Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 0

EXGAP000 – EXGAP009

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXGAP001 – Exemple.

Calculer les tangentes issues du point $P(2\ ;3)$ à la conique :

$$2x^2 + y^2 - 2x + y - 1 = 0$$

Déterminer les points de tangence.

Réduire la conique et en déterminer le genre.

Première méthode

a) Soit l'équation des tangentes pasant pas P : $y = m(x-2)+3$

On remplace dans l'équation de la conique

$$2x^2 + (mx - 2m + 3)^2 - 2x + m(x-2) + 3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (m^2+2)x^2 - (2 - 7m + 4m^2)x + 4m^2 - 14m + 11 = 0 \qquad (1)$$

$$\Delta = (2 - 7m + 4m^2)^2 - 4(m^2+2)(4m^2 - 14m + 11) = 0$$

$$= -11m^2 + 84m - 84 \quad \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 6.4530 \\ m_2 = 1.1834 \end{cases}$$

Les équations des tangentes sont donc : $\begin{cases} T_1 \equiv y = 6.4530x - 9.906 \\ T_2 \equiv y = 1.1834x + 0.63332 \end{cases}$

b) On remplace m par ces valeurs dans l'équation (1). Si les calculs sont précis, on obtient des doubles carrés (car $\Delta = 0$).

$$\begin{cases} m_1 = 6.4530 \rightarrow 43.6412x^2 - 123.3938x + 87.2228 = 0 \Rightarrow x \cong 1.413 \\ m_2 = 1.1834 \rightarrow 3.4004x^2 + 0.68208x + 0.03419 = 0 \Rightarrow x = -0.1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1.413 \rightarrow y = 6.453 \times 1.413 - 9.906 = -0.7879 \\ x = 0.1 \rightarrow y = 1.1834 \times (-0.1) + 0.6332 = 0.515 \end{cases}$$

Le centre de la conique est donné par $\begin{cases}4x-2=0\\2y+1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1/2\\y=-1/2\end{cases}$

La conique s'écrit : $2.(x^2-x+\frac{1}{4})+(y^2+y+\frac{1}{4})-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-1=0$

$\rightarrow 2(x-\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=\frac{7}{2} \rightarrow \frac{(x-1/2)^2}{7}+\frac{(y+1/2)^2}{\frac{7}{2}}=1$ C'est donc une ellipse.

Méthode des coordonnées homogènes.

a) Bien que d'apparence plus compliquée cette méthode est plus rapide et permet des calculs plus précis. Elle est surtout intéressante dans le cas des coniques non réduites.

RAPPELS

La conique en coordonnées homogènes s'écrit:

$f(x,y,z)=2x^2+y^2+2xz+yz-z^2$

on a $A=2;\ B=0;\ C=1\ \ et\ \ f(2;3;1)=\ 8+9-4+3-1=15$

$$\begin{cases}f'_x=4x-2\\f'_y=2y+1\\f'_z=-2x+y-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}f'_a=6\\f'_b=7\\f'_c=-3\end{cases}$$

f'_a est obtenu en remplaçant dans f'_x, les x,y et z par a,b et c.

Même chose pour f'_b et f'_c

De même $f\left(abc\right)$ est la valeur que prend la conique pour $x=a, y=b, z=c$

Les coefficients angulaires des tangentes sont donnés par :

$(f'^2_b-4\,C\ f(abc))\,m^2+2\ f'_a\ f'_b\,m+f'^2_a-4\ A\ f(abc)=0$

$(7^2-4.1.15)\,m^2+2.6.7\,m+36-4.2.15=0 \quad \Rightarrow \quad 11\,m^2-84\,m+84=0$

D'où $m_1=6.4530$ et $m_2=1.1834$

Les équations des tangentes sont :

$T_1 \equiv y=6.453\,x-9.906$

$T_2 \equiv y=1.1834\,x+0.6332$

b) Pour déterminer les points de tangence, il est plus simple de calculer la corde de contact des points de tangence, et ensuite de calculer les intersections corde de contact-tangentes.

La corde de contact est donnée par : $C \equiv x\, f'_a + y\, f'_b + z\, f'_c = 0$

C'est à dire : $C \equiv 6x + 7y - 3 = 0$

1) $T_1 \cap C \quad \rightarrow \begin{cases} 6x + 7y = 3 \\ 6.453x - y = 9.906 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 9.906 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 6.453 & -1 \end{vmatrix}} = 1.413 ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 6.453 & 9.906 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 6.453 & -1 \end{vmatrix}} = -0.783$$

On vérifie que le point appartient à la conique :

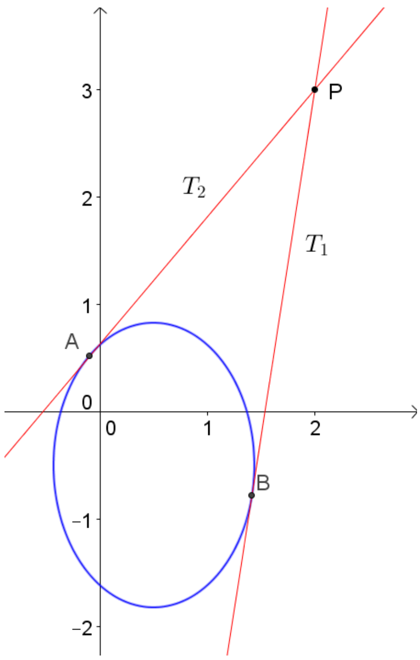
$2 \times (1.413)^2 + 0.783^2 - 1.413 \times 2 - 0.783 - 1 \simeq 0$

2) $T_2 \cap C \quad \rightarrow \begin{cases} 6x + 7y = 3 \\ 1.1834x - y = -0.6332 \end{cases}$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ -0.6332 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1.1834 & -1 \end{vmatrix}} = -0.10 ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 1.183 & -0.6332 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 1.1834 & -1 \end{vmatrix}} = 0.515$$

On vérifie : $2.\times(-0.1)^2 + 0.515^2 + 2 \times (-0.1) + 0.515 - 1 \simeq 0$

c) Réduction de la conique : Voir première méthode



Résolu le 19 mars 2003. Modifié le 24 août 2004. Modifié le 6 septembre 2004

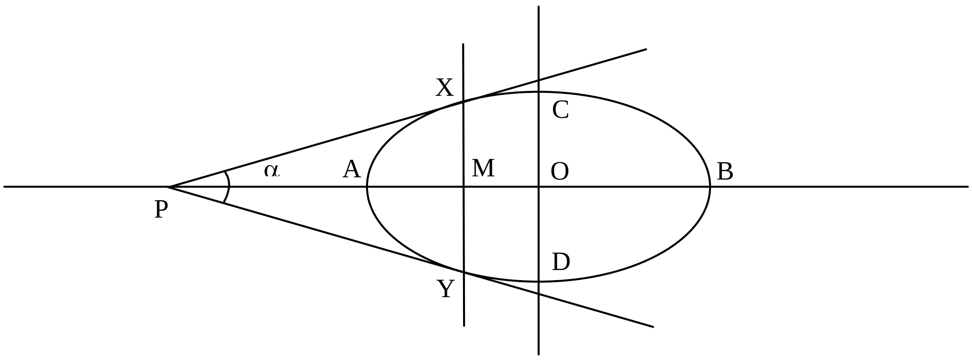
EXGAP002 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1996.

Soit ε une ellipse non vide, non dégénérée de centre O, de grand axe AB et de petit axe CD tel que : $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\left|\overrightarrow{CD}\right|$ (Voir figure).

Soit P un point de AB tel que : $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AO}$

On note X et Y les points de contact des tangentes à ε issue de P.

Quel est l'angle sous lequel on voit ε de P (autrement dit, que vaut l'angle XPY) ?



Désignons par a le demi grand axe et b le demi petit axe $(b = a/2)$.

Les coordonnées homogènes de P sont $(-2a,\ 0,\ 1)$.

Nous allons d'abord calculer la corde de contact XY, ce qui donnera facilement les coordonnées de M et X (et donc les distances MX et MP). D'où l'angle cherché.

L'ellipse a pour équation : $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

Corde de contact XY

$$\begin{cases} f'_x = 2b^2x \\ f'_y = 2a^2y \\ f'_z = -2a^2b^2z \end{cases} \Rightarrow \quad 2b^2(-2a)x - 2a^2b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{a}{2}$$

Or comme $b = a/2$, l'ellipse s'écrit aussi : $x^2 + 4y^2 - a^2 = 0$

Ce qui permet de déduire les coordonnées de X : $\frac{a^2}{4} + 4y^2 - a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{\sqrt{3}}{4}a$

De même, la distance $MP = 2a + a/2 = 3a/2$, donc $\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 32.2°$

Résolu le 19 mars 2003. Modifié le 24 août 2004

EXGAP003 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1996.

On considère deux droites perpendiculaires x et y sécantes en O. Sur la droite x, on fixe deux points A et B tels que :

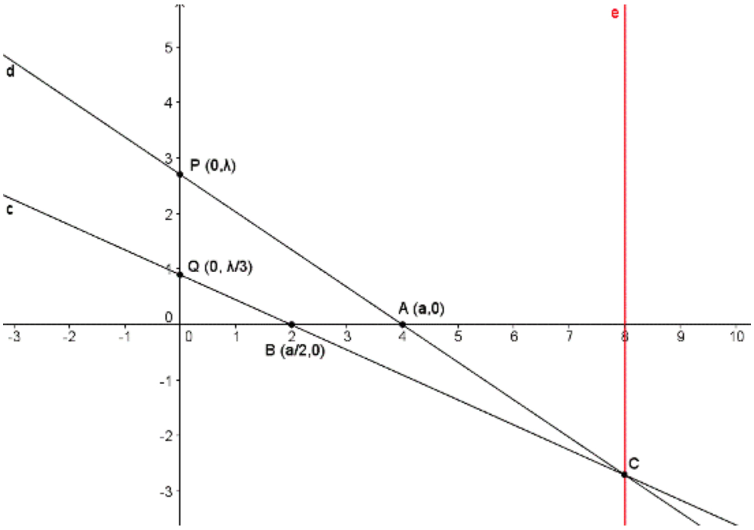
$$\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OB}$$

(On supposera $O \neq A$);

Si P est un point quelconque de y, on note le Q le point tel que :

$$3\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP}$$

Quel est le lieu des points communs aux droites AP et BQ quand P parcourt y?



$$AP \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{\lambda} = 1 \;\rightarrow\; \lambda = \frac{ay}{a-x}$$

$$BQ \equiv \frac{2x}{a} + \frac{3y}{\lambda} = 1$$

On élimine λ pour obtenir le lieu :

$$\frac{2x}{a} + 3y.\frac{a-x}{ay} = 1 \;\rightarrow 2x + 3a - 3x = a \rightarrow x = 2a$$

Le lieu est donc une droite parallèle à l'axe des y.

Résolu le 19 mars 2003. Modifié le 24 août 2004. Modifié le 18 juin 2010 (Mathieu Mahillon)

EXGAP004 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1996.

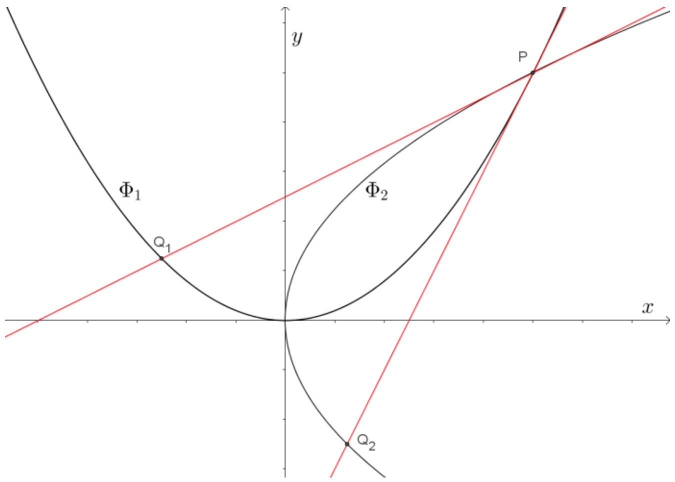
Si a est un nombre réel non nul on considère les paraboles Φ_1, d'équation

$$y = a^3\, x^2$$

et Φ_2, d'équation

$$y^2 = a^3\, x$$

1. Montrer que Φ_1 et Φ_2 ont un point commun l'origine des axes et un autre point que l'on notera P et dont on déterminera les coordonnées.
2. Par P, on mène la droite d_1 tangente à Φ_1 en P. Donner l'équation de d_1. De même, donner l'équation de la droite d_2 tangente à Φ_2 en P.
3. On note Q_1 le point d'intersection de d_2 avec Φ_1 autre que P et Q_2 le point d'intersection de d_1 avec Φ_2 autre que P. Trouver les coordonnées de Q_1 et de Q_2.
4. Quel est le lieu du milieu M du segment Q_1Q_2 quand a parcourt l'ensemble des réels non nuls ?



1 - Il est évident que les deux paraboles passent par le centre O.
Le point commun P est donné par :

$$\begin{cases} y = a^3x^2 \\ y^2 = a^3x \end{cases} \rightarrow \frac{1}{y} = x \rightarrow \frac{1}{x} = a^3x^2 \rightarrow x = \frac{1}{a} \rightarrow y = a$$

Le point P a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{a}; a\right)$.

2- Détermination de la droite d_1

Elle est de la forme $y = mx + p$ avec $m = y'$, et p détermine les coordonnées de P, donc :

$$y' = m = 2a^3x \to a = 2a^2\frac{1}{a} + p \to p = -a \to d_1 = y = 2a^2x - a$$

Pour détermine la droite d_2, on applique la formule générale à la conique $y^2 - a^3x = 0$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f'_x = -a^3 \\ f'_y = 2y \\ f'_z = -a^3x \end{cases} \to \begin{cases} f'_a = -a^3 \\ f'_b = 2a \\ f'_c = -a^2 \end{cases} \to x\left(-a^3\right) + y\left(2a\right) - a^2 = 0$$

$$\to d_2 \equiv y = \frac{1}{2}\left(a^2x + a\right)$$

3- Les coordonnées de Q_1 sont données par :

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}(a^2x + a) \\ y = a^3x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 2a^3x^2 - a^2x - a = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a^2x^2 - ax - 1 = 0$$

$$x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8a}}{4a^2} = \frac{a \pm 3a}{4a^2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{1}{a} \text{ (c'est le point } P\text{)}$$

et $x_2 = -\frac{1}{2a} \quad \Rightarrow \quad y = a^3\frac{1}{4a^2} = \frac{a}{4}$

les coordonnées de Q_1 sont donc $\left(-\frac{1}{2a}, \frac{a}{4}\right)$

Les coordonnées de Q_2 sont données par :

$$\begin{cases} y = 2a^2x - a \\ y^2 = a^3x \end{cases} \Rightarrow \quad 2y^2 - ay - a^2 = 0$$

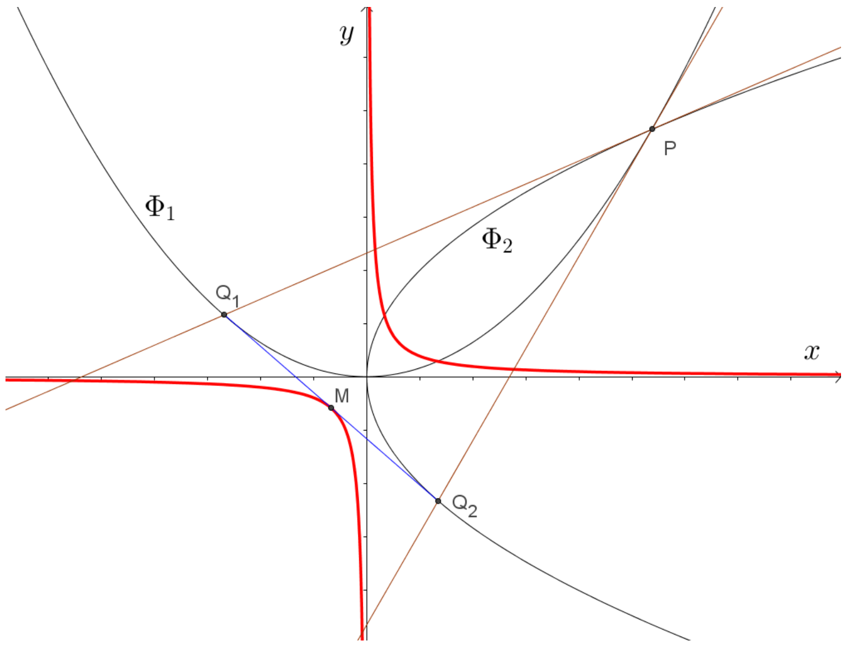
$$y = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 8a}}{4} = \frac{a \pm 3a}{4} \quad \Rightarrow \quad y_1 = a \text{ (c'est le point } P\text{) et } y_2 = -\frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{1}{4a}$$

les coordonnées de Q_2 sont donc $\left(\frac{1}{4a}, -\frac{a}{2}\right)$

4- Les coordonnées de M sont obtenues en fonction de a qu'il suffit d'éliminer pour obtenir le lieu :

$$\begin{cases} x_M = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2a} + \frac{1}{4a}\right) = -\frac{1}{8a} \\ y_M = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{4} - \frac{a}{2}\right) = -\frac{a}{8} \end{cases} \Rightarrow \quad xy = \frac{1}{64}$$

C'est une hyperbole équilatère.



Résolu le 19 mars 2003. Modifié le 24 août 2004. Modifié le 19 décembre 2013.

EXGAP005 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1996.

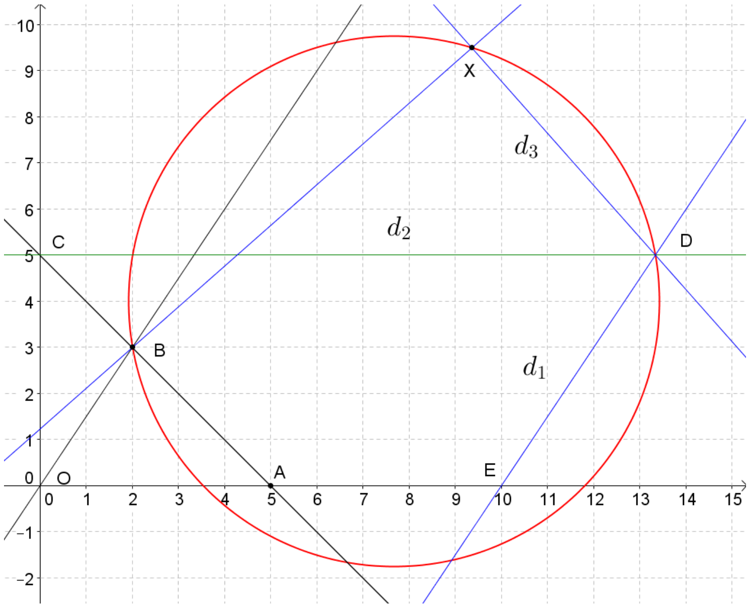
Dans un repère orthonormé, on considère 2 points $A(5,0)$ et $B(2,3)$.

a) Donner l'équation de la droite d_1 symétrique de la droite OB par rapport au point A

b) Donner l'équation de la droite d_2 symétrique de l'axe OY par rapport à la droite AB.

c) Donner l'équation de la droite d_3 passant par le point $X\ (a,\ b)$ supposé distinct de B et perpendiculaire à la droite BX.

a) Pour quelles positions du point X les droites d_1, d_2 et d_3 sont – elles concourantes ?



A) Equation de la droite $d_1 : OB \equiv y = \dfrac{3}{2}x \quad \rightarrow \quad d_1 \equiv y = \dfrac{3}{2}x - 15$ car d_1 est parallèle à OB et passe par $E(10,0)$ symétrique de $O(0,0)$ par rapport à $A(5,0)$

B) Equation de la droite d_2 : Le coefficient angulaire de AB est -1, donc $\widehat{OCA} = 45°$ et AB coupe OY en C (0,5), $\rightarrow$ la droite est : $CD \equiv d_2 \equiv y = 5$

C) Équation de la droite d_3 : Pente de $BX \equiv \dfrac{b-2}{a-3} \rightarrow$ pente de $d_3 = -\dfrac{a-2}{b-3}$

Comme d_3 passe par $X\ (a,b) \rightarrow y = -\dfrac{a-2}{b-3}x + p \rightarrow p = b + a - \dfrac{a-2}{b-3}$

$\rightarrow d_3 \equiv y = -\dfrac{a-2}{b-3}x + b + a - \dfrac{a-2}{b-3}$

D) Calcul du lieu de X :

Les droites d_1 et d_2 sont fixes $\rightarrow$ le point D est fixe

$$D \equiv d_1 \cap d_2 \rightarrow \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - 15 \\ y = 5 \end{cases} \rightarrow D : \left(\frac{40}{3}, 5\right)$$

d_3 doit passer par $D \rightarrow 5 = -\frac{a-2}{b-3}\frac{40}{3} + b + a - \frac{a-2}{b-3}$

$$\rightarrow 15(b-3) = -(a-2)40 + 3b(b-3) + 3a(a-2)$$

$$\rightarrow 3a^2 + 3b^2 - 46a - 24b + 125 = 0$$

$$\rightarrow \left(a - \frac{23}{3}\right)^2 + (b-4)^2 - \left(\frac{23}{3}\right)^2 - 16 + \frac{125}{3} = 0$$

$$\rightarrow \left(a - \frac{23}{3}\right)^2 + (b-4)^2 = \frac{298}{9}$$

Ce qui détermine le lieu de X. C'est un cercle de centre $\left(\frac{23}{3}, 4\right)$

et de rayon : $\frac{1}{3}\sqrt{298} = 5.75$.

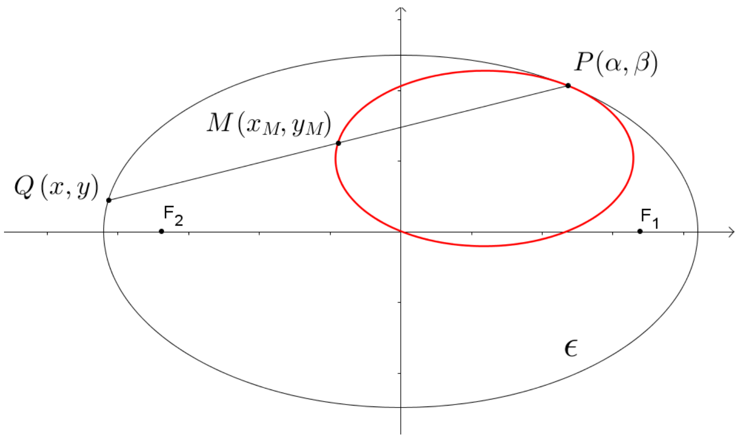
On vérifie par ailleurs que la distance entre ce centre et B est :

$$\left(2 - \frac{23}{3}\right)^2 + (3-4)^2 = 33.11 \rightarrow d(c, B) : 5.75$$

Résolu le 19 mars 2003. Modifié le 24 août 2004, Modifié le 16 juin 06.

EXGAP006 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1996.

Soit ε une ellipse et un point P de ε.
Quel est le lieu du milieu du segment PQ lorsque Q est un point qui parcourt ε ?



M va décrire une ellipse car M est obtenu à partir par l' homothétie de centre P et de puissance ½.
L'équation de cette ellipse est :

$$x_M = \frac{x+\alpha}{2} \quad \Rightarrow \quad x = 2\,x_M - \alpha$$

$$y_M = \frac{y+\beta}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 2\,y_M - \beta$$

On remplace dans l'équation de l'ellipse : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\Rightarrow \frac{(2\,x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(2\,y-\beta)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{\frac{\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}+\frac{\left(y-\frac{\beta}{2}\right)^2}{\left(\frac{b}{2}\right)^2}=1}$$

C'est une ellipse de centre $\left(\frac{\alpha}{2},\frac{\beta}{2}\right)$, de demi grand axe $\frac{a}{2}$ et de demi petit axe $\frac{b}{2}$.
Il est facile de montrer que cette ellipse passe par l'origine

---

Résolu le 19 mars 2003. Modifié le 24 août 2004. Modifié le 20 décembre 2013.

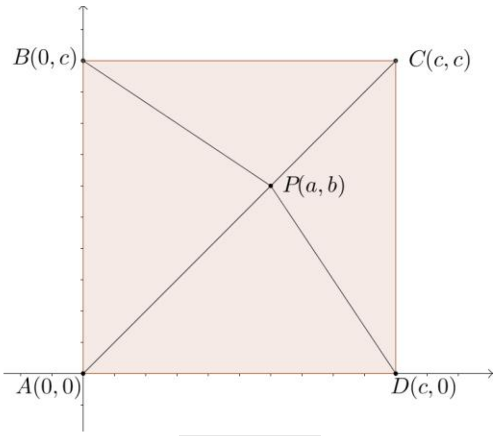
EXGAP 007 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1996.

On donne un carré $ABCD$ $(A$ et C sont des sommets opposés$)$.

Quel est le lieu des points P tels que

$$|PA|+|PC|=|PB|+|PD| \text{ ?}$$

En déduire que $|PA|+|PC|=|PB|+|PD|$ implique $|PA|=|PB|$ ou $|PA|=|PD|$



$|PA|=\sqrt{a^2+b^2}$ $\qquad |PD|=\sqrt{(c-a)^2+b^2}$

$|PC|=\sqrt{(a-c)^2+(b-c)^2}$ $\qquad |PB|=\sqrt{a^2+(b-c)^2}$

$\rightarrow \sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{(a-c)^2+(b-c)^2}=\sqrt{(c-a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+(b-c)^2}$

$a^2+b^2+(a-c)^2+(b-c)^2+2\sqrt{(a^2+b^2)\left[(a-c)^2+(b-c)^2\right]}$

$\qquad =a^2+(b-c)^2+(c-a)^2+b^2+2\sqrt{\left[a^2+(b-c)^2\right]\left[(c-a)^2+b^2\right]}$

$\rightarrow \quad (a^2+b^2)\left[(a-c)^2+(b-c)^2\right]=\left[a^2+(b-c)^2\right]\left[(c-a)^2+b^2\right]$

$\rightarrow \quad (a^2+b^2)(a-c)^2+(a^2+b^2)(b-c)^2=(c-a)^2\left[a^2+(b-c)^2\right]+b^2\left[a^2+(b-c)^2\right]$

$\rightarrow \quad (a-c)^2(a^2+b^2-a^2-(b-c)^2)=a^2b^2+b^2(b-c)^2-a^2(b-c)^2-b^2(b-c)^2$

$\rightarrow \quad (a-c)^2(b^2-(b-c)^2)=a^2(b^2-(b-c)^2)$

$a)$ $(a-c)^2=a^2$ $\quad \rightarrow 1)$ $a-c=a \rightarrow c=0$ solution triviale

$\qquad \rightarrow 2)$ $a-c=-a \rightarrow a=\dfrac{c}{2}$ $\quad \rightarrow$ le lieu $x=\dfrac{c}{2}$

$b)$ $b^2-(b-c)^2=0$ $\quad \rightarrow b=\dfrac{c}{2} \rightarrow$ le lieu $y=\dfrac{c}{2}$

si $x=\dfrac{c}{2}$ $\quad \rightarrow |PA|=|PD|$ car le lieu est la médiatrice de AD

si $y=\dfrac{c}{2}$ $\quad \rightarrow |PA|=|PC|$ car le lieu est la médiatrice de AB

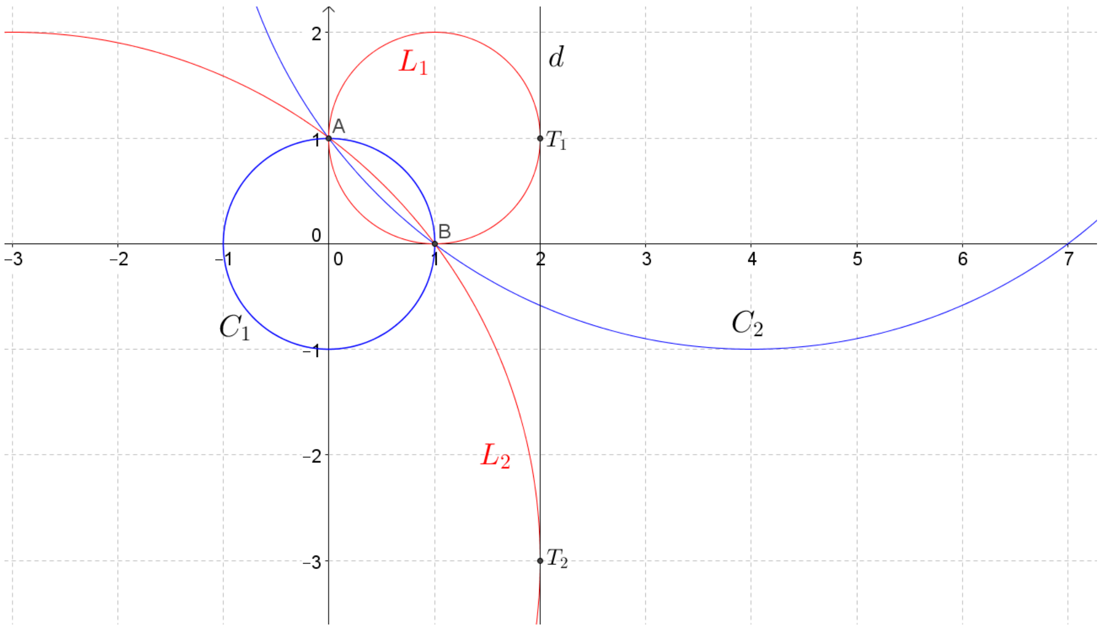
Résolu le 19 mars 2003. Modifié le 24 août 2004

EXGAP008 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1997.

On donne les cercles C_1 et C_2 et la droite d par leurs équations dans un repère orthonormé :

$$C_1 : \quad x^2 + y^2 = 1$$
$$C_2 : \quad (x-4)^2 + (y-4)^2 = 25$$
$$d : \quad x - 2 = 0$$

Donner l'équation des cercles passant par les points d'intersections de C_1 avec C_2 et qui sont tangents à d.



Pour calculer, les points d'intersection A et B de C_1 et C_2, on fait la différence des équations, ce qui donne l'équation de la corde commune.

Celle-ci permet alors d'obtenir les points A et B facilement

$$\begin{aligned} C_1 &: \quad x^2 + y^2 = 1 \\ C_2 &: \quad (x-4)^2 + (y-4)^2 = 25 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad 8x - 16 + 8y - 16 = -24$$

Corde : $y = 1 - x$

Ce qui donne immédiatement les points : $B(1,0)$ et $A(0,1)$

On part de l'équation générale des cercles, et on exprime que les cercles cherchés passent par les points A et B et sont tangents à la droite d.

Cercle : $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F =$

$A \Rightarrow \quad 0+1+0+E+F=0 \quad \Rightarrow E=-1-F$

$B \Rightarrow \quad 1+0+D+0+F=0 \quad \Rightarrow D=-1-F$

Ce qui donne : $x^2 + y^2 - (1+F)x - (1+F)y + F = 0$

De plus le cercle est tangent à $x-2=0$, donc le Δ de l'équation suivante est nul.

$4 + y^2 - (1+F)\,2 - (1+F)y + F = 0$

$y^2 - (1+F)\,y + 2 - F = 0$

$\Delta^2 = (1+F)^2 - 4\,(2-F) = 0$

$F^2 + 6F - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad (F+7)\,(F-3) = 0$

Si $F=-7 \quad \Rightarrow \quad E=6 \; et \; D=6$, donc

$L_2 \equiv x^2 + y^2 + 6x + 6y - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_2 \equiv (x+3)^2 + (y+3)^2 = 5^2$

C'est un cercle de centre (-3,-3) et de rayon 5

Si $F = 1 \quad \Rightarrow \quad E=-2 \; et \; D=-2$, donc

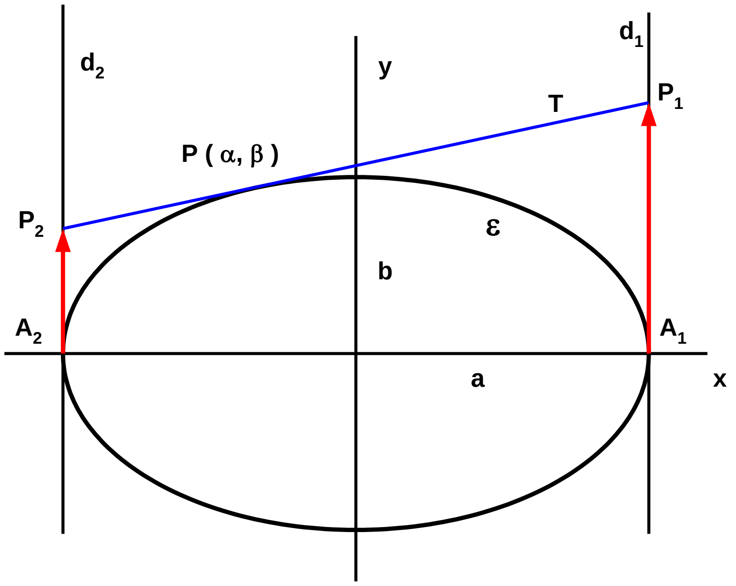
$L_1 \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_1 \equiv (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

C'est un cercle de centre (1,1) et de rayon 1.

Résolu le 19 mars 2003. Modifié le 24 août 2004

EXGAP009 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1997.
FACSA, ULG, Liège, septembre 2003.

On considère une ellipse ε de demi grand axe a et de demi petit axe $b\,(a > b > 0)$.
On note A_1 et A_2 les sommets du grand axe et d_1 et d_2 les tangentes à l'ellipse en A_1 et A_2.
Par un point P de ε distinct de A_1 et A_2, on mène une tangente T à ε qui coupe d_1 en P_1 et d_2 en P_2. Démontrer que $\overrightarrow{A_1P_1}\,.\,\overrightarrow{A_2P_2}$ est indépendant de P.



Une fois établie l'équation de la tangente au point P, il est facile de calculer les coordonnées de P_1, compte tenu de $A_1(a,0)$, et de P_2, compte tenu de $A_2(-a,0)$.

P_1P_2 est tangente à l'ellipse au point $P(\alpha\,,\beta)$ donc :

$P_1P_2 \equiv a^2\beta\; y + b^2\alpha\; x - a^2b^2 = 0$ (Voir Note)

$Si\; x = a \quad \rightarrow \quad a^2\beta\, y_1 + b^2\alpha\; a - a^2b^2 = 0 \;\rightarrow a^2\beta\, y_1 = -b^2\alpha\; a + a^2b^2$

$Si\; x = -a \quad \rightarrow \quad a^2\beta\, y_2 - b^2\alpha\; a - a^2b^2 = 0 \rightarrow a^2\beta\, y_2 = b^2\alpha\; a + a^2b^2$

On multiplie les équations membre à membre

$a^4\beta^2\; y_1y_2 = (a^2b^2 - b^2\alpha\; a)\,(a^2b^2 + b^2\alpha\; a) = a^4b^4 - \alpha^2\, b^4a^2$

$a^2\beta^2\; y_1y_2 = a^2b^4 - \alpha^2\, b^4$

Or le point $P \in$ à l'ellipse, donc : $\alpha^2b^2 + \beta^2a^2 = a^2b^2$

$\rightarrow \quad (a^2b^2 - \alpha^2\, b^2)\; y_1y_2 = b^2(a^2b^2 - \alpha^2\, b^2)$

Par suite : $y_1y_2 = b^2$, qui est indépendant de P.

Note : Tangente en un point d'une conique

On établit assez facilement les résultats suivants : (Voir par exemple : Espace Math)

Tangente t au point (m, p) d'une ellipse E d'équation : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\boxed{t \equiv b^2mx + a^2py - a^2b^2 = 0}$$

Tangente t au point (m, p) d'une hyperbole H d'équation : $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

$$\boxed{t \equiv b^2mx - a^2py - a^2b^2 = 0}$$

Tangente t au point (r, s) d'une parabole P d'équation : $y^2 = 2px$

$$\boxed{t \equiv sy = px + pr}$$

Résolu le 19 mars 2003. Modifié le 24 août 2004. Modifié le 30 juin 2006. Modifié le 16 juillet 2008