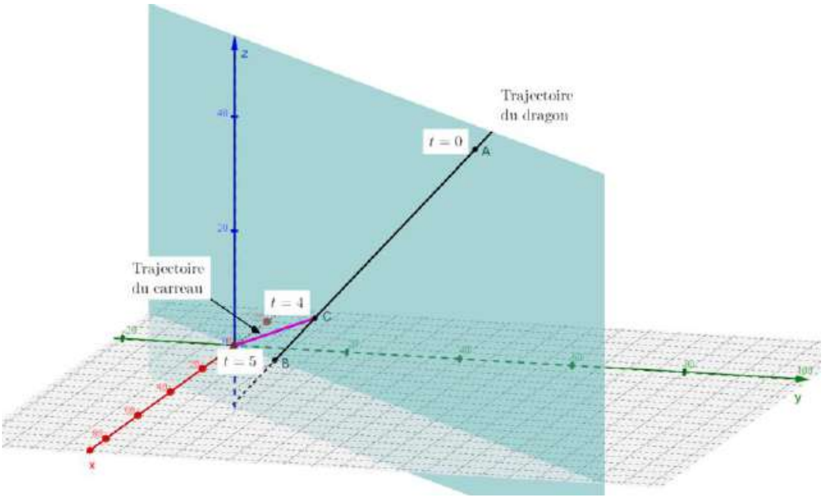
(3) A quel instant le dragon atterrit-il, c-à-d intercepte-t-il le plan d'équation $z = 0$?

Instant de l'atterrissage =

(4) Faites un schéma de la situation avec la trajectoire du dragon, celle du carreau, et la flamme.

Veuillez inscrire votre réponse finale dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires. Vos raisonnements peuvent faire appel à toutes vos connaissances mathématiques.

Solution proposée par Louis François.



(1) Tout se passe dans le plan : $x=y$

$$M \text{ est mobile que } m=\begin{cases} x=60-10t \\ y=60-10t \\ z=50-10t \end{cases}$$

La norme de $(2,2,1)$ est 3. On peut prendre $\frac{10}{3}(2,2,1)$ comme vecteur directeur de la droite c décrite par le carreau $\mathscr{C}$ afin d'avoir l'espace parcouru pendant l'unité de temps.

$$c=\begin{cases} x=\frac{20}{3}T \\ y=\frac{20}{3}T \\ z=\frac{10}{3}T \end{cases} \qquad \text{où } T \text{ représente le temps pendant lequel } \mathscr{C} \text{ est mobile.}$$

$$\text{S'il y a impact, il faut : } \begin{cases} \text{pour } x=y \qquad 60-10t=\frac{10}{3}T \\ \text{pour } z \qquad 50-10t=\frac{10}{3}T \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T=3 \\ t=4 \end{cases}$$

Donc au temps $t=4,$ il y a impact en $(20,20,10)$. Le carreau $\mathscr{C}$ a été mobile pendant $T=3$ $\Rightarrow t_{tir}=1$

(2) La distance entre $(60-10t,60-10t,50-10t)$ et $(0,0,0)$ doit être inférieure à 20.

Il faut donc que la norme de $10(6-t,6-t,5-t)\leq 20 \Rightarrow \sqrt{2(6-t)^2+(5-t)^2}\leq 2$

$$\Rightarrow \ldots \Rightarrow 3t^2-34t+93=0 \Rightarrow t=\frac{17\pm\sqrt{10}}{3}$$

Comme on demande le plus petit $t \Rightarrow t=\frac{17-\sqrt{10}}{3}$

(3) Il suffit de poser $z=0$ dans l'équation de $m \Rightarrow 50-10t=0 \Rightarrow t=5$

EXGAE146 - POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2017.

Dans un repère orthonormé $Oxyz$, on considère :

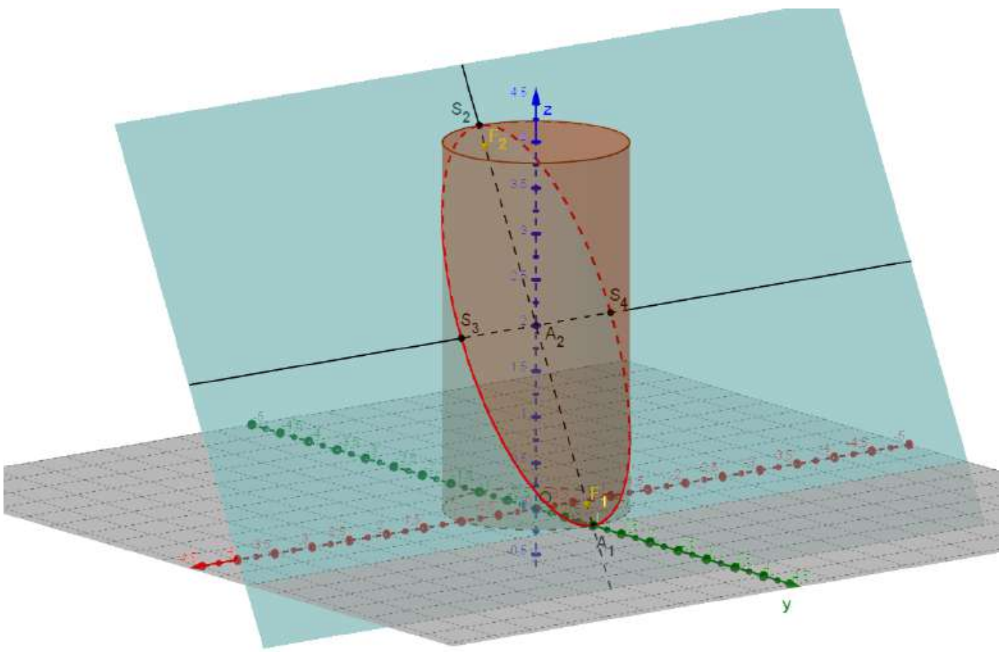
- le plan π parallèle à l'axe Ox et coupant les axes Oy et Oz en $A_1(0,1,0)$ et $A_2(0,0,2)$.
- Le cylindre $\mathscr{C}$ dont la base est dans le plan $z=0$, d'axe confondu avec l'axe Oz, de rayon $R=1$ et de hauteur 4.

Par les méthodes de la géométrie synthétique :

1) Déterminez les longueurs du grand axe et du petit axe de l'ellipse d'intersection du plan π et du cylindre $\mathscr{C}$.
2) Déterminez les coordonnées des foyers F_1 et F_2 de l'ellipse.

Par les méthodes de la géométrie analytique :

3) Exprimer l'équation cartésienne du plan π.
4) Exprimez les équations paramètriques des droites δ du plan π passant par A_2.
5) Déterminez les valeurs maximales et minimale de l'angle aigu β entre l'axe du cylindre et la droite δ.



1) La longueur du grand axe : $2a = 2\sqrt{2^2+1} = 2\sqrt{5}$

La longueur du petit axe est le diamètre du cylindre : $2b = 2$

2) la distance focale est : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5-1} = 2$. Ce qui donne un rapport $\frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

On a alors : $\overrightarrow{OF_1} = \overrightarrow{OA_2} + \frac{c}{a}\overrightarrow{A_2A} = \overrightarrow{(0,0,2)} + \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{(0,1,-2)} = \overrightarrow{(0;0.8944;0.2111)}$

$\Rightarrow F_1 = ((0;0.8944;0.2111))$

De même : $\overrightarrow{OF_2} = \overrightarrow{OA_2} + \frac{c}{a}\overrightarrow{S_2A_2} = \overrightarrow{(0,0,2)} + \frac{2}{\sqrt{5}}\overrightarrow{(0,-1,2)} = \overrightarrow{(0;-0.8944;3.7888)}$

$\Rightarrow F_2 = (0;-0.8944;3.7888)$

3) $\pi \equiv 2y + z - 2 = 0$

4) Les vecteurs $\overrightarrow{A_2S_3} = \overrightarrow{(1,0,0)}$ et $\overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{(0,-1,2)}$ sont deux vecteurs directeurs indépendants du plan π. Un vecteur directeur quelconque $\vec{u}$ de π peut donc d'exprimer comme une combinaison linéaire de ces deux vecteurs. : $\vec{u} = \alpha\overrightarrow{A_2S_3} + \overrightarrow{A_2A_3} = \overrightarrow{(\alpha,-1,2)}$.

L'équation des droites δ est alors : $\delta = \begin{cases} x = \alpha k \\ y = -k \\ z = 2 + 2k \end{cases}$

5) L'angle β entre une droite δ et l'axe Oz de vecteur directeur $\vec{k} = \overrightarrow{(0,0,1)}$ et donné par

$\cos\beta = \frac{\vec{k}\bullet\vec{u}}{\|\vec{k}\|.\|\vec{u}\|} = \frac{(0,0,1)(\alpha,-1,2)}{1.\sqrt{\alpha^2+5}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha^2+5}}$.

Cet angle sera minimal pour $k = 0 \Rightarrow \cos\beta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \beta = 26.56°$. A ce moment, la droite δ est confondue avec grand axe de l'ellipse.

L'angle sera maximal pour $k \to \infty \Rightarrow \cos\beta = 0 \Rightarrow \beta = 90°$. A ce moment, la droite δ est confondue avec le petit axe de l'ellipse.

EXGAE147 - EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017.

Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés $Oxyz$, on donne les points $A(1,0,0), B(2,1,0), C(1,1,1)$ et $D(1,\sqrt{2},1)$.

(a) Déterminer une équation cartésienne du plan α passant par A, B, C.

(b) Déterminer des équations paramètriques de la droite d passant par O, faisant un angle de $\frac{\pi}{3}$ avec Ox, et $\frac{\pi}{4}$ avec Oy, et coupant le premier octant du système d'axes orthonormés.

Rappel : le premier octant est constitué des points de coordonnées (x, y, z) tels que $x > 0, y > 0$ et $z > 0$.

(c) Déterminer des équations cartésiennes de la droite d' projetée orthogonale de OD sur α.

(d) Déterminer une équation cartésienne du plan α' perpendiculaire à α et contenant la droite OD.

$$(a)\ \alpha \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 2-1 & 1 & 0 \\ 1-1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \boxed{x-y+z-1=0} \qquad (1)$$

(b) Soit $\overrightarrow{v_d}(1, x, y)$ le vecteur directeur de la droite d cherchée.

On a $\cos\left(\overrightarrow{v_d}, \overrightarrow{Ox}\right) = \dfrac{\overrightarrow{v_d} \bullet \overrightarrow{Ox}}{\left\|\overrightarrow{v_d}\right\| . \left\|\overrightarrow{Ox}\right\|} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}.1}$

$$\Rightarrow \sqrt{1+x^2+y^2} = 2 \Rightarrow x^2+y^2 = 3$$

On a aussi $\cos\left(\overrightarrow{v_d}, \overrightarrow{Oy}\right) = \dfrac{\overrightarrow{v_d} \bullet \overrightarrow{Oy}}{\left\|\overrightarrow{v_d}\right\| . \left\|\overrightarrow{Oy}\right\|} \Rightarrow \cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}.1}$

$$\Rightarrow \sqrt{2}\sqrt{1+x^2+y^2} = 2x \Rightarrow 2x = \sqrt{2}\sqrt{1+3} \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Donc : $2 + y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm 1$. Mais comme on est dans le premier octant : $y = 1$

On constate donc que $\overrightarrow{v_d} = (1, \sqrt{2}, 1) = \overrightarrow{OD}$.

L'équation de la droite d est donc aussi l'équation de la droite OD

$$\Rightarrow \boxed{OD \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \sqrt{2}\lambda \\ z = \lambda \end{cases}} \qquad (2)$$

(c) Déterminons le point $E=\alpha\cap OD,$ c'est à dire le point de percée de la droite OD dans le plan α. Pour ce faire, on injecte (2) dans $(1):\lambda-\sqrt{2}\lambda+\lambda-1=0\Rightarrow\lambda=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow$ Les coordonnées de $E:\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2}+1,1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Déterminons la perpendiculaire p au plan α issue de O ainsi que $F\equiv p\cap\alpha$

Le vecteur normale du plan α est $\overrightarrow{n_\alpha}:(1,-1,1)\Rightarrow p\equiv\begin{cases}x=\lambda\\ y=-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\qquad(3)$

De (1) et $(3):\lambda+\lambda+\lambda-1=0\Rightarrow\lambda=\dfrac{1}{3}\Rightarrow F:\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

La droite d' est alors la droite déterminée par les points E et F.

$$\overrightarrow{v_{d'}}=\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3};\sqrt{2}+1+\frac{1}{3};1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{3}\right)$$

Simplifions : $\overrightarrow{v_{d'}}$ peut s'écrire $\overrightarrow{v_{d'}}=\left(4+3\sqrt{2};8+6\sqrt{2};4+3\sqrt{2}\right)$

$$=\left(1;\frac{8+6\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}};1\right)=(1;2;1)$$

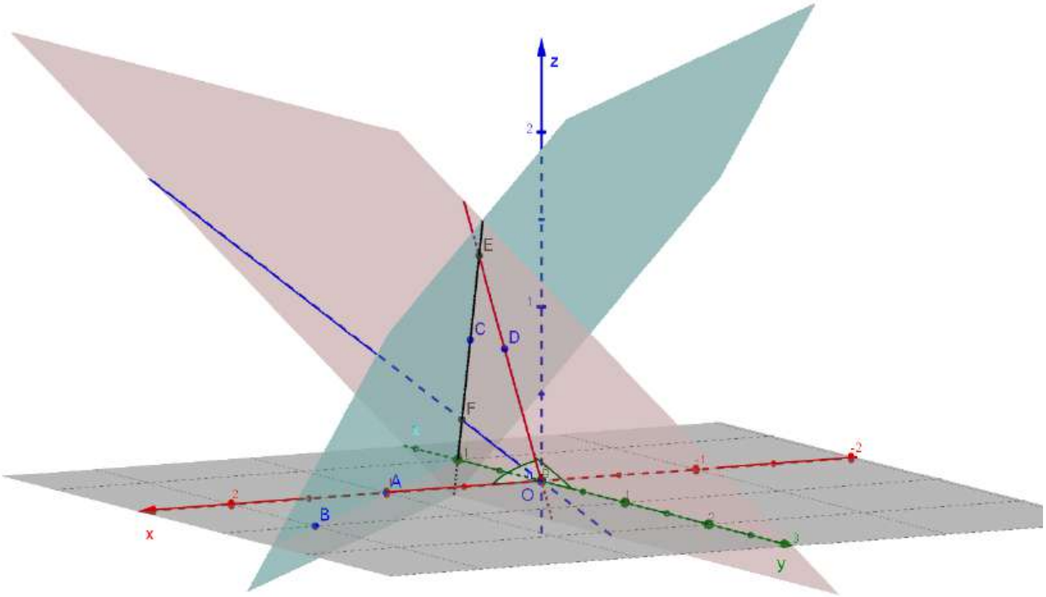
On peut alors écrire l'équation de $\boxed{d'\equiv x-\dfrac{1}{3}=\dfrac{y+\frac{1}{3}}{2}=z-\dfrac{1}{3}}$ ou $\boxed{d'\equiv 6x-2=3y+1=6z-2}$

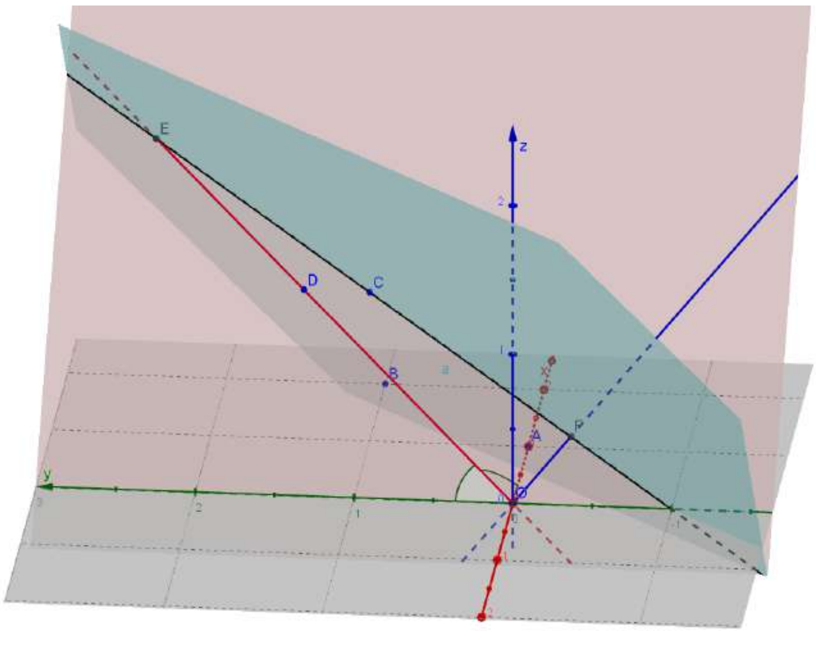
(d) Les vecteurs directeurs de p et de d sont des vecteurs directeurs de α'

$\left(\overrightarrow{v_p}=(1,-1,1)\text{ et }\overrightarrow{v_d}=\left(1,\sqrt{2},1\right)\right)$ et α' passe par O.

$$\Rightarrow\alpha'\equiv\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow\boxed{\alpha'\equiv x-z=0.}$$

L'axe Oy est inclus dans le plan α'





Le 10 octobre 2015

EXGAE148 - Compléments

1) Déterminer la perpendiculaire commune entre deux droites données.

2) Déterminer la distance entre deux droites données.

3) Déterminer les points les plus proches de deux droites données.

A titre d'exemple on prendra les droites

$$d \equiv \begin{cases} x = r+1 \\ y = -r+2 \\ z = 2r-1 \end{cases} \quad \text{et} \quad d_2 \equiv \begin{cases} x = -s+1 \\ y = s-2 \\ z = 2s \end{cases}$$

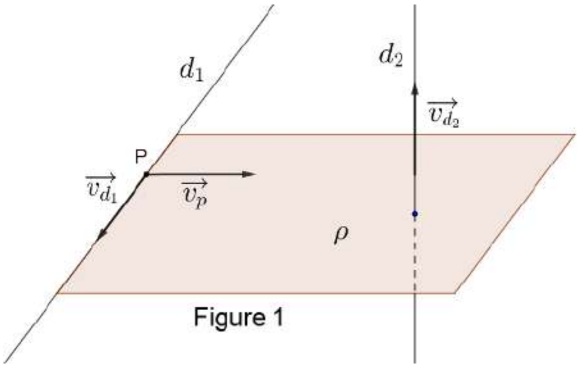


Figure 1

1) Perpendiculaire commune à deux droites (Figure 1)

a) On détermine la direction $\overrightarrow{v_p}$ perpendiculaire aux deux droites

- Méthode 1 : produit scalaire

Soit $\overrightarrow{v_p} = (a,b,c)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_p}.\overrightarrow{v_{d_1}} = (a,b,c).(1,-1,2) = a-b+2c = 0 & (1) \\ \overrightarrow{v_p}.\overrightarrow{v_{d_2}} = (a,b,c).(-1,1,2) = -a+b+2c = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1)+(2) \Rightarrow 4c = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \overrightarrow{v_p} = (1,1,0)$$

- Méthode 2 : produit vectoriel

$$\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{v_{d_1}} \times \overrightarrow{v_{d_2}} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{1_x} & \overrightarrow{1_y} & \overrightarrow{1_z} \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-4,-4,0) = (1,1,0)$$

b) On détermine le plan ρ contenant d_1 et parallèle à $\overrightarrow{v_p}$

$\overrightarrow{v_{d_1}}$ et $\overrightarrow{v_p}$ sont les vecteurs directeurs du plan ρ. Soit $P(1,2,-1) \in d_1$

$$\rho \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2(x-1)-2(y-2)-2(z-1) = x-y-z = 0$$

c) On détermine Q le point de percée de d_2 dans ρ

$$Q \equiv d_2 \cap \rho \Rightarrow -s+1-s+2-2s = 0 \Rightarrow s = \frac{3}{4} \Rightarrow Q = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, -\frac{3}{2}\right)$$

d) On détermine la perpendiculaire commune

La perpendiculaire p est la droite issue de Q et de vecteur directeur $\overrightarrow{v_p}$

$$p \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{4} + h \\ y = -\frac{5}{4} + h \\ z = \frac{3}{2} \end{cases} \quad \text{ou} \quad p \equiv \begin{cases} x - y = \frac{3}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

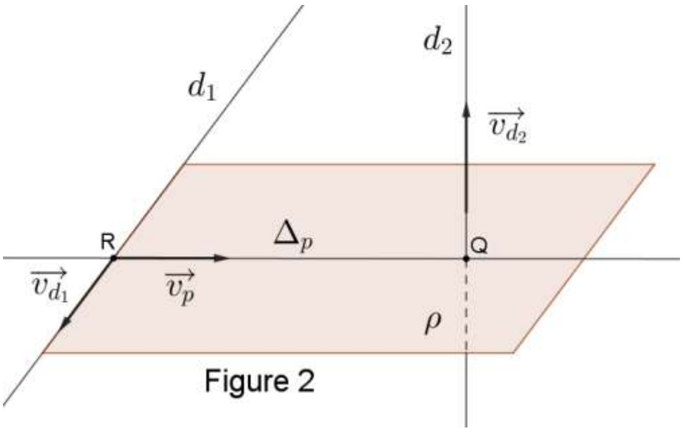


Figure 2

2) Déterminer la distance entre deux droites

a) Méthode de la perpendiculaire commune (Figure 2)

Si on a déjà déterminé la perpendiculaire commune p (voir point précédent), il suffit de calculer :

$$R = d_1 \cap p \equiv \begin{cases} \frac{1}{4} + h = r + 1 \\ -\frac{5}{4} + h = -r + 2 \\ \frac{3}{2} = 2r - 1 \end{cases} \Rightarrow R = \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

La distance est alors

$$d(d_1, d_2) = \overline{RQ} = \sqrt{\left(\frac{9}{4} - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}$$

b) Méthode vectorielle (Figure 3)

Si on ne dispose pas de la perpendiculaire commune, on peut procéder comme suit :

• On détermine la direction perpendiculaire aux deux droites

$$\overrightarrow{v_p} = (1,1,0) \qquad \text{(Voir précédement)}$$

• On détermine X et Y points quelconques de d_1 et d_2

$$X \in d_1 = (1,2,-1) \text{ et } Y \in d_2 = (1,-2,0)$$

• La distance est alors donnée par :

$$d(d_1 d_2) = \overrightarrow{XY} \bullet \frac{\overrightarrow{v_p}}{\left\|\overrightarrow{v_p}\right\|} = \overrightarrow{XY} \bullet \frac{\overrightarrow{v_{d_1}} \times \overrightarrow{v_{d_2}}}{\left\|\overrightarrow{v_{d_1}} \times \overrightarrow{v_{d_2}}\right\|} \qquad (1)$$

$$= (0,-4,1) \bullet \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

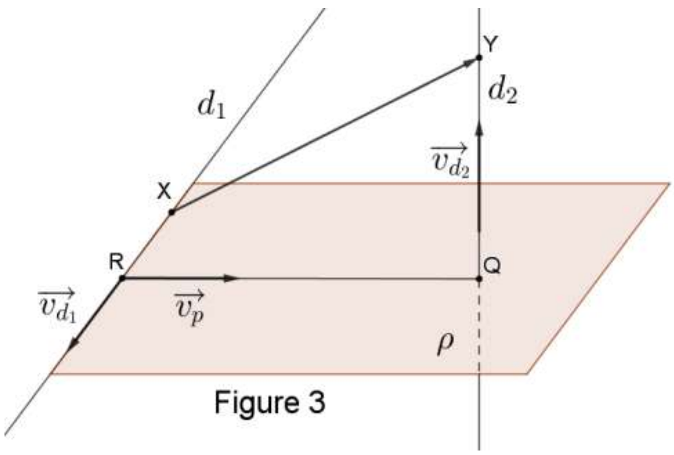


Figure 3

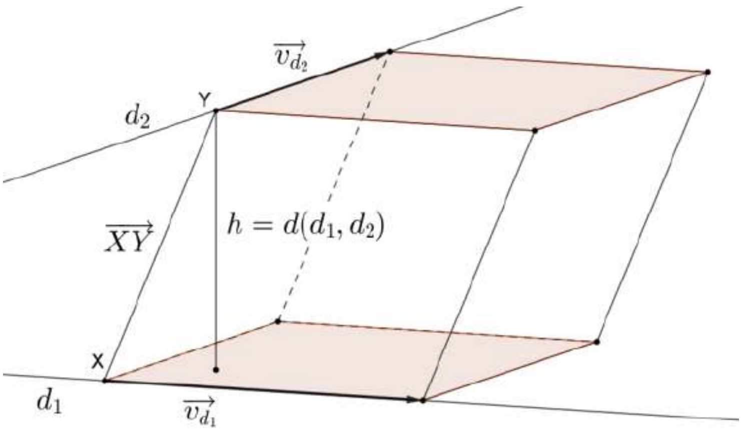
Note

La formule $d\left(d_1,d_2\right)=\overrightarrow{XY}\bullet\dfrac{\overrightarrow{v_{d_1}}\times\overrightarrow{v_{d_2}}}{\left\|\overrightarrow{v_{d_1}}\times\overrightarrow{v_{d_2}}\right\|}$ est simple et rapide.

Elle peut s'interpréter comme donnant la hauteur d'un prisme dont la base est définie par $\overrightarrow{v_{d_1}}$ et $\overrightarrow{v_{d_2}}$ et un côté par $\overrightarrow{XY}$. (Figure 4).

Autre exemple : $d_1 \equiv \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{1},\ d_2 \equiv \dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-1}{-1}$

$\Rightarrow d\left(d_1 d_2\right)=\left(0-2,1-0,-1-1\right)\bullet\dfrac{\left(-1,2,1\right)\times\left(2,2,-1\right)}{\left\|\left(-1,2,1\right)\times\left(2,2,-1\right)\right\|}=\dfrac{21}{\sqrt{53}}\simeq 2.885$



3) Détermination des points les plus proches.

La méthode précédente donne la distance mais pas les coordonnées des points les plus proches.

a) Méthode vectorielle (Figure 3)

- On exprime $\overrightarrow{XY}$ en fonction des vecteurs directeurs des droites et la perpendiculaire

$$\overrightarrow{XY} = \overrightarrow{XR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QY} = a\overrightarrow{v_{d_1}} + b\overrightarrow{v_p} + c\overrightarrow{v_{d_2}} \qquad (1)$$

où a, b, c sont trois nombres à déterminer.

- On effectue le produit scalaire de (1) par $\overrightarrow{v_{d_1}}$

$$\overrightarrow{v_{d_1}}.\overrightarrow{XY} = a\overrightarrow{v_{d_1}}^2 + c\overrightarrow{v_{d_1}}.\overrightarrow{v_{d_2}}$$

$$\Rightarrow \quad (1,-1,2).(0,-4,1) = a(1,2,-1)^2 + c(1,-1,2).(-1,1,2)$$

$$\Rightarrow \quad 3a + c = 3 \qquad (2)$$

- On effectue le produit scalaire de (1) par $\overrightarrow{v_{d_2}}$

$$\overrightarrow{v_{d_2}}.\overrightarrow{XY} = a\overrightarrow{v_{d_1}}.\overrightarrow{v_{d_2}} + c\overrightarrow{v_{d_2}}^2$$

$$\Rightarrow \quad (-1,1,2).(0,-4,1) = a(1,2,-1).(-1,1,2) + c(-1,1,2)^2$$

$$\Rightarrow \quad a + 3c = -1 \qquad (3)$$

- On résout le système formé par (2) et (3)

On trouve $a = \frac{5}{4}$ et $c = -\frac{3}{4}$

- Il reste à déterminer les coordonnées de R et Q.

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XR} = (1,2,-1) + \frac{5}{4}(1,-1,2) = \left(\frac{9}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OY} + \overrightarrow{YQ} = (1,-2,0) + \frac{3}{4}(-1,1,2) = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

On retrouve bien les mêmes points.

b) Méthode du vecteur normal (Figure 3)

Exprime simplement que $\overrightarrow{RQ} = k\overrightarrow{v_p}$ $(k \in \mathbb{R})$ sachant que $R \in d_1$ et $Q \in d_2$

$$(r+1+s-1,-r+2-s+2,2r-1-2s) = k(1,1,0)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r+s-k=0 \\ r+s+k=4 \\ 2r-s=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 5/4 \\ s = 3/4 \\ k=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \left(1+\frac{5}{4},2-\frac{5}{4},-1+\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{9}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{2}\right) \\ Q = \left(1-\frac{3}{4},-2+\frac{3}{4},2.\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{1}{4},-\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right) \end{cases}$$

Note

Cette méthode est rapide et nous donne au passage la perpendicuaire Δ_p et la distance $d(d_1 d_2)$ puisque que nous connaissons les points *R* et *Q*.

$$\Delta_p \equiv \begin{cases} x = 1/4 + h \\ y = -5/4 + h \\ z = 3/2 \end{cases} \text{ ou } \Delta_p = \begin{cases} x - y = 3/2 \\ z = 3/2 \end{cases}$$

et $d(d_1,d_2) = \left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = \left\|2(1,1,0)\right\| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

Autre exemple

Utiliser la méthode du vecteur normal pour déterminer les points les plus proches, la distance et la perpendiculaire commune des deux droites suivantes :

$$d_1 \equiv \begin{cases} x = r \\ y = 1-r \\ z = 2+r \end{cases} \qquad \text{et} \qquad d_2 \equiv \begin{cases} x = 1-s \\ y = 2s \\ z = 3+s \end{cases}$$

Solution

$$\overrightarrow{v_p} = (1,-1,1)\times(-1,2,1) = (-3,-2,1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r-1+s=-3k \\ 1-r-2s=-2k \\ 2+r-3-s=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r = 7/5 \\ s = 4/5 \\ k = -2/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R = \left(7/5,-2/5,17/5\right) \\ Q = \left(1/5,8/5,19/5\right) \\ \overrightarrow{RQ} = \left(6/5,4/5,-2/5\right) \end{cases}$$

$$\Delta_p \equiv \frac{x-7/5}{-3} = \frac{y+2/5}{-2} = z - 17/5, \quad d(d_1,d_2) = \left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = \frac{2\sqrt{14}}{5}$$

EXGAE149 - EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2018.

L'espace est muni d'un système d'axes orthonormés *Oxyz*. Soit *A*, le point de coordonnées $(1,3,\alpha)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$ est un paramètre variable, et soit d la droites d'équations cartésiennes

$$d \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases}$$

a) Donnez les équations cartésiennes de la droite $d' = OA$.

b) Existe-t-il une valeur de α pour laquelle d et d' sont secantes?
Si oui, déterminez l'insersection P de ces droites pour cette valeur.

c) Existe-t-il une valeur de α pour laquelle d et d' sont orthogonales?
Si oui, déterminez cette valeur.

d) Existe-t-il une valeur de α pour laquelle d et d' sont parallèles?
Si oui, déterminez cette valeur.

e) On fixe maintenant $\alpha = 1$. Déterminez les équations cartésiennes des plans π et π' tels que $d \subset \pi, d' \subset \pi'$ et $\pi \parallel \pi'$.

Les équations de la droite d peuvent s'écrire :

$$d \equiv \begin{cases} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad x + 1 = \frac{y-1}{2} = z \quad \text{ou encore } d \equiv \begin{cases} x = -1 + k \\ y = 1 + 2k \\ z = k \end{cases}$$

On en déduit que le vecteur directeur de d est $\overrightarrow{v_d} = (1,2,1)$ et que $A = (-1,1,0)$ est un point de d.

a) La droite d' est $d' \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z}{\alpha}$ ou encore $d' \equiv \begin{cases} x = h \\ y = 3h \\ z = \alpha h \end{cases}$ avec $\overrightarrow{v_{d'}} = (1,3,\alpha)$

b) $P \equiv d \cap d'$ est donné par les équations paramètriques : $\begin{cases} -1 + k = h \\ 1 + 2k = 3h \\ k = \alpha h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 3 \\ h = 4 \\ \alpha = 4/3 \end{cases}$

$\Rightarrow P \equiv (3,9,4)$

c) Les droites seront orthogonales si le produit scalaire de leur vecteur directeur est nul.

$\overrightarrow{v_d}.\overrightarrow{v_{d'}} = (1,2,1).(1,3,\alpha) = 1 + 6 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -7.$

d) Pour que les droites soient parallèles, il faut que les vecteurs directeurs soient parallèles. Autrement dit, que les composantes soient proportionnelles, ce qui n'est pas possible ici. Il n'existe aucun nombre réel β tel que $\overrightarrow{v_d} = \beta\, \overrightarrow{v_{d'}}$.

e) Les deux plans seront parallèles s'ils ont un même vecteur normal. Celui-ci est égale au produit vectoriel des deux vecteurs directeurs. $\vec{n} = \overrightarrow{v_d} \times \overrightarrow{v_{d'}} = (1,2,1) \times (1,3,1) = (-1,0,1)$

- $\pi \equiv -x + z + d = 0.$ Or $A \in \pi \Rightarrow d = -1 \Rightarrow \pi \equiv -x + z - 1 = 0$
- $\pi' \equiv -x + z + d = 0.$ Or $O \in \pi \Rightarrow d = 0 \Rightarrow \pi \equiv -x + z = 0$