Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 3

EXGAE030 – EXGAE039

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Avril 04

EXGAE030– FCSA, ULG, Liège, juillet 2003.

Pour tous réels *a, b, c* non simultanément nuls, on considère le plan

$$\pi_{abc} \equiv ax + by + cz = 1$$

1. Déterminer les conditions sur *a, b c* pour que la distance de π_{abc} à l'origine soit égale à 1
2. Déterminer les conditions sur *a, b c* pour que π_{abc} soit parallèle à la droite

$$d \equiv \begin{cases} x = y \\ y = z \end{cases}$$

3. Déterminer le lieu géométrique de l'intersection de π_{abc} et de la droite perpendiculaire à π_{abc} passant par l'origine, quand les paramètres *a, b, c* satisfont les conditions 1) et 2)

---

1) Vecteur normal à π_{abc} : $\vec{n} : (a,b,c)$

Vecteur normal unitaire : $\vec{1_n} : \dfrac{(a,b,c)}{\|\vec{n}\|}$

Soit un point du plan : $\left(\dfrac{1}{a};0;0\right)$

Distance de l'origine au plan : $\mathrm{d}(\pi_{abc}, O) = \left(\dfrac{1}{a};0;0\right)\dfrac{(a,b,c)}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{1}{\|\vec{n}\|} = 1$

$\rightarrow \|\vec{n}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 1.$ C'est la première condition.

2) Soient deux points de la droite d $\quad O(0;0,0) \quad P(1,1,1)$

Vecteur directeur de la droite d $\quad \vec{v_d} : (1,1,1)$

π_{abc} est parallèle à d si : $(a,b,c)(1,1,1) = 0$

$\rightarrow a + b + c = 0$ C'est la deuxième condition.

Note : On peut déterminer $\vec{v_d}$ comme suit

Plan $x = y$ vecteur normal $(1,-1,0)$

Plan $y = z$ vecteur normal $(0,1,-1)$

$\rightarrow \vec{v_d} = (1,-1,0) \wedge (0,1,-1) = (1,1,1)$

3) Equation de la droite perpendiculaire à π_{abc} et passant par l'origine

$$\begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases} \rightarrow \text{ point de percée vérifie l'équation du plan : } a^2k + b^2k + c^2k = 1$$

$\rightarrow k = \dfrac{1}{a^2 + b^2 + c^2} = \dfrac{1}{1} = 1 \quad \rightarrow$ point d'intersection (a,b,c)

Et le lieu cherché est donc : $x + y + z = 0$ $\quad$ (En vertu de la deuxième condition)

EXGAE031– FACSA, ULG, Liège, septembre 2003.

On considère les droites d_1 et d_2 données par leurs équations dans un repère orthonormé de l'espace :

$$d_1 \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \quad ; \quad d_2 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que d_1 et d_2 sont gauches.
2. Ecrire l'équation du plan π parallèle à d_1 et d_2 et qui contient le point P de coordonnées (1, 1, 1)
3. Ecrire l'équation d'une droite perpendiculaire à π et qui s'appuie sur d_1 et d_2.

---

1) Il suffit de vérifier que le système suivant est impossible :

$$\begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2y - z = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad \text{Impossible}$$

2) Soients deux points de d_1 $\left(0,0,0\right)$ et $\left(1,2,3\right) \rightarrow \overrightarrow{v_{d_1}} : \left(1,2,3\right)$

Soients deux points de d_2 $\left(1,0,0\right)$ et $\left(1,1,2\right) \rightarrow \overrightarrow{v_{d_2}} : \left(0,1,2\right)$

$\rightarrow \overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_{d_1}} \wedge \overrightarrow{v_{d_2}} = \left(1,2,3\right) \wedge \left(0,1,2\right) = \left(1,-2,1\right)$

$\rightarrow \pi \equiv x - 2y + z - d = 0$

Et comme π passe par l'origine P: $1 - 2 + 1 - d = 0 \rightarrow d = 0$

$\rightarrow \pi \equiv x - 2y + z = 0$

3) La droite p est définie par deux plans.

π_1 contenant d_1 et parallèle à $\overrightarrow{n_\pi}$ avec $\left(0,0,0\right) \in d_1$

$$\rightarrow \begin{cases} x = h + t \\ y = 2h - 2t \\ z = 3h + t \end{cases} \rightarrow \pi_1 \equiv 4x + y - 2z = 0$$

π_2 contenant d_2 et parallèle à $\overrightarrow{n_\pi}$ avec $\left(1,0,0\right) \in d_2$

$$\rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = k - 2t \\ z = 2k + t \end{cases} \rightarrow \pi_2 \equiv 5x + 2y - z = 5$$

$$\rightarrow p \equiv \begin{cases} 4x + y - 2z = 0 \\ 5x + 2y - z = 5 \end{cases}$$

EXGAE032– FSA, ULB, Bruxelles, juillet 2003.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X,Y et Z, on donne le point P (1, 2, –3), le plan β d'équation $2X - Y - 2Z = 0$ et la droite d parallèle au vecteur (2, –1, –2) et qui passe par le point A (4, –1, –3).

a) Formez une équation cartésienne du plan α passant par P et contenant d.
b) Formez une équation cartésienne du plan γ passant par P et parallèle au plan β
c) Formez des équations cartésiennes de la droite c, intersection des plans α et β.
d) Déterminez l'angle des droites d et c.
e) Déterminez les coordonnées du point Q, intersection de c et d ainsi que la distance de P à Q.

$$P(1,2,-3) \quad \beta \equiv 2x - y - 2z = 0 \quad d \equiv \begin{cases} \overrightarrow{u_d} : (2,-1,-2) \\ A(4,-1,-3) \end{cases}$$

$$a)\ \overrightarrow{AP}(-3,3,0) \ \rightarrow \ \alpha \equiv \begin{cases} x = 1 + 2k - 3h \\ y = 2 - k + 3h \\ z = -3 - 2k \end{cases} \rightarrow \boxed{\alpha \equiv 2x + 2y + z - 3 = 0}$$

$$b)\ \overrightarrow{n_\beta} : (2,-1,-2) \ \rightarrow \ \gamma \equiv 2x - y - 2z = d$$

or $P \in \gamma \ \rightarrow 2\times 1 - 2 + 2\times 3 = d \ \rightarrow d = 6$

$$\boxed{\gamma \equiv 2x - y - 2z = 6}$$

$$c)\ \boxed{c \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z - 3 = 0 \\ 2x - y - 2z = 6 \end{cases}}$$

$$d)\ \overrightarrow{u_c} = (2,2,1) \wedge (2,-1,-2) = (-1,2,-2)$$

angle (d,c): Les deux droites sont perpendiculaires car $\overrightarrow{u_c} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0$

$$e)\ d \equiv \begin{cases} x = 4 + 2k \\ y = -1 - k \\ z = -3 - 2k \end{cases}$$

On remplace l'équation de $\gamma \rightarrow 2(4+2k) - (-1-k) - 2(-3-2k) = 6$

$$\rightarrow k = -1 \ \rightarrow \ \boxed{Q(2,0,-1)}$$

$$|PQ| = \sqrt{(2-1)^2 + (0-2)^2 + (-1+3)^2} = \boxed{3}$$

EXGAE033– FSA, ULB, Bruxelles, septembre 2003.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X,Y et Z , on donne le point P (1, 2, 1) et le plan β d'équation X + Y + Z – 2 = 0.

a. Formez des équations cartésiennes de la droite d passant par P qui est parallèle au vecteur (2, 1, 1)
b. Déterminez les coordonnées cartésiennes du point *Q*, intersection de *d* et β.
c. Déterminez des équations cartésiennes de la droite *c*, projection orthogonales de *d* sur le plan β.
d. Déterminez une équation cartésienne du plan α perpendiculaire à *d* et contenant *P*.
e. Déterminez des équations cartésiennes de la droite *e* , intersection des plans α et β.
f. Calculez l'angle formé par les droites *c* et *e*.

$$P(1,2,1) \qquad \beta \equiv x+y+z-2=0 \quad (1)$$

$$a)\ d \equiv \begin{cases} x=1+2k \\ y=2+k \\ z=1+k \end{cases} \quad (1) \ \rightarrow \ \boxed{d \equiv \frac{x-1}{2}=y-2=z-1}$$

$$b)\ (1) \text{ et } (2) \ \rightarrow\ 1+2k+2+k+1+k-2=0 \rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{Q:\left(0,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}$$

$c)$ c est formé par le plan β lui-même, et le plan dont le vecteur normal est

$$\overrightarrow{n_\beta}\wedge\overrightarrow{u_d}=(1,1,1)\wedge(2,1,1)=(0,1,-1) \quad \rightarrow y-z=D$$

et comme ce plan passe par Q $\rightarrow$ $D=1$

$$\rightarrow \boxed{c \equiv \begin{cases} x+y+z-2=0 \\ y-z=1 \end{cases}}$$

$$d)\ \alpha \equiv 2x+y+z=D$$

Ce plan passe par P $\rightarrow$ $2+2+1=5=D$

$$\rightarrow \boxed{\alpha \equiv 2x+y+z=5}$$

$$e)\ \boxed{e \equiv \begin{cases} 2x+y+z=5 \\ x+y+z-2=0 \end{cases}}$$

$$f)\ \overrightarrow{u_c}:(1,1,1)\wedge(0,1,-1)=(-2,1,1)$$

$$\overrightarrow{u_e}:(2,1,1)\wedge(1,1,1)=(0,-1,1)$$

Comme $\overrightarrow{u_c}.\overrightarrow{u_e}=0,$ les deux droites sont perpendiculaires

EXGAE034– EPL, UCL, Louvain, juillet 2002, série 1.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *OXYZ*, on considère les éléments suivants :

- Deux points : $A\ (a, 2, 2)$ et $B\ (2, a, -3)$.
- La droite $p \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases}$
- Le plan $\alpha \equiv x + 3y - 2az + 10 = 0$

Où *a* est un paramètre réel.

On vous demande :

a. De donner les valeurs de *a* telles que les droites *p* et *AB* soient parallèles
b. De donner une équation pour le plan β parallèle au plan α et passant par *B*.
c. De donner les valeurs de *a* telles que la droite *AB* soit parallèle au plan *α*.

$$A:(a,2,2) \quad B:(2,a,-3) \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{AB}:(2-a,\, a-2,\, -5)$$

$$p \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = a \end{cases} \quad \rightarrow \overrightarrow{u_P}:(0,0,1)$$

$$a)\ \overrightarrow{AB} // p \quad \rightarrow \begin{cases} 2-a = k0 \\ a-2 = k0 \\ 1 = k(-5) \end{cases} \quad \rightarrow \quad a = 2$$

$$b)\alpha \equiv x + 3y - 2az + 10 = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{n_\alpha}:(1, 3, -2a)$$

$$\alpha // \beta \ \rightarrow \ \beta \equiv x + 3y - 2az + d = 0$$

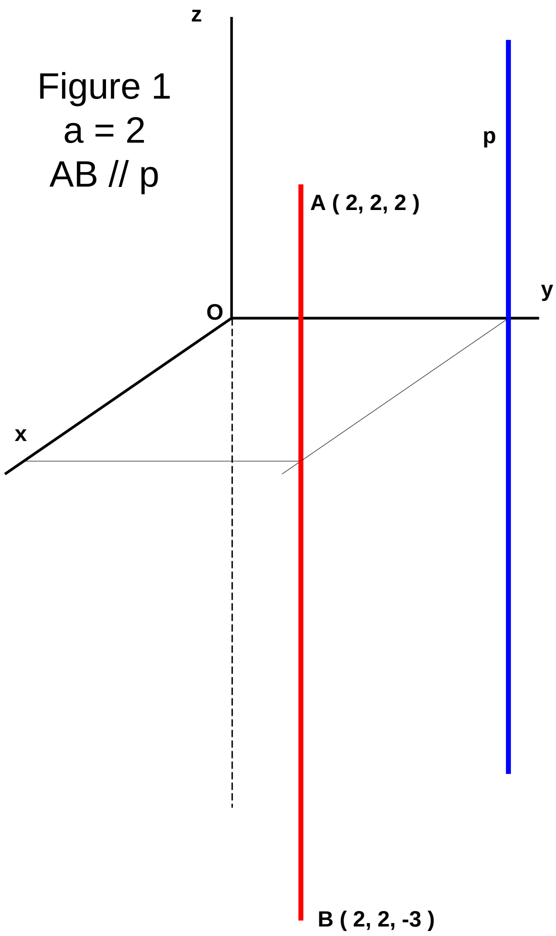
$$B \in \beta \ \rightarrow \ 2 + 3a + 6a + d = 0 \ \rightarrow \ d = -(2+9a)$$

$$\beta \equiv x + 3y - 2az - (2+9a) = 0$$

$$c)\ \overrightarrow{AB} // \alpha \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{n_\alpha} = 0$$

$$\rightarrow\ 1.(2-a) + 3.(a-2) + 5.(2a) = 0$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{3}$$


z
Figure 1
a = 2
AB // p
p
A (2, 2, 2)
y
O
x
B (2, 2, -3)

EXGAE035– EPL, UCL, Louvain, juillet 2002, série 2.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *OXYZ*, on considère les éléments suivants :

- Les droites $p \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 5 \\ z = 9 + s \end{cases}$ $q \equiv \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases}$
- Une sphère S de rayon $r = 9$ et de centre $A : (a, b, c)$
- On vous demande de déterminer les coordonnées (a, b, c) afin de satisfaire les conditions ci-dessous.

d. Le centre A de la sphère appartient à la droite p.
e. La sphère est tangente à la droite q : en d'autres mots, on peut définir B comme l'unique intersection entre S et q , et on peut observer que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est perpendiculaire à la droite q.

$$p \equiv \begin{cases} x = 2 + s \\ y = 5 \\ z = 9 + s \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{u_P} : (1, 0, 1) \quad q \equiv \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = t \\ z = 2 - t \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{u_q} : (4, 1, -1)$$

Soit $B : (i,\ j,\ k) \in q,$ le point de tangence de q à la sphère

On a aussi $A : (a, b, c) \in p$

$\rightarrow \overrightarrow{AB} : (i - a,\ j - b,\ k - c)$

Or $\overrightarrow{AB} \perp q \ \rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{u_q} = 0 \rightarrow 4i - 4a + j - b - k + c = 0$

On remplace i, j, k et a, b, c

$\rightarrow -12 + 16t - 8 - 4s + t - 5 - 2 + t + 9 + s = 0 \quad \rightarrow s = 6t - 6$

D'autre part, $\left|\overrightarrow{AB}\right| = r = 9$

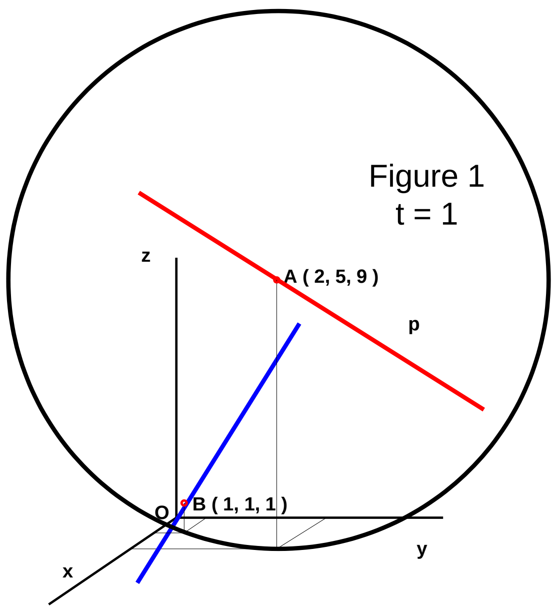
$\rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = (i - a)^2 + (j - b)^2 + (k - c)^2 = 81$

$\rightarrow \ (2t - 1)^2 + (t - 5)^2 + (7t + 1)^2 +^2 - 81 = 0 \quad \rightarrow \quad t = \pm 1$

Conclusions

$t = 1 \quad \rightarrow \quad A : (2, 5, 9) \qquad B : (1, 1, 1)$

$t = -1 \rightarrow \quad A : (-10, 5, -3) \quad B : (-7, -1, 3)$



Résolu le 24 juin 2004

EXGAE036– EPL, UCL, Louvain, septembre 2002.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *OXYZ*, on considère les éléments suivants :

- Les droites $p \equiv \begin{cases} -2x-2 = y+3 \\ y+3 = -4+2z \end{cases}$ et $q \equiv \begin{cases} x+1 = -2y-6 \\ y+3 = 2-z \end{cases}$
- Le plan $\alpha \equiv 7\,x + y - 7\,z = 0$

On vous demande de déterminer le(s) point(s) *P* de la droite *p* et *Q* de la droite *q* tels que :

f. Le segment de droite *PQ* soit de longueur $3\sqrt{2}$
g. Et le segment de droite soit parallèle au plan α

$\alpha \equiv 7x + y - 7z = 0 \;\rightarrow\; \overrightarrow{n_\alpha} : (7, 1, -7)$

$\overrightarrow{PQ} : (a, b, c) // \alpha \;\rightarrow\; \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{n_\alpha} = 0 \;\rightarrow\; 7a + b - 7c = 0$

Transformons les équations cartésiennes des droites en équations paramétriques : $p \equiv \begin{cases} x = -1 - \frac{1}{2}h \\ y = -3 + h \\ z = 2 + \frac{1}{2}h \end{cases}$ $q \equiv \begin{cases} x = -1 - 2k \\ y = -3 + k \\ z = 2 - k \end{cases}$

Soit $P : (x_P, y_P, z_P) \;\rightarrow P : \left(-1 - \frac{1}{2}h, -3 + h, 2 + \frac{1}{2}h \right)$

et $Q : (x_Q, y_Q, z_Q) \rightarrow Q : \left(-1 - 2k, -3 + k, 2 - k \right)$

On déduit donc le système :

$$\begin{cases} -1-\dfrac{1}{2}h+1+2k=a \\ -3+h+3-k=b \\ 2+\dfrac{1}{2}h-2+k=c \\ 7a+b-7c=0 \end{cases} \quad \rightarrow \text{En remplacant } a, b \text{ et } c \text{ dans la dernière équation}$$

$$\rightarrow h=k \rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{2}h \\ b=0 \\ c=\dfrac{3}{2}h \end{cases} \quad \rightarrow a=c \text{ et } b=0$$

D'autre part, $\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2=18 \rightarrow a^2+b^2+c^2=18$

$\rightarrow a=\pm 3$

1) $\underline{a=3} \rightarrow b=0\,,\,c=3$

$\rightarrow h=k=2 \rightarrow P:\left(-2,-1,3\right)$ et $Q:\left(-5,-1,0\right)$

On vérifie facilement $\overrightarrow{PQ}:\left(-3,0,-3\right);\left|\overrightarrow{PQ}\right|=3\sqrt{2};\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{n_\alpha}=0$

1) $\underline{a=-3} \rightarrow b=0\,,\,c=-3$

$\rightarrow h=k=-2 \rightarrow P:\left(0,-5,1\right)$ et $Q:\left(3,-5,4\right)$

On vérifie facilement $\overrightarrow{PQ}:\left(3,0,3\right);\left|\overrightarrow{PQ}\right|=3\sqrt{2};\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{n_\alpha}=0$

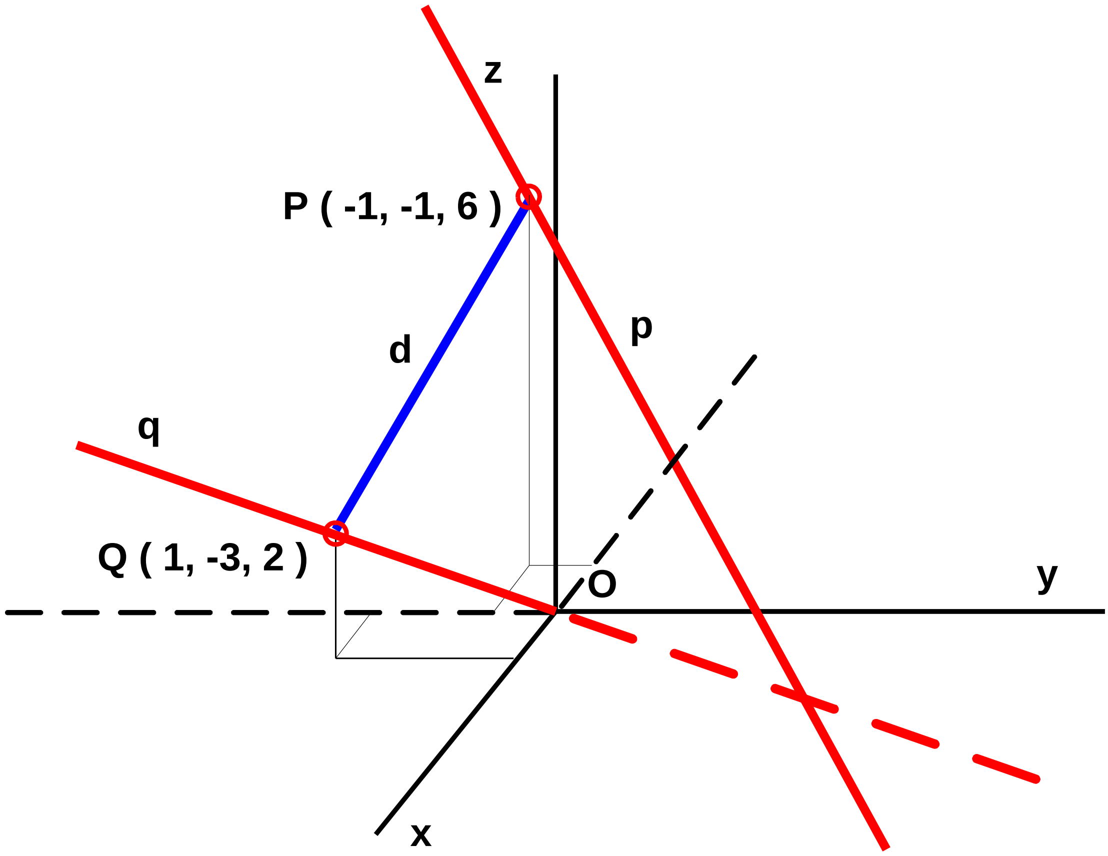
Résolu le 24 juin 2004

EXGAE037– EPL, UCL, Louvain, juillet 2003, série 1.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *Oxyz* on considère les droites

$$p \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 6 \end{cases} \qquad q \equiv \begin{cases} y = -3x \\ z = 2x \end{cases}$$

On vous demande de donner les équations paramétriques de la droite *d* perpendiculaire à chacune de ces droites.



$$p \equiv \begin{cases} x = y \\ z = 6 \end{cases} \quad \rightarrow \quad p \equiv \begin{cases} x = h \\ y = h \\ z = 6 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{u_p} : (1,1,0)$$

$$q \equiv \begin{cases} y = -3x \\ z = 2x \end{cases} \quad \rightarrow \quad q \equiv \begin{cases} x = k \\ y = -3k \\ z = 2k \end{cases} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{u_q} : (1;-3,2)$$

Le vecteur directeur de la droite perpendiculaire à p et q est donné par :

$$\overrightarrow{u_d} = \overrightarrow{u_p} \wedge \overrightarrow{u_q} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{1_x} & \overrightarrow{1_y} & \overrightarrow{1_z} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (1,-1,-2)$$

Soit $P' : (0,0,6)$ un point quelconque de la droite p.

Le plan α_p est déterminé par $\overrightarrow{u_p}$ et $\overrightarrow{u_n}$ et P'

$$\alpha_p \equiv \begin{cases} x = 0 + l + m \\ y = 0 + l - m \\ z = 6 \quad - 2m \end{cases} \quad \rightarrow \alpha_p \equiv x - y + z = 6$$

Soit Q ,le point de percée de q dans α_p

$$\rightarrow \begin{cases} x - y + z = 6 \\ y = -3x \\ z = 2x \end{cases} \quad \rightarrow \quad Q : (1,-3,2)$$

Les équations de d, perpendiculaire à p et q, sont donc

Paramétriques : $d \equiv \begin{cases} x = 1 + k \\ y = -3 - k \\ z = 2 - 2k \end{cases}$

Cartésiennes : $d \equiv 1 - x = y + 3 = \dfrac{z-2}{2}$

Bien que ce ne soit pas demandé dans la question, calculons la distance des deux droites p et q

Méthode 1

On détermine P point de percée de p dans le plan α_q déterminé par $\overrightarrow{u_q}$ et $\overrightarrow{u_n}$ et $Q':(0,0,0)$ un point de q

$$\alpha_q \equiv \begin{cases} x = l + m \\ y = -3l - m \\ z = 2l - 2m \end{cases} \quad \rightarrow \quad \alpha_q \equiv 4x + 2y + z = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4x + 2y + z = 0 \\ x = y \\ z = 6 \end{cases} \qquad \rightarrow \quad P:(-1,-1,6)$$

$$\rightarrow d(p,q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 4^2} = 2\sqrt{6}$$

Méthode 2

Soit le vecteur unitaire $\overrightarrow{1_n} = \dfrac{\overrightarrow{u_n}}{\left|\overrightarrow{u_n}\right|} = \dfrac{(1,-1,-2)}{\sqrt{6}}$

$\overrightarrow{P'Q'}:(0,0,-6)$ (on peut prendre deux points quelconques)

$$d(p,q) = \overrightarrow{1_n} \,.\, \overrightarrow{P'Q'} = \frac{(1,-1,-2)}{\sqrt{6}} \,.\, (0,0,-6) = 2\sqrt{6}$$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 29 aout 2004.

EXGAE038– EPL, UCL, Louvain, juillet 2003, série 2.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les éléments suivants :

- Deux points A = (5 ; 0 ; 3) et B = (-1 ; 4 ; 4),
- La droite $d \equiv \begin{cases} x = -6 - k \\ y = k \\ z = 2 - 8k \end{cases}$
- Le plan α contenant d et perpendiculaire au plan *Oxy*
- Le plan $\beta \equiv 2x + 2y + z + 1 = 0$

On vous demande :

-1- De donner une équation du plan α
-2- De déterminer le (ou les) point(s) pour que le triangle *ABC* soit rectangle, *AC* soit parallèle à α et *BC* soit parallèle à β.

$$a)\ \ d \equiv \begin{cases} x = -6 - k \\ y = k \\ z = 2 - 8k \end{cases} \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{u_d} : (-1, 1, -8) \qquad D : (-6, 0, 2)$$

Où D est un point quelconque de d

Si α est perpendiculaire au plan Oxy, alors $\overrightarrow{Oz} : (0, 0, 1)$ est parallèle à α.

$$\rightarrow \alpha \equiv \begin{cases} x = -6 - k \\ y = k \\ z = 2 - 8k + h \end{cases} \quad \rightarrow \quad \alpha \equiv x + y + 6 = 0 \quad \rightarrow \quad \overrightarrow{n_\alpha} : (1, 1, 0)$$

$b)$ On doit envisager les cas ou le triangle est retangle en A, en B et en C

Soit $C : (x_c, y_c, z_c)$, le point cherché,

$\rightarrow\ \overrightarrow{AC} : (x_c - 5, y_c, z_c - 3)\ \ et\ \ \overrightarrow{BC} : (x_c + 1, y_c - 4, z_c - 4)$

et $\overrightarrow{AB} : (-1 - 5, 4 - 0, 4 - 3) = (-6, 4, 1)$

Triangle rectangle en A

$\rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = (-6,4,1).(x_c-5, y_c, z_c-3) = -6x_c + 4y_c + z_c + 27 = 0 \quad (1)$

Si $\overrightarrow{AC} // \alpha \quad \rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n_\alpha} = (x_c-5, y_c, z_c-3).(1,1,0) = x_c + y_c - 5 = 0 \quad (2)$

Si $\overrightarrow{BC} // \beta \quad \rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{n_\beta} = (x_c+1, y_c-4, z_c-4).(2,2,1) = 2x_c + 2y_c + z_c - 10 = 0 \quad (3)$

$(1),(2)$ et (3) forment un système qui a pour solution $C:\left(\frac{47}{10},\frac{3}{10},0\right)$

Triangle rectangle en B $\quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\rightarrow (-6,4,1).(x_c+1, y_c-4, z_c-4) = -6x_c + 4y_c + z_c - 26 = 0 \quad (4)$

$(4),(2)$ et (3) forment un système qui a pour solution $C:\left(-\frac{3}{5},\frac{28}{5},0\right)$

Triangle rectangle en C $\quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\rightarrow (x_c-5, y_c, z_c-3).(x_c+1, y_c-4, z_c-4) = 0$

$\rightarrow (x_c-5)(x+1) + y_c(y_c-4) + (z_c-3)(z_c-4) = 0 \quad (5)$

$(5),(2)$ et (3) forment un système

De (2) et (3), on tire $z_c = 0$ et $y_c = 5 - x_c$

On remplace dans $(4) \rightarrow x_c^{\,2} - 5x_c + 6 = (x_c-3)(x_c-2) = 0$

1) $x_c = 3 \qquad C:(3,2,0)$

2) $x_c = 2 \qquad C:(2,3,0)$

Résolu le 24 juin 2004

EXGAE039– Louvain, septembre 2003.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les droites

$$p \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \qquad q \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

On vous demande :

-1- De dessiner les deux droites de l'énoncé du problème.
-2- De déterminer analytiquement des équations cartésiennes et paramétriques de la droite *d* qui coupe les deux droites *p* et *q* sachant que le vecteur directeur de *d* est (1 ; 2 ; 3)

Soit $D:(0, y_D, z_D)$ un point de d

$$\to d \equiv \frac{x}{1} = \frac{y - y_D}{2} = \frac{z - z_D}{3}$$

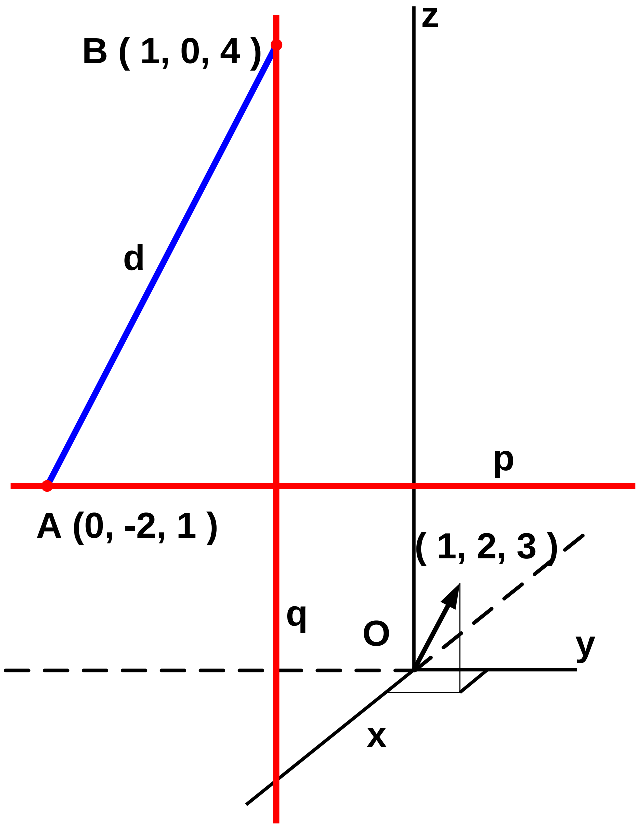
Cherchons $A:(x_A, y_A, z_A) = p \cap d \quad \to \begin{cases} x_A = 0 \\ z_A = 1 \\ 2x_A = y_A - y_D \\ 3x_A = z_A - z_D \end{cases} \to \begin{cases} x_A = 0 \\ y_A = y_D \\ z_A = 1 \\ z_D = 1 \end{cases} \quad (1)$

Cherchons $B:(x_B, y_B, z_B) = q \cap d \quad \to \begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = 0 \\ 2x_B = y_B - y_D \\ 3x_B = z_B - z_D \end{cases} \to \begin{cases} x_B = 1 \\ y_B = 0 \\ y_D = -2 \\ z_B - z_D = 3 \end{cases} \quad (2)$

De (1) et (2) $\quad \to \begin{cases} A:(0,-2,1) \\ B:(1,0,4) \\ D:(0,-2,1) \end{cases}$

Et les équations de la droite sont :

$$\begin{cases} x = k \\ y = -2 + 2k \\ z = 1 + 3k \end{cases} \quad \text{ou bien} \quad x = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$$



Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 6 septembre 2004.