Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique dans l'espace

GAE 7

EXGAE070 – EXGAE079

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

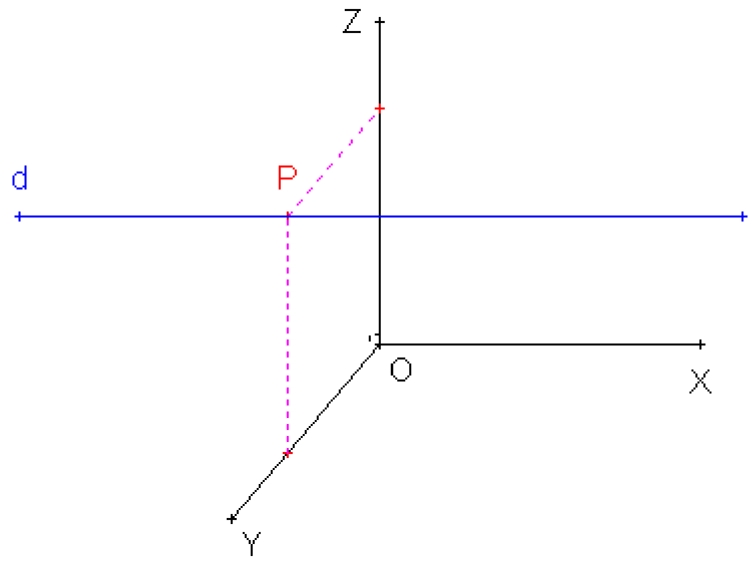
Juillet 08

EXGAE70 - Bruxelles, juillet 2007

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine *O* et d'axes *X*, *Y* et Z, on donne le point *P*(0,3,4).

1) établir des équations cartésiennes de la droite *d* parallèle à *OX*, passant par *P*
2) établir une équation cartésienne du plan contenant *d* et l'axe *OX*
3) déterminer les coordonnées des sommets *Q* et *R* du carré *OPQR*, sachant que *Q* est sur *d* et que son abscisse est positive
4) établir des équations paramétriques de la perpendiculaire *p* au plan du carré passant par le centre de celui-ci
5) déterminer les coordonnées des points *S* et *S'*, sommet des pyramides droites dont le carré est la base et donc les hauteurs mesurent cinq unités de longueur
6) déterminer le cosinus de l'angle aigu des arrêtes *SO* et *SP*, une équation cartésienne du plan *OPS*, la longueur de l'arête *OS* ainsi que le volume du polyèdre *OPQRSS'*

Solution proposée par Steve Tumson



1) L'équation vectorielle de d s'écrit : $\vec{d} = \overrightarrow{OP} + \lambda\overrightarrow{OA}$ avec A un point quelconque sur OX

L'équation paramétrique d s'écrit : $d \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si on choisit $A = 1$

Et en cartésien : $\boxed{d \equiv \begin{cases} y = 3 \\ z = 4 \end{cases}}$

2) L'équation vectorielle du plan π s'écrit : $\pi = \vec{0} + r\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{OA} \quad \forall r, s \in \mathbb{R}$

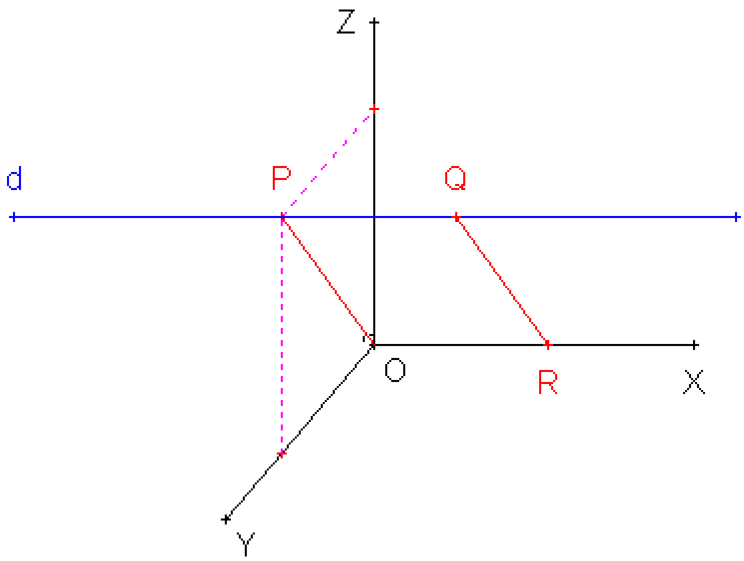
En paramétrique : $\pi \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall r, s \in \mathbb{R}$

En cartésien : $\boxed{\pi \equiv 4y - 3z = 0}$

On aurait aussi pu trouver le vecteur normal au plan qui nous donne les coefficients :

$$\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OA} = dét \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 4\hat{y} - 3\hat{z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \pi \equiv 4y - 3z = d$$

Le plan passant par l'origine, on a $d = 0$ et on retrouve bien l'équation trouvée tout à l'heure.

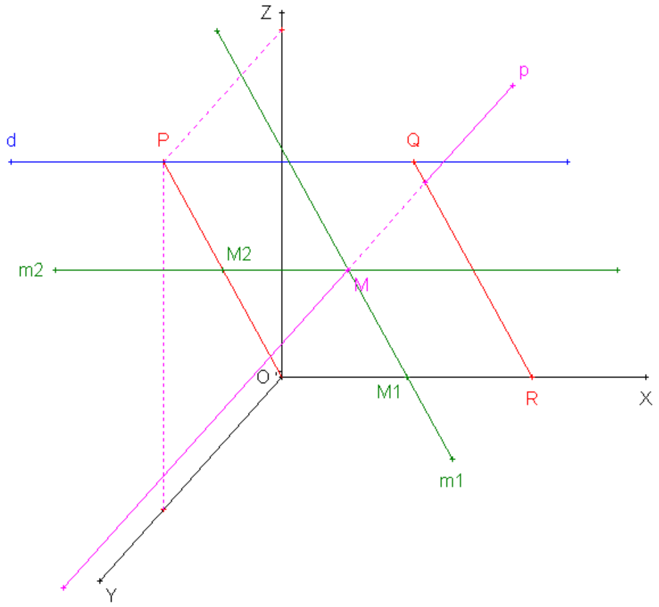


3) Le carré doit forcément se trouver dans le plan π trouvé au point précédent pour conserver les angles droits. Le carré est de longueur :

$$\left\|\overrightarrow{OP}\right\| = \sqrt{0^2+3^2+4^2} = 5$$

Le point Q et R sont donc la translation respectivement de P et O de longueur 5 et de direction OX. On trouve donc :

$$\boxed{Q(5,3,4)} \text{ et } \boxed{R(5,0,0)}$$



4) Il faut d'abord trouver le milieu du carré. C'est l'intersection des deux médianes du carré.

On calcule le milieu de OP et OR : $M_1 = \left(\frac{5}{2},0,0\right)$ et $M_2 = \left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},2\right)$

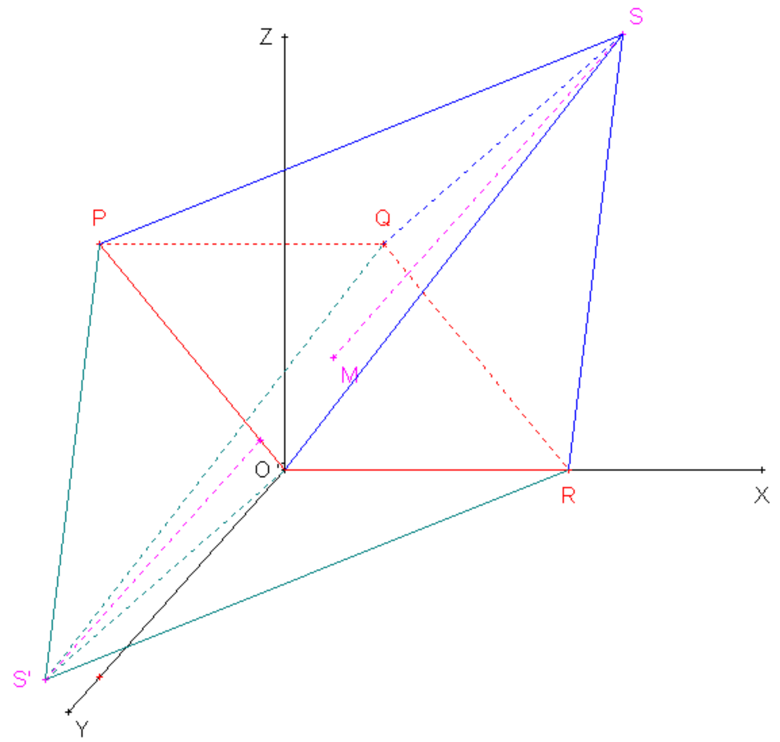
Les médianes ont donc pour équation : $\begin{cases} \overrightarrow{m_1} = \overrightarrow{OM_1} + k_1\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \overrightarrow{m_2} = \overrightarrow{OM_2} + k_2\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} + k_1\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2.5 \\ y = 3k_1 \\ z = 4k_1 \\ x = 5k_2 \\ y = 1.5 \\ z = 2 \end{cases}$

On trouve donc : $M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},2\right)$

Il reste à trouver la direction perpendiculaire au plan π

qui nous est donné par les coefficients du plan : $\overrightarrow{v_n} = (0,4,-3)$

L'équation de p est donc : $\boxed{\vec{p} = \overrightarrow{OM} + u\overrightarrow{v_n} \Leftrightarrow p \equiv \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}}$



5) Pour trouver S et S' à 5 unités de M, il suffit de déterminer le paramètre u de l'équation de p pour obtenir $u\left\|\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\right\|=5$

Or, $\left\|\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{0^2+3^2+4^2}=5$

Le point S et S' sont donc fixé par $u=\pm 1$

On trouve donc :

$$\boxed{S=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\1.5\\2\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\5.5\\-1\end{pmatrix}} \quad \text{et} \quad \boxed{S'=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\1.5\\2\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0\\4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.5\\-2.5\\5\end{pmatrix}}$$

6) Nous avons, du côté supérieur du plan π, une pyramide droite dont la base est de côté 5 et la hauteur est aussi 5.

On peut calculer la longueur $|OP|$ par Pythagore : $|OP| = \sqrt{2.5^2 + 2.5^2} \approx 5.535$

De là, on peut calculer la longueur des 4 arêtes de notre pyramide (qui sont évidemment égales) :

$$|PS| = |QS| = |RS| = |OS| = \sqrt{5^2 + |OP|^2} = \frac{5\sqrt{6}}{2} \approx 6.214$$

D'autre part, le cosinus de l'angle entre deux arrêtes s'obtient par simple relation dans les triangles rectangles. Il suffit de projeter S sur OP via le plan OPS.

Nous appellerons ce point le point B.

Par Pythagore, on a : $|SB| = \sqrt{2.5^2 + 5^2} \approx 5.59$

On trouve au final : $\boxed{\cos\theta = \frac{2}{3}}$

Le volume vaut deux fois le volume d'une pyramide droite est (si S représente la surface de la base) : $\boxed{V = 2\frac{Sh}{3} = \frac{250}{3} \approx 83.33}$

Pour terminer, l'équation du plan OPS est :

$$\overrightarrow{OPS} = \vec{0} + v\overrightarrow{OP} + w\overrightarrow{OS} \Leftrightarrow OPS \equiv v\begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} + w\begin{pmatrix}2.5\\5.5\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{5}{2}w \rightarrow w = \frac{2x}{5} \\ y = 3v + \frac{11}{2}w \\ z = 4v - w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = \frac{2x}{5} \\ y = 3v + \frac{11x}{5} \\ z = 4v - \frac{2x}{5} \rightarrow v = \frac{z}{4} + \frac{x}{10} \end{cases}$$

En injectant v dans la deuxième équation, on trouve :

$$\boxed{OPS \equiv 10x - 4y + 3z = 0}$$

Le 12 juillet 07. Relu par Benoit Baudelet

EXGAE71 - FSA, UCL, Louvain – septembre 07

Donner les équations de l'ensemble des points équidistants des trois points suivants

$A(0,2,4)$, $B(0,2,0)$, $C(1,1,1)$

Solution proposée par Jacques COLLOT

Soit $O(x,y,z)$ un point quelconque équidistant de A, B et C

$$\rightarrow \begin{cases} |OA|^2 = |OB|^2 \\ |OB|^2 = |OC|^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \cancel{x^2} + \cancel{(y-2)^2} + (z-4)^4 = \cancel{x^2} + \cancel{(y-2)^2} + z^2 \\ x^2 + (y-2)^2 + z^2 = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \cancel{z^2} - 8z + 16 = \cancel{z^2} \\ \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 4y + 4 + \cancel{z^2} = \cancel{x^2} - 2x + 1 + \cancel{y^2} - 2y + 1 + \cancel{z^2} - 2z + 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ 2x - 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ 2x - 2y + 4 + 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \boxed{\begin{cases} z = 0 \\ 2x - 2y + 5 = 0 \end{cases}}$$

<u>Variante</u>

Le lieu cherché est l'intersection des plans médiateurs de $AB,\ BC$ et AC

Plan médiateur de AB

Vecteur directeur : $\overrightarrow{v_{AB}} = (0,0,4)$

Milieu de $AB : R : (0,2,2)$

Plan médiateur : $\pi_{AB} \equiv 4z + d = 0$

or $R \in \pi_{AB} \rightarrow d = -8$

$\rightarrow \pi_{AB} \equiv z = 2$ $\qquad (1)$

Plan médiateur de BC

Vecteur directeur : $\overrightarrow{v_{BC}} = (1,-1,1)$

Milieu de $BC : S : \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Plan médiateur : $\pi_{BC} \equiv x - y + z + d = 0$

or $S \in \pi_{BC} \rightarrow +\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + d = 0 \rightarrow d = +\frac{1}{2}$

$\rightarrow \pi_{BC} \equiv x - y + z + \frac{1}{2} = 0$

$\rightarrow \pi_{BC} \equiv 2x - 2y + 5 = 0$ $\qquad (2)$

Le lieu cherché est la droite d'équations (1) et (2)

$$\boxed{\begin{cases} z = 2 \\ 2x - 2y + 5 = 0 \end{cases}}$$

Solution proposée par Steve Tumson

Le lieu des points équidistants de A et B est le plan médiateur π_{AB}
Le lieu des points équidistants de A et C est le plan médiateur π_{AC}

L'intersection de ces deux plans est la solution de notre problème :

Calculons les vecteurs normaux à ces 2 plans :

$$\overrightarrow{AB} = (0,0,-4) \quad \overrightarrow{BC} = (1,-1,1)$$

Les plans médiateurs sont donc :

$$\pi_{AB} \equiv -4z = d_1$$
$$\pi_{BC} \equiv x - y + z = d_2$$

Or ces plans étant médiateurs, il doivent passer par le milieu des segments AB et AC

$$M_{AB} = (0,2,2) \in \pi_{AB}$$
$$M_{BC} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \pi_{BC}$$

On en déduit :

$$-8 = d_1$$
$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = d_2 = -\frac{1}{2}$$

Le lieu des points est donc la droite :

$$\boxed{\begin{cases} \pi_{AB} \equiv z = 2 \\ \pi_{BC} \equiv x - y + z = -\dfrac{1}{2} \end{cases}}$$

Le 24 septembre 07.

EXGAE72 - FACSA, ULG, Liège – septembre 07

Dans l'espace euclidien à trois dimensions, on considère la famille de droites d'équations.

$$\begin{cases} x = ay \\ y = az \end{cases}$$

où a est un paramètre réel, ainsi que les plans perpendiculaires à ces droites et contenant le point $\left(a+1, 2-2a^2, a^3+1\right)$.

Démontrer que ces plans possèdent une intersection commune et préciser la nature de cette intersection.

La droite peut s'écrire : $\dfrac{x}{a} = y = \dfrac{z}{\frac{1}{a}}$ Ce qui suppose $a \neq 0$

Un vecteur directeur de cette droite est donc $\left(a, 1, \dfrac{1}{a}\right)$

Les plans perpendiculaires à cette droite ont pour équation : $ax + y + \dfrac{z}{a} + d = 0$

Ils passent par $\left(a+1, 2-2a^2, a^3+1\right) \to a(a+1) + \left(2-2a^2\right) + \dfrac{a^3+1}{a} + d = 0$

$\to d = -\dfrac{(a+1)^2}{a}$

Les plans ont donc finalement pour équation : $ax + y + \dfrac{z}{a} - \dfrac{(a+1)^2}{a} = 0$

Soient α, β et γ trois valeurs particulières de a. Résolvons le système :

$$\begin{cases} \alpha x + y + \dfrac{z}{\alpha} - \dfrac{(\alpha+1)^2}{\alpha} = 0 \\ \beta x + y + \dfrac{z}{\beta} - \dfrac{(\beta+1)^2}{\beta} = 0 \\ \gamma x + y + \dfrac{z}{\gamma} - \dfrac{(\gamma+1)^2}{\gamma} = 0 \end{cases} \to \begin{cases} \alpha^2 x + \alpha y + z - (\alpha+1)^2 = 0 & (1) \\ \beta^2 x + \beta y + z - (\beta+1)^2 = 0 & (2) \\ \gamma^2 x + \gamma y + z - (\gamma+1)^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} (1)-(2) \to \left(\alpha^2-\beta^2\right)x + (\alpha-\beta)y - \left[(\alpha+1)^2 - (\beta+1)^2\right] = 0 \\ (1)-(3) \to \left(\alpha^2-\gamma^2\right)x + (\alpha-\gamma)y - \left[(\alpha+1)^2 - (\gamma+1)^2\right] = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)x + (\alpha-\beta)y - (\alpha-\beta)(\alpha+\beta+2) = 0 \\ (\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma)x + (\alpha-\gamma)y - (\alpha-\gamma)(\alpha+\gamma+2) = 0 \end{cases}$$

$$\to \begin{cases} (\alpha+\beta)x + y - (\alpha+\beta+2) = 0 & (3) \\ (\alpha+\gamma)x + y - (\alpha+\gamma+2) = 0 & (4) \end{cases}$$

$\to (3)-(4) \to \left[(\alpha+\beta) - (\alpha+\gamma)\right]x - \left[(\alpha+\beta+2) - (\alpha+\gamma+2)\right] = 0$

$\to (\beta-\gamma)x = \beta - \gamma \to x = 1 \to y = 2 \to z = 1$

Autrement dit tous les plans passent par le point $(1,2,1)$

Si $a = 0$, la droite se ramène à $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ c'est à dire l'axe z

Le plan $z = 1$ est bien perpendiculaire à Oz et passe par $(1,2,1)$

Le 15 octobre 07.

EXGAE73 - FACS, ULB, Bruxelles – juillet 07

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine 0 et d'axes *X; Y* et *Z*, on donne le point $P(0;\ 3;\ 4)$.
1) Etablir des équations cartésiennes de la droite *d* parallèle à *OX*, passant par *P*;
2) Etablir une équation cartésienne du plan contenant *d* et l'axe *OX* ;
3) Déterminer les coordonnées des sommets *P* et *R* du carré *OPQR*, sachant que *Q* est sur *d* et que son abscisse est positive ;
4) Etablir des équations paramétriques de la perpendiculaire *p* au plan du carré passant par le centre de celui-ci ;
5) Déterminer les coordonnées des points *S* et *S'*, sommets des pyramides droites dont le carré est la base et dont les hauteurs mesurent cinq unités de longueur ;
6) Déterminer le cosinus de l'angle aigu des arêtes *SO* et *SP*, une équation cartésienne du plan *OPS*, la longueur de l'arête *OS* ainsi que le volume du polyèdre de sommets *OPQRSS'*.

---

1) $P(0,3,4) \to d \equiv \begin{cases} y = 3 \\ z = 4 \end{cases}$

2) Soit π le plan cherché dont deux vecteurs directeurs sont $(0,3,4)$ car contient d

et $(1,0,0)$ car parallèle à Ox. π passe par l'origine $\to \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \boxed{4y - 3z = 0}$

3) $|\,OP\,| = |\,OR\,| = |\,RQ\,| = |\,QP\,| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\to Q(5,3,4)$ et $R(5,0,0)$

4) Le vecteur normal au plan π est $\overrightarrow{n_\pi}(0,4,-3)$

La droite p passe par $M(5/2, 3/2, 2)$ centre de $OPQR \to p \equiv \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} + 4k \\ z = 2 - 3k \end{cases}$

5) S et S' appartiennent à p.

$$|\,MS\,| = |\,MS'\,| = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} + 4k - \frac{3}{2}\right) + (2 - 3k + 2)^2} = \pm 5k$$

Cette longueur est égale à $5 \to \begin{cases} k = 1 \ \to S\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{5}{2}, 5\right) \\ k = -1 \to S'\left(\dfrac{5}{2}, \dfrac{11}{2}, -1\right) \end{cases}$

6) On a $\overrightarrow{SO}\left(-\frac{5}{2},\frac{5}{2},-5\right)=(-1,1-2)$ et $\overrightarrow{SP}\left(-\frac{5}{2},\frac{11}{2},-1\right)=(-5,11-2)$

L'angle entre ses deux vecteurs est donné par :

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{SO}.\overrightarrow{SP}}{\left|\overrightarrow{SO}\right|.\left|\overrightarrow{SP}\right|}=\frac{-1\times(-5)+1\times 11-2\times(-2)}{\sqrt{1+1+4}.\sqrt{25+121+4}}=\frac{19}{30}\rightarrow\boxed{\alpha=50.7°}$$

Le plan OPS passe par O et a pour vecteurs directeurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{SO}$

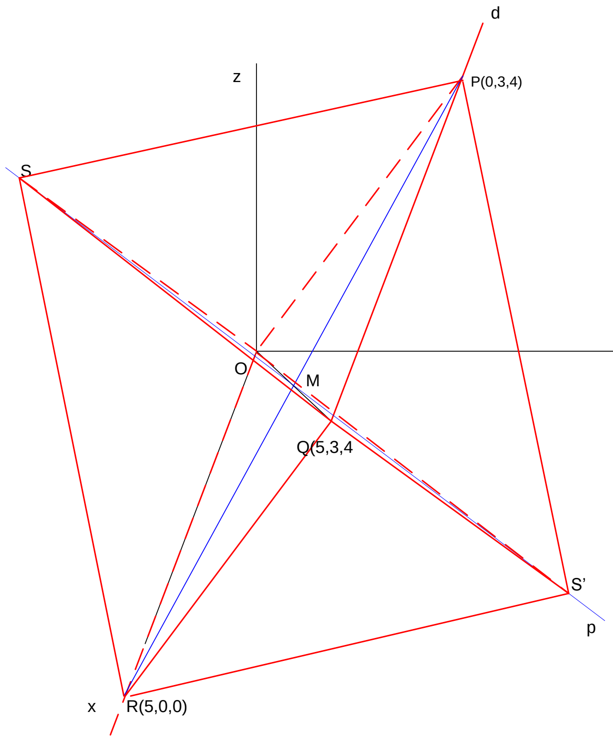
$$OPS\equiv\begin{vmatrix} x & y & z\\ 0 & 3 & 4\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}=(-6-4)x-(0+4)y+(0+3)z=0\rightarrow\boxed{OPS\equiv 10x+4y-3z=0}$$

Longueur de l'arête : $\left|\overrightarrow{SO}\right|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$

Volume de $OPQRSS'=2\times$ Volume tétraèdre $OPQRS$

$$=2\times\frac{1}{3}\times \text{Aire}_{OPQR}\times\text{Hauteur}\quad \text{avec}\quad \begin{cases}\text{Aire}_{OPQR}=5^2\\ \text{Hauteur}=\left|MS\right|=5\end{cases}$$

$$=2\times\frac{1}{3}\times 5^2\times 5=\boxed{\frac{250}{3}}$$

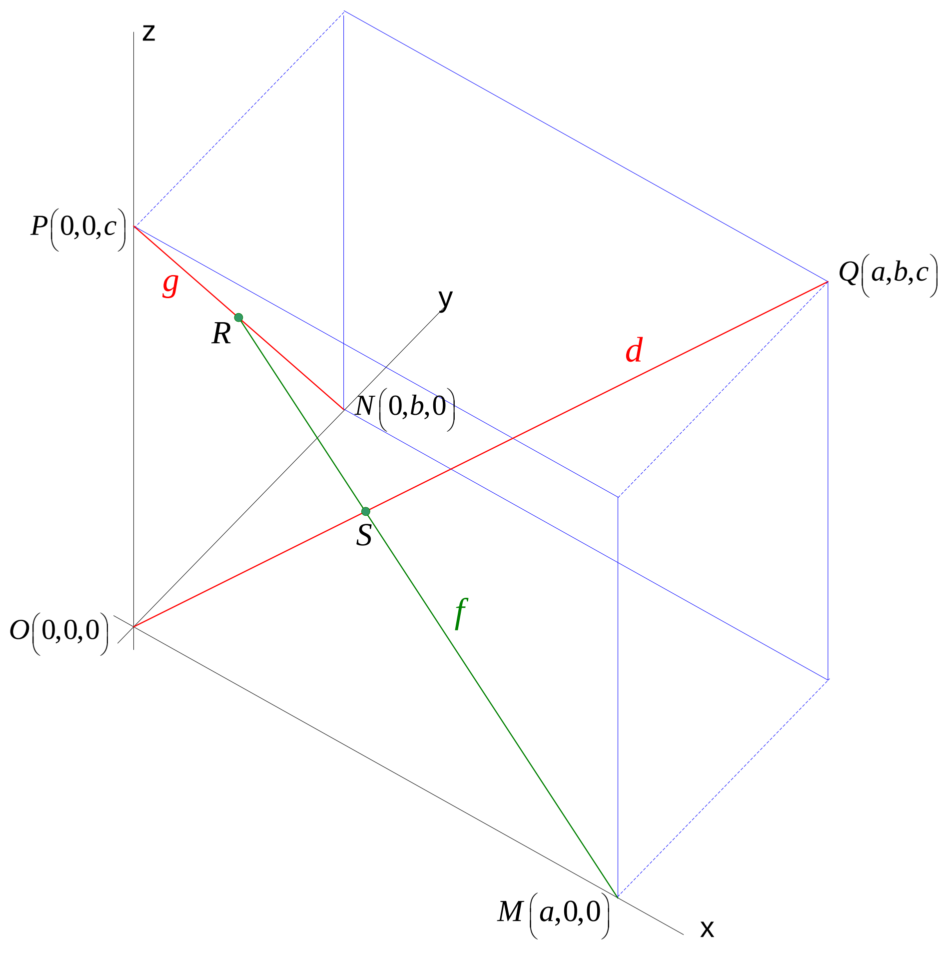


Le 30 jan 08

EXGAE074 - FACS, ULB, Bruxelles – Septembre 07

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé d'origine 0 et d'axes $X; Y$ et Z, on donne les points $M(a; 0; 0)$;$N(0; b; 0)$; $P(0; 0; c)$ et ($Q(a; b; c)$($a; b$ et c sont des réels strictement positifs). Soit d la droite qui passe par O et Q et g celle qui passe par N et P.

1) Etablir une équation cartésienne du plan qui est parallèle à g et qui contient d;
2) Etablir une équation cartésienne du plan contenant g et qui est parallèle à d ;
3) montrer que la droite f joignant M au milieu de NP possède un point commun avec la droite d et déterminer les coordonnées de ce point ;
4) déterminer les conditions sur $a; b$ et c pour que la droite f soit perpendiculaire aux droites d et g ;
5) déterminer dans les conditions trouvées au 4), l'angle et la distance des droites d et g.



1) Les vecteurs directeurs de g et d sont $\overrightarrow{v_g}(0,b,-c)$ $\overrightarrow{v_d}(a,b,c)$

Soit π_1 le plan parallèle à g et contenant d :

$$\pi_1 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & b & -c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \boxed{2bcx - acy - abz = 0}$$

2) Soit π_2 le plan parallèle à d et contenant g :

$$\pi_2 \equiv \begin{vmatrix} x & y & z-c \\ 0 & b & -c \\ a & b & c \end{vmatrix} = \boxed{2bcx - acy - abz + abc = 0}$$

3) Equations paramètriques de d : $d \equiv \begin{cases} x = ak \\ y = bk \\ z = ck \end{cases} \qquad (1)$

Equations paramétriques de f :

Milieu de PN : $R\left(0, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$ $\overrightarrow{v_f}\left(-a, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right) = (-2a, b, c) \rightarrow f \equiv \begin{cases} x = a - 2ah \\ y = bh \\ z = ch \end{cases} \qquad (2)$

Les droites d et f se coupent si les systèmes (1) et (2) sont compatibles

$\rightarrow \begin{cases} ak = a - 2h \\ bk = bh \\ ck = ch \end{cases}$ Le système est vérifié pour $k = h = \frac{1}{3}$

Et donc les coordonnées de $d \cap f = \boxed{S\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)}$

4) Il suffit de vérifier $\begin{cases} \overrightarrow{v_f}.\overrightarrow{v_g} = b^2 - c^2 = 0 \rightarrow b = c & \text{(car } a,b,c \text{ strictement positifs)} \\ \overrightarrow{v_f}.\overrightarrow{v_d} = -2a^2 + b^2 + c^2 = 0 \rightarrow \boxed{a = b = c} \end{cases}$

5) Dans ce cas, $\overrightarrow{v_d}(1,1,1)$ $\overrightarrow{v_g}(0,1,-1) \rightarrow \overrightarrow{v_d}.\overrightarrow{v_g} = 0 \rightarrow \overrightarrow{v_d} \perp \overrightarrow{v_g}$

f est la perpendiculaire commune à d et g. La distance entre d et g est alors

$$d(d,g) = |RS| = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3} - \frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{18}} = \boxed{\frac{a\sqrt{6}}{6}}$$

Le 30 jan 08.

EXGAE075 – FPMS, Mons, 2002.

1) Quelle est l'équation de la sphère de rayon $r=3$ tangente au plan π_1 d'équation $x+2y+2z+3=0$ au point $M(1,1,-3)$? Cette sphère est située du même côté que l'origine par rapport à π_1.
2) Soit N l'extrémité du diamètre de cette sphère qui admet M comme autre extrémité. Quelle est l'équation du plan π_2 parallèle à π_1 et qui passe par N.
3) Quelle est l'équation de la sphère symétrique de la première par rapport au plan π_2 ?

Solution proposée par Steve Tumson

1)

Une sphère est tangente à un plan quand son rayon passant par le point de contact est perpendiculaire à ce plan.

Le vecteur directeur du rayon passant par M est donc : $\vec{n}=(1,2,2)$

L'équation vectorielle de la droite passant par M et perpendiculaire s'écrit donc :

$$d \equiv \begin{pmatrix}1\\1\\-3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \text{ où } k\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} \text{ est le vecteur allant de M et un point quelconque de la droite.}$$

La distance entre M et le centre de la sphère est le rayon, $r=3$:

$$\sqrt{k^2+(2k)^2+(2k)^2}=3 \Leftrightarrow k^2=1 \Leftrightarrow k=\pm 1$$

$$\Rightarrow C=(2,3,-1) \quad \text{ou} \quad C=(0,-1,-5)$$

Si l'on remplace C dans l'équation de π_1 et qu'on compare à l'origine $(0,0,0)$ dans π_1 :

$O=(0,0,0) \rightarrow$ on a $3 \rightarrow$ l'origine se trouve du côté positif .

$$\begin{cases} C=(2,3,-1) \rightarrow \text{on a } 9 \\ C=(0,-1,-5) \rightarrow \text{on a } -9 \end{cases} \Rightarrow C=(2,3,-1) \Rightarrow \boxed{S \equiv (x-2)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=9}$$

2)

Par le point précédent, on a trouvé le centre C pour $k=1$, l'extrémité du diamètre passant par M s'obtient donc pour $k=2$: $N=(3,5,1)$

$\pi_2 // \pi_1$, leurs coefficients sont donc les mêmes, on en déduit :

$$\pi_2 \equiv x+2y+2z=d \xrightarrow{N\in\pi_2} 3+2\times 5+2\times 1=d \rightarrow d=15$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi_2 \equiv x+2y+2z=15}$$

3)

Il suffit de trouver le symétrique de C par π_2 :

$\pi_2 // \pi_1$ et $CM \perp \pi_1 \Rightarrow CM \perp \pi_2$

Le symétrique C' se trouve donc sur la droite CM et s'obtient donc pour $k=3$ (un petit schéma suffit pour s'en convaincre)

$$\Rightarrow C'=(4,7,3)$$

$$\Rightarrow \boxed{S' \equiv (x-4)^2+(y-7)^2+(z-3)^2=9}$$

9 septembre 08

EXGAE076 – FSA, UCL, Louvain – Juillet 07, série 2.

a) Déterminer le centre C et le rayon R de la sphère d'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8z = 0$$

b) Monter que le point P de coordonnées (0,1,0) se trouve à l'extérieure de la sphère.

c) Donner les équations cartésiennes de la droite Δ passant par le point P et par le centre C de la sphère.

d) Donner une équation cartésienne du plan perpendiculaire à la droite Δ et situé à mi-distance du point P et du centre C de la sphère.

e) Montrer que ce plan coupe la sphère et calculer le rayon du cercle d'intersection.

---

a) Transformons l'équation de la sphère S:

$$x^2+y^2+z^2-6x-8z=0 \to \left(x^2-6x+9\right)+y^2+\left(z^2-8z+16\right)=25$$

$$\to \left(x-3\right)^2+y^2+\left(z-4\right)^2=25$$

$\boxed{\text{Le centre de } S \text{ est donc } C(3,0,4) \text{ et son rayon } R=5}$

b) Il suffit de montrer que la distance de P à C est plus grande que le rayon de S

$$d(C,P)>R \to d(C,P)=\sqrt{(3-0)^2+(0-1)^2+(4-0)^2}=\boxed{\sqrt{26}>5}$$

c) Le vecteur directeur de Δ est $\overrightarrow{v_\Delta}=\overrightarrow{v_{PC}}=(3,-1,4)$

Ce qui donne directement l'équation cartésienne de Δ

$$\Delta \equiv \frac{x}{3}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{4} \to \boxed{\Delta \equiv \frac{x}{3}=1-y=\frac{z}{4}}$$

d) Le milieu de PC est $M=\left(\frac{3+0}{2},\frac{0+1}{2},\frac{4+0}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},2\right)$

De plus, $\overrightarrow{v_\Delta}=\overrightarrow{v_{PC}}=(3,-1,4)$ est aussi le vecteur normal au plan perpendiculaire à Δ

Soit π_M ce plan $\to \pi_M \equiv 3x-y+4z+d=0$

Ce plan passe par $M \to 3\times\frac{3}{2}-1\times\frac{1}{2}+4\times 2+d=0 \to d=-12$

Finalement : $\boxed{\pi_M \equiv 3x-y+4z-12=0}$

e) Il suffit de montrer que la distance de M à C est inférieur à R

$$|CM|^2=\left(3-\frac{3}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2+(4-2)^2=\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+4=\frac{13}{2}<R^2=25$$

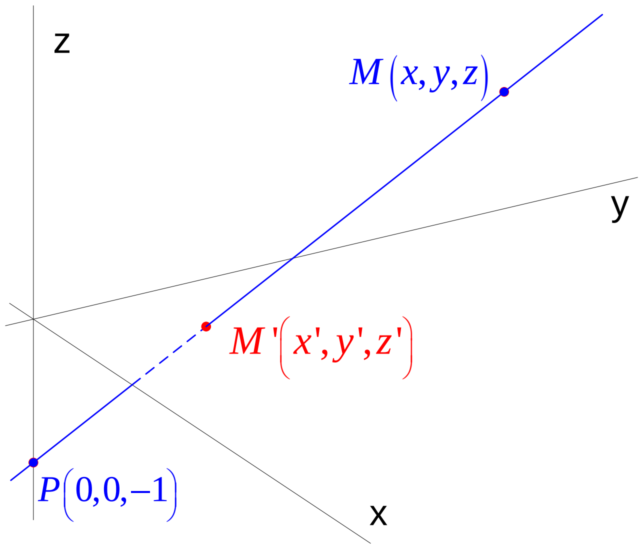
Le rayon r du cercle d'intersection est obtenu par Pythagore :

$$r=\sqrt{R^2-|CM|^2}=\sqrt{25-\frac{13}{2}}=\boxed{\sqrt{\frac{37}{2}}=\frac{\sqrt{74}}{2}}$$

Le 30 jan 08.

EXGAE077 – FSA, UCL, Louvain – Juillet 07, série 2.

Dans l'espace tridimensionnel rapporté à un repère orthonormé *OXYZ*, on considère les droites passant par le point (0, 0, –1) et un point quelconque *M* (*x*, *y*, *z*) de l'espace.
En appelant *M* '(*x'*, *y'*, *z'*) l'intersection d'une telle droite avec le plan *OXY*, déterminer les relations liant les coordonnées de *M'* à celles de *M*.



Le vecteur directeur de PM est $\overrightarrow{v_{PM}} = (x, y, z+1)$

Les équations paramétriques de PM sont : $PM \equiv \begin{cases} X = xk \\ Y = yk \\ Z = -1 + (z+1)k \end{cases}$

Le point de percée M' de PM dans le plan OXY correspond à $Z = 0$

$\rightarrow 0 = -1 + (z+1)k \rightarrow k = \dfrac{1}{1+z}$

Donc M' a pour coordonnées : $\boxed{M' = \left(\dfrac{x}{1+z}, \dfrac{y}{1+z}, 0\right)}$

Le 30 jan 08.

EXGAE078 – FACSA, ULG, Liège – septembre 08.

Dans l'espace à trois dimensions munid'un repère orthonormé:

(a) Déterminer une équation du plan π issu du point de coordonnées $(1,1,1)$ et incluant la droite d d'équations : $\begin{cases} 2x+y=5 \\ y+2z=-3 \end{cases}$

(b) En fonction d'un ou de plusieurs paramètres de votre choix, donner une équation pour les plans perpendiculaires à π qui passent par l'origine du repère.

(c) Parmi les plans évoqués au point (b), donner une équation pour celui dont l'intersection avec π est parallèle à d.

Solution proposée par Thomas Belligoi

1. Soit la droite d définie par

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ y+2z=-3 \end{cases}$$

La direction de cette droite est

$$\vec{d} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (2,-4,2)$$

Soit D un point de d de coordonnées $(3,-1,-1)$. On obtient un second vecteur directeur du plan π :

$$\overrightarrow{PD} = (3-1,-1-1,-1-1) = (2,-2,-2)$$

L'équation du plan π s'écrit

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y-1 & -1 & -2 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3x-2y-z+6=0$$

2. Un vecteur normal du plan π est

$$\overrightarrow{n_\pi} : (3,2,1)$$

Par conséquent, si on désigne par $\overrightarrow{n_\perp} : (a,b,c)$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, les vecteurs normaux des plans perpendiculaires à π, on doit vérifier :

$$\overrightarrow{n_\pi} \cdot \overrightarrow{n_\perp} = 3a+2b+c=0$$

L'équation cartésienne de ces plans prend la forme suivante

$$\pi_\perp \equiv ax+by+cz=0$$

d'où

$$\pi_\perp \equiv ax+by-(3a+2b)z=0$$

3. L'intersection du plan π et de la famille de plans perpendiculaires $\pi_\perp$ est la droite p d'équations

$$\begin{cases} ax+by+cz=0 \\ -3x-2y-z+6=0 \end{cases}$$

et de direction

$$\overrightarrow{p} = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ -2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} c & a \\ -1 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \right) = (-b+2c, -3c+a, -2a+3b)$$

où a, b et c vérifient toujours la condition $3a+2b+c=0$.

Par conséquent, la droite d'intersection p sera parallèle à la droite d si la relation suivante est vérifiée

$$\overrightarrow{p} // \overrightarrow{d}$$

Il vient :

$$\begin{cases} -b+2c=1 \\ -3c+a=-2 \\ -2a+3b=1 \\ 3a+2b+c=0 \end{cases}$$

ce qui mène à $(a,b,c)=(-2,1,4)$.

L'équation du plan $\pi_\perp^*$ dont l'intersection avec π est parallèle à d est

$$\pi_\perp^* \equiv -2x+y+4z=0$$

Le 30 septembre 08. (Relu par Steve Tumson)

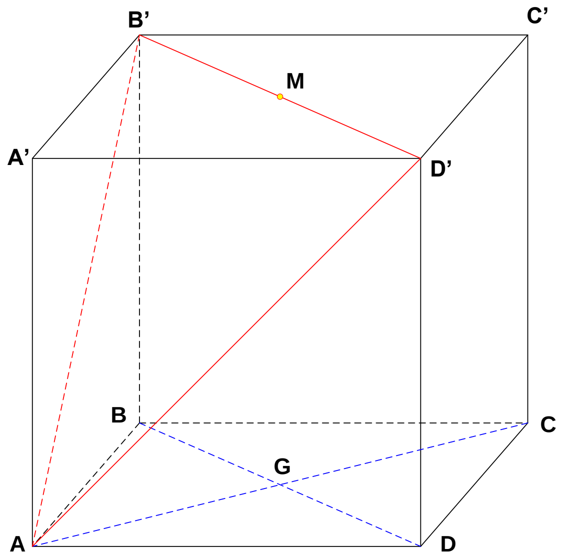
EXGAE079 – FACSA, ULG, Liège, juillet 08.

Dans l'espace, on considère un cube $ABCDA'B'C'D'$, avec $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'}$ et $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. On note G le centre de gravité du carré $ABCD$ et K le point d'intersection de la droite $A'G$ et du plan $AB'D'$

(a) Déterminer la position de K sur le segment $[A',G]$

(b) Démontrer que K appartient à la médiane issue de A du triangle $AD'B'$

Solution proposée par Frédéric Garcet



a) Les coordonnées des points sont : $(\text{avec } a \neq 0)$

$B:(0,0,0)$; $A:(2a,0,0)$; $C:(0,2a,0)$; $D:(2a,2a,0)$

$B':(0,0,2a); A':(2a,0,2a); C':(0,2a,2a); D':(2a,2a,2a)$

Donc : $G:(a,a,0)$

Soit : $K = A'G \cap AB'D'$

$K \in$ donc à $A'G$ dont nous pouvons facilement établir l'équation :

$$\overrightarrow{v_{A'G}} = \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ -a \\ 2a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{La droite } A'G \equiv \frac{x-2a}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2a}{2} (= h) \text{ ou encore } A'G \equiv \begin{cases} x = h + 2a \\ y = -h \\ z = 2h + 2a \end{cases} \qquad (1)$$

$K \in$ aussi au plan $AB'D$, dont l'équation est :

$$\overrightarrow{AB'}: \begin{pmatrix} -2a \\ 0 \\ 2a \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AD'}: \begin{pmatrix} 0 \\ 2a \\ 2a \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \text{Le plan } AB'D' \equiv \begin{vmatrix} x-2a & -2a & 0 \\ y & 0 & 2a \\ z & 2a & 2a \end{vmatrix} = 0$$

$$\rightarrow AB'D' \equiv (x-2a)(-4a^2) + y.4a^2 + z(-4a^2) = 0$$

$$-x + 2a + y - z = 0 \qquad (2)$$

Les coordonnées du point k correspondent à la valeur de h qui satisfait l'équation (2)

(1) et $(2) \rightarrow -(h+2a) + 2a - h - (2h+2a) = 0 \rightarrow -h - 2a + 2a - h - 2h - 2a = 0$

$$\rightarrow h = -\frac{a}{2} \rightarrow K: \left(\frac{3a}{2}, \frac{a}{2}, a\right) \text{ qui est bien le milieu de } [A'G]$$

b) M est le milieu de $[B'D'] \rightarrow M: \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \overrightarrow{AM}: \begin{pmatrix} a \\ a \\ 2a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \rightarrow AM \equiv \frac{x-2a}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{2}$$

On vérifie que $K \in AM$: $\dfrac{\frac{3a}{2} - 2a}{-1} \stackrel{?}{=} \dfrac{\frac{a}{2}}{1} \stackrel{?}{=} \dfrac{a}{2} \rightarrow \dfrac{-a/2}{-1} = \dfrac{a/2}{1} = \dfrac{a/2}{1}$ OK

Le 21 juillet 08.