Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 10

EXGAP100 – EXGAP109

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Sep 08

EXGAP100 – Bruxelles – Septembre 2006

Dans un plan euclidien rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes x et y, on donne les points A (2,0) et B (3,2). Déterminez les coordonnées

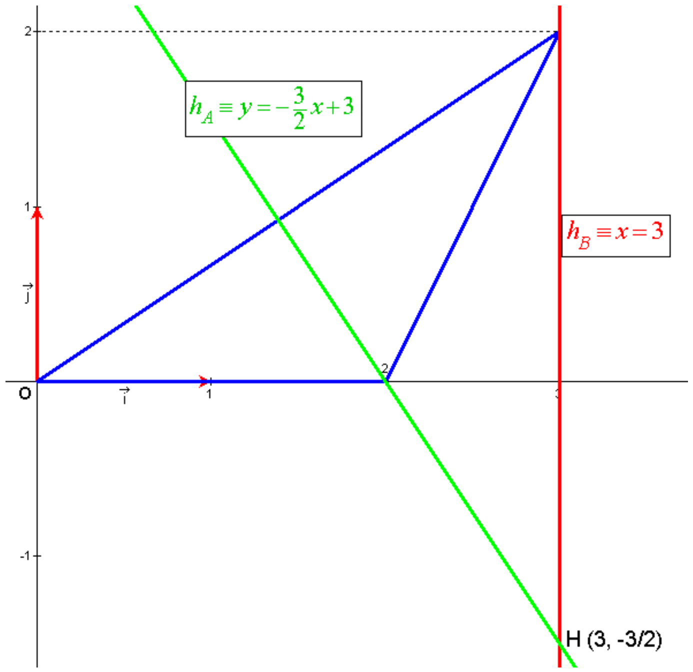
a) De l'orthocentre du triangle OAB
b) Du centre du cercle inscrit au triangle OAB
c) Du centre de gravité du triangle OAB.

Orthocentre du triangle OAB

La hauteur issue de B a pour équation $h_B \equiv x = 3$

La pente de OB étant de $\frac{2}{3}$, la hauteur issue de A a pour équation $h_A \equiv y = -\frac{3}{2}x + 3$

L'orthocentre est donné par $h_B \cap h_A \to \boxed{H\left(3, -\frac{3}{2}\right)}$



Centre du cercle inscrit au triangle OAB

C'est le point de rencontre des bissectrices.

Soit α la pente de la droite issue de O : $\alpha = \tan\dfrac{AOB}{2}$

On a : $\tan AOB = \dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2} \rightarrow \dfrac{2}{3} = \dfrac{2\alpha}{1-\alpha^2} \rightarrow 2-2\alpha^2 = 6\alpha \rightarrow \alpha^2+3\alpha-1=0$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{-3+\sqrt{13}}{2} \simeq 0.3028 \\ \alpha = \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2} \quad \text{A rejeter car correspond à la bissectrice extérieure de l'angle.} \end{cases}$$

La bissectrice issue de O est donc : $b_O \equiv y = 0.3028\,x$

La bissectrice issue de A a considérer est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{ABx}$ formé par AB et l'axe Ox.

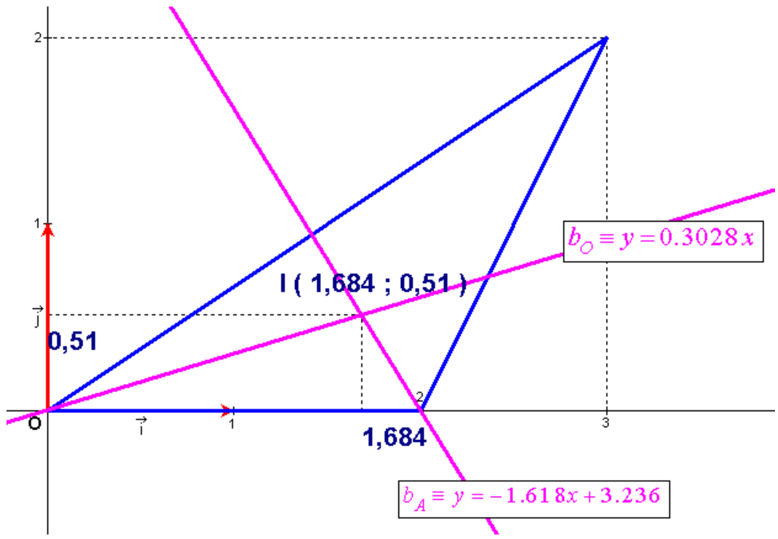
Soit β la pente de la bissectrice. $\tan \widehat{ABx} = \dfrac{2\beta}{1-\beta^2} \rightarrow 2 = \dfrac{2\beta}{1-\beta^2} \rightarrow \beta^2+\beta-1=0$

$$\rightarrow \begin{cases} \beta = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{A rejeter car correspond à la bissectrice intérieur de } \widehat{ABx} \\ \beta = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \simeq -1.618 \end{cases}$$

La bissectrice issue de A est donc : $b_A \equiv y = -1.618x + 3.236$

Le centre I du cercle inscrit est donné par $b_O \cap b_A : \begin{cases} y = 0.3028\,x \\ y = -1.618x + 3.236 \end{cases}$

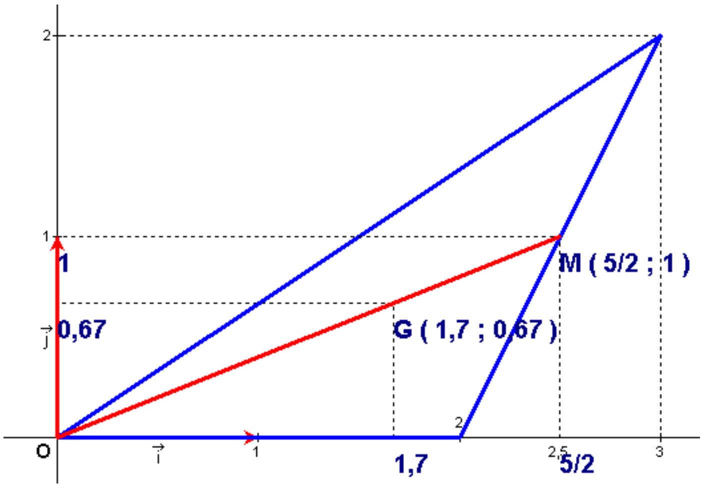
$\rightarrow \boxed{I : (1.684, 0.510)}$



Centre de gravité du triangle OAB

Le centre de gravité G est donné par le vecteur $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OM}$ où $M : \left(\frac{5}{2}, 1\right)$ est le milieu du coté AB; Donc $\overrightarrow{OG} = \frac{2}{3}\left(\frac{5}{2}, 1\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$

Finalement : $\boxed{G : \left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)}$

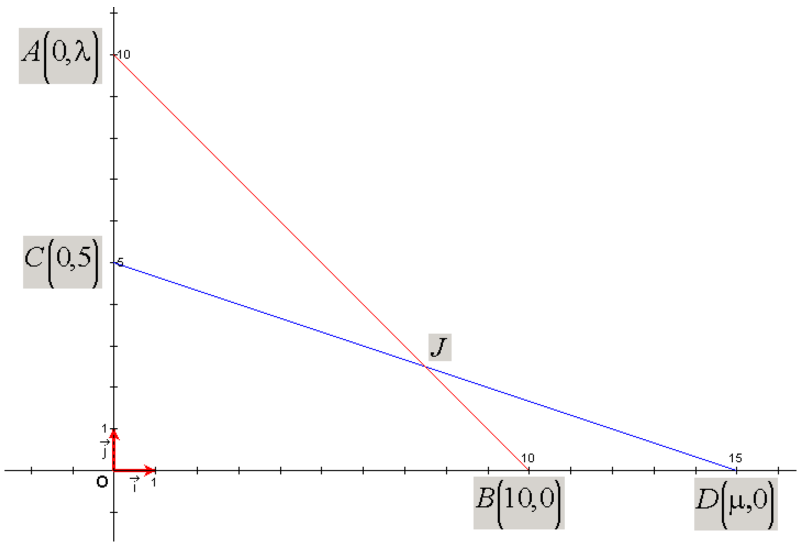


Le 10 février 2007

EXGAP101 – Mons – Juillet 2006 – Série A

Dans un système orthonormé *OXY*, 2 points *B* et *C* sont fixés ; leurs coordonnées sont : *B* (10, 0), *C* (0, 5). 2 autres points sont variables : le point *A* (0, λ) parcourt l'axe *OY* et le point *D* (μ, 0) parcourt l'axe *OX*. Le point d'intersection entre les segments variables *AB* et *CD* est dénommé « *J* ».

1. Déterminer l'abscisse et l'ordonnée du point *J* en fonction de λ et de μ par les méthodes de la Géométrie Analytique
2. Quelle relation μ = *f* (λ) faut-il imposer pour que *J* se déplace sur une droite d'équation : $x = 5$?
3. Quelle relation μ = *f* (λ) faut-il imposer pour que le point *J* assure un caractère inscriptible au quadrilatère convexe *OCJB* ? Dans le cas où λ = 10, dessiner les 2 droites *AB* et *CD* ainsi que cette circonférence. Déterminer l'équation de cette circonférence circonscrite.
4. Dans ce cas où le quadrilatère *OCJB* est convexe et inscriptible et où λ = 10, tracer la circonférence circonscrite au triangle *ADB* et en déterminer l'équation ; la droite *DJ* est ensuite prolongée jusqu'à son intersection *K* avec la circonférence circonscrite au triangle *ADB* ; Le point d'intersection d'ordonnée négative de cette circonférence avec l'axe *OY* est dénommé « *L* » ; démontrer par les méthodes de la Géométrie Synthétique que *KB* = *LB*.



1) <u>1ère méthode :</u>

Soit λ l'ordonnée variable du point A et μ l'abscisse variable du point D.

Equation de AB : $A\ (0, \lambda\ )$; $B\ (10, 0\ ) \to y = \lambda\ \left(\frac{-x}{10}+1\right)$ $\qquad (1)$

Equation de CD : $C\ (0, 5\ )$; $D\ (\mu, 0\ ) \to y = 5\left(\frac{-x}{\mu}+1\right)$ $\qquad (2)$

Coordonnées de l'intersection J de AB et CD :

$$(1)-(2) \to 0 = \lambda\ \left(\frac{-x_J}{10}+1\right) - 5\left(\frac{-x_J}{\mu}+1\right)$$

$$\to 5-\lambda = x_J\left(\frac{5}{\mu}-\frac{\lambda}{10}\right) \to \boxed{x_J = \frac{10\mu(\lambda-5)}{\mu\lambda-50}} \qquad (3)$$

En remplaçant dans $(2) \to y_J = 5\left(\frac{-\frac{10\mu(\lambda-5)}{\mu\lambda-50}}{\mu}+1\right) \to \boxed{y_J = \frac{5\lambda(\mu-10)}{\mu\lambda-50}}$ $\qquad (4)$

<u>2ème méthode</u> :

Exprimons que la pente de $AJ =$ la pente de AB :

$$\to \frac{y_J-\lambda}{x_J-0} = \frac{0-\lambda}{10-0} \to x_J = 10-10\frac{y_J}{\lambda} \qquad (1)$$

Exprimons que la pente de $CJ =$ la pente de CD :

$$\to \frac{y_j-5}{x_J-0} = \frac{0-5}{\mu-0} \quad \to x_J = \mu-\mu\frac{y_j}{5} \qquad (2)$$

$$(1)-(2) \to 10-10\frac{y_J}{\lambda} = \mu-\mu\frac{y_j}{5} \to y_J = \frac{5\lambda(\mu-10)}{\mu\lambda-50} \qquad (3)$$

$$(3) \text{ dans } (1) \to \quad x_J = \frac{10\mu(\lambda-5)}{\mu\lambda-50} \qquad (4)$$

2) De $(3) \to 5 = \frac{10\mu(\lambda-5)}{\mu\lambda-50} \to 5\mu\lambda-250 = 10\mu\lambda-50\mu$

$$\to \mu\lambda-50 = 2\mu\lambda-10\mu \to \boxed{\mu = \frac{50}{10-\lambda}}$$

3) Comme le quadrilatère $OCJB$ comporte un angle droit en O, il n'est inscriptible que si et seulement si l'angle opposé CJB est également un angle droit.
$\rightarrow$ AB doit être perpendiculaire à CD.

$$AB \equiv y = \lambda\left(-\frac{x}{10}+1\right) \quad \rightarrow \quad m_{AB} = -\frac{\lambda}{10} \qquad (1)$$

$$CD \equiv y = 5\left(-\frac{x}{\mu}+1\right) \quad \rightarrow \quad m_{CD} = -\frac{5}{\mu} \qquad (2)$$

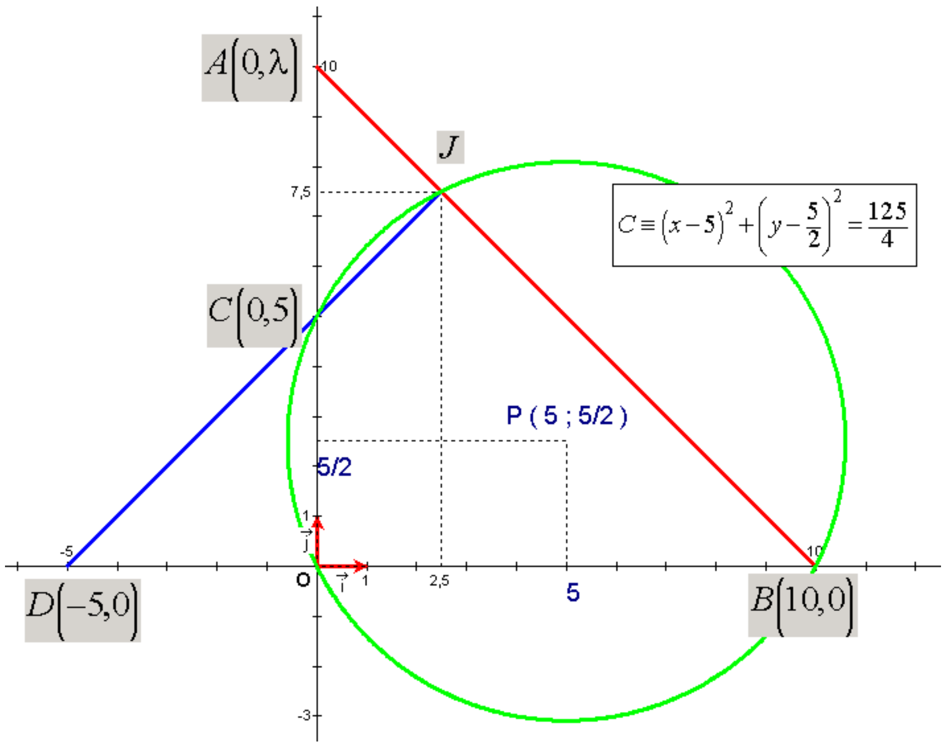
$$AB \perp CD \rightarrow m_{AB}.m_{CD} = -1 \rightarrow \boxed{\mu = -\frac{\lambda}{2}}$$

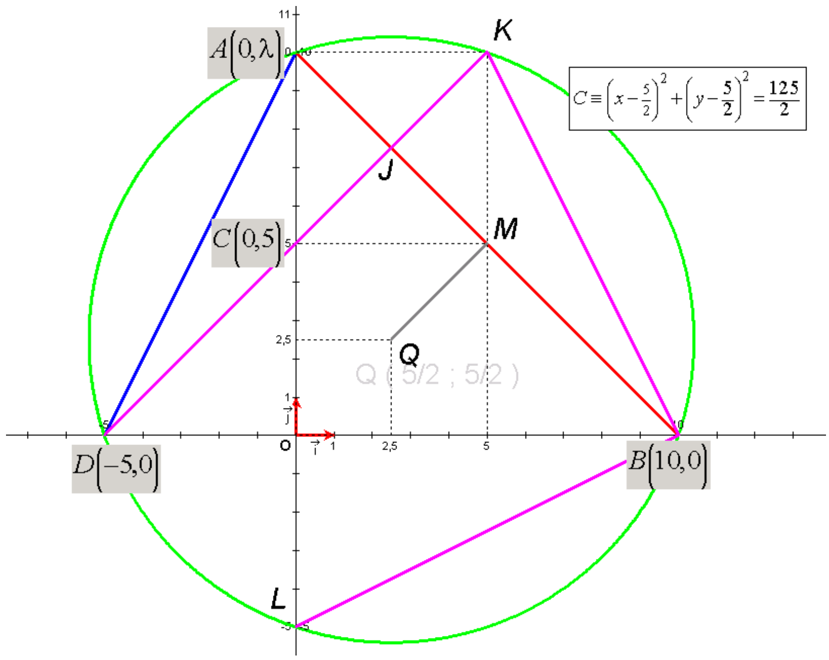
Si $\lambda = 10 \rightarrow \mu = -5 \rightarrow J : \begin{cases} x_J = 5 \\ y_J = 15/2 \end{cases}$

BC est un diamètre $\rightarrow$ Le centre P du cercle esr le milieu de $BC \rightarrow P\left(5, \frac{5}{2}\right)$

Le rayon R du cercle est la distance $OP \rightarrow R^2 = |\ OP\ |^2 = 25 + \frac{25}{4} = \frac{125}{4}$

Le cercle a donc pour équation : $\boxed{C \equiv (x-5)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}}$





4) Le centre Q de la circonférence circonscrite au triangle ADB est à l'intersection des médiatrices de DB et de AB:

— Médiatrice de DB : $x = 2.5$

— Médiatrice de AB : passe par M (5,5), milieu de AB et est perpendiculaire à AB : $y = x$

$\rightarrow Q$ (2.5, 2.5)

Son rayon R' est égal à $|\,AQ\,|$, soit : $R'^2 = 2.5^2 + (10-2.5)^2 = \dfrac{125}{2}$

Equation de la circonférence circonscrite au triangle ABD : $\boxed{(x-2.5)^2 + (y-2.5)^2 = \dfrac{125}{2}}$

Les angles $\widehat{OAB} = \widehat{ODK}$ car angles à côtés peprendiculaires $(OD \perp OA$ et $DK \perp AB)$

Or des angles inscrits égaux interceptent des arc égaux $\rightarrow$ $|\,KB\,| = |\,LB\,|$

EXGAP102 – Mons – Juillet 2006 – Série B

Dans un système d'axes orthonormé *OXY*, soit une circonférence (C_1) centrée en *O* et de rayon R_1 = 30 et une seconde circonférence (C_2) centrée en *P* (+ 20, - 20) et de rayon R_2 = 40.
Ces 2 circonférences se coupent aux points *I* et *J* tels que l'ordonnée de *J* est > 0 et que l'ordonnée de *I* est < 0.
Soit un point *K* de (C_1) tel que son abscisse est positive et tel que son ordonnée = – 10.
Joignons *I* à *K* et *J* à *K* et prolongeons *IK* et *JK* jusqu'à leurs points d'intersection avec la circonférence (C_2), dénommés respectivement « *L* » et « *M* ».

1. Démontrer, par les méthodes de la Géométrie Synthétique, que la corde *LM* de la circonférence (C_2) est parallèle à la tangente à (C_1) en *K*
2. Démontrer, par les méthodes de la Géométrie Synthétique et de la Trigonométrie, que :

   $$\text{Aire d'un triangle quelconque } ABC = 0.5 \times AC \times BC \times \sin ACB$$
3. Démontrer, par les méthodes de la Géométrie Synthétique, que le rapport des aires des triangles *IJK* et *KLM* est égal au carré du rapport des côtés *IJ* et *LM*.
4. Calculer, par les méthodes de la Géométrie Analytique, le rapport des aires des triangles *IJK* et *KLM*, en tenant compte de ce que : Aire du triangle *IJK* / Aire du triangle *KLM* = (*IJ* / *LM*) ^{2}
5. Déterminer les coordonnées des foyers de 2 ellipses dont la longueur (2*b*) du petit axe, parallèle à *OY*, vaut 20 pour les 2 ellipses et dont le rapport des aires est égal à 5 / 4 . La longueur (2 *a*) du grand axe de la plus petite des 2 ellipses vaut 30. Ecrire les équations de ces 2 ellipses sachant que la plus petite des 2 ellipses est centrée en un point *U* de coordonnées (+ 10, – 15) et la plus grande des 2 ellipses est centrée en un point *W* (– 20, + 15)

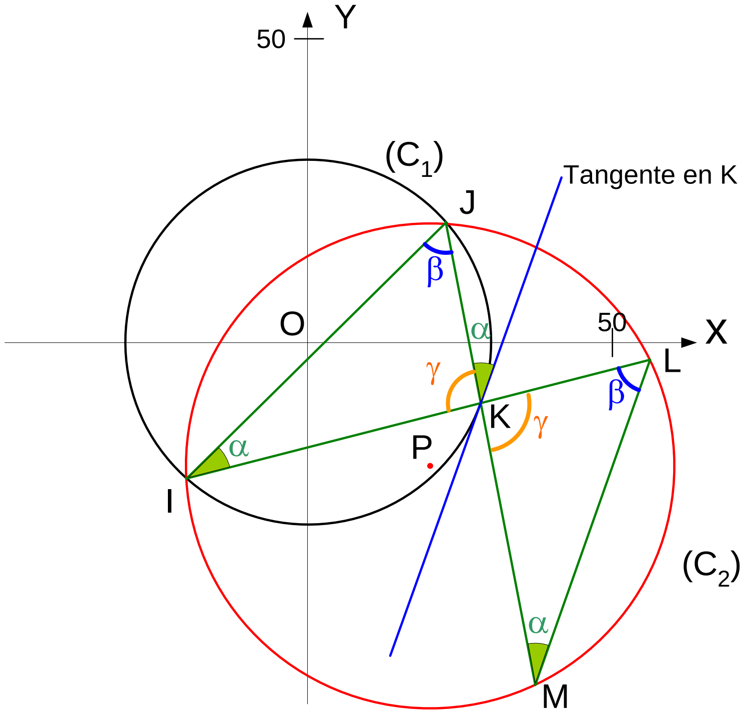


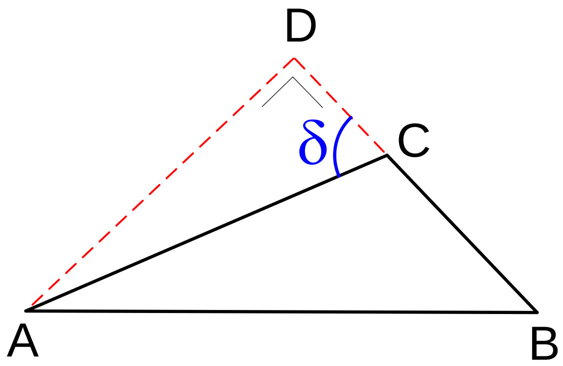
Fig 1

1) Dans la circonférence (C_1), l'angle inscrit JIK et l'angle tangentiel formé par la tangente et la corde KJ interceptent tous deux le même arc JK. Il sont donc égaux (dénommés "α" sur la figure 1 ci-dessus).

Dans la circonférence (C_2), l'angle inscrit $\widehat{JKL}$ et l'angle inscrit $\widehat{JML}$ interceptent tous deux le même arc JL. Ils ont donc égaux $\left(\widehat{JML} \text{ vaut donc aussi } \alpha\right)$.

La tangente à (C_1) en K et la corde LM de (C_2) sont coupées par la droite JM et forment donc avec cette droite un même angle α.

La tangente à (C_1) en K et la corde LM de (C_2) sont donc parallèles.



2) Aire du triangle $ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times BC \times (AC \times \sin \delta)$

$$= \frac{1}{2} \times AC \times BC \times \sin\left(\delta - ACB\right)$$

$$\boxed{\text{Aire du triangle } ABC = \frac{1}{2} \times AC \times BC \times \sin ACB}$$

3) Les angles IKJ et LKM de ces 2 triangles sont opposés par le sommet et sont donc égaux (dénommés " γ " sur la FIG. 1).

Comme les angles JIK et KML sont aussi des angles égaux (= a , cf. question 1°), les angles IJK et KLM de ces 2 triangles sont aussi nécessairement égaux (la somme des angles d'un triangle vaut en effet π).
Ces 2 angles IJK et KLM sont dénommés " β " sur la FIG. 1.

Comme les 2 triangles IJK et KLM présentent donc des angles égaux, ces 2 triangles sont semblables.

Par suite : $\dfrac{IJ}{ML} = \dfrac{IK}{MK}$ $\quad (1)$

Or, selon ce qui vient d'être démontré en question 2° :

Aire du triangle IJK $= 0.5 \times IJ \times IK \times \sin a$

Aire du triangle KLM $= 0.5 \times ML \times MK \times \sin a$

Donc : $\dfrac{\text{Aire du triangle } IJK}{\text{Aire du triangle } KLM} = \left(\dfrac{IJ}{ML}\right) \times \left(\dfrac{IK}{MK}\right)$

Par suite, en tenant compte de (1):

$$\frac{\text{Aire du triangle } IJK}{\text{Aire du triangle } KLM} = \left(\frac{IJ}{LM}\right)^2$$

4) A. Calcul des coordonnées de I et de J et de la longueur IJ

Equation de la circonférence $(C_1): X^2 + Y^2 = 900$ $\quad (2)$

Equation de la circonférence $(C_2): (X-20)^2 + (Y+20)^2 = 40^2$

$\rightarrow X^2 + Y^2 - 40X + 40Y = 80$ $\quad (3)$

$(3)-(2) \rightarrow -40X + 40Y = -100 \rightarrow X = Y + 2.5$ $\quad (4)$

(4) dans $(1) \rightarrow (Y+2.5)^2 + Y^2 = 900 \rightarrow 2Y^2 + 5Y - 893.75 = 0$ $\quad (5)$

La résolution de cette équation (5), du second degré en Y donne lieu aux ordonnées des points I et J $: \rightarrow Y_I = -22.426; \quad Y_J = 19.926$

En reportant ces valeurs dans (4), les valeurs des abscisses des points I et J sont déterminées : $X_I = -19.926; \quad X_J = 22.426$

La distance IJ est déduite des coordonnées à présent connues de I et de J :

$IJ = \sqrt{(19.926 + 22.426)^2 + (22.426 + 19.926)^2} \rightarrow IJ = 59.895$

B. Calcul des coordonnées du point L et des distances JK et KL

Le point K appartient à la circonférence (C_1) et son ordonnée $= -10$
Donc, de (2) : $X_K{}^2 + 10^2 = 900 \rightarrow X_K = 28.284$

Le point L est à l'intersection de la circonférence (C_2) et de la droite IK :
Equation de la droite IK $\left[I(-19.926, -22.426); K(28.284, -10)\right]$
$\rightarrow \underline{Y = 0.2577X - 17.2901}$ $\quad (6)$

De (3) et $(6) \rightarrow X^2 + (0.2577X - 17.2901)^2 - 40X + 40(0.2577X - 17.2901) = 800$
$\rightarrow 1.0664X^2 - 38.6033X - 1192.6564 = 0 \quad (7)$
L'abscisse du point L vaut donc : $X_L = 56.1261$
Donc, de $(6) \rightarrow Y_L = -2.8264$

Les distances JK $\left[J(+22.426, +19.926), K(+28.284, -10)\right]$
et $KL\left[(+28.284, -10), (+56.1261, -2.8264)\right]$ valent ainsi :

$$JK = \sqrt{5.858^2 + 29.926^2} = 30.494$$
$$KL = \sqrt{27.8421^2 + 7.1736^2} = 28.751$$

C. Calcul de la distance LM et du rapport des aires des triangles IJK et KLM

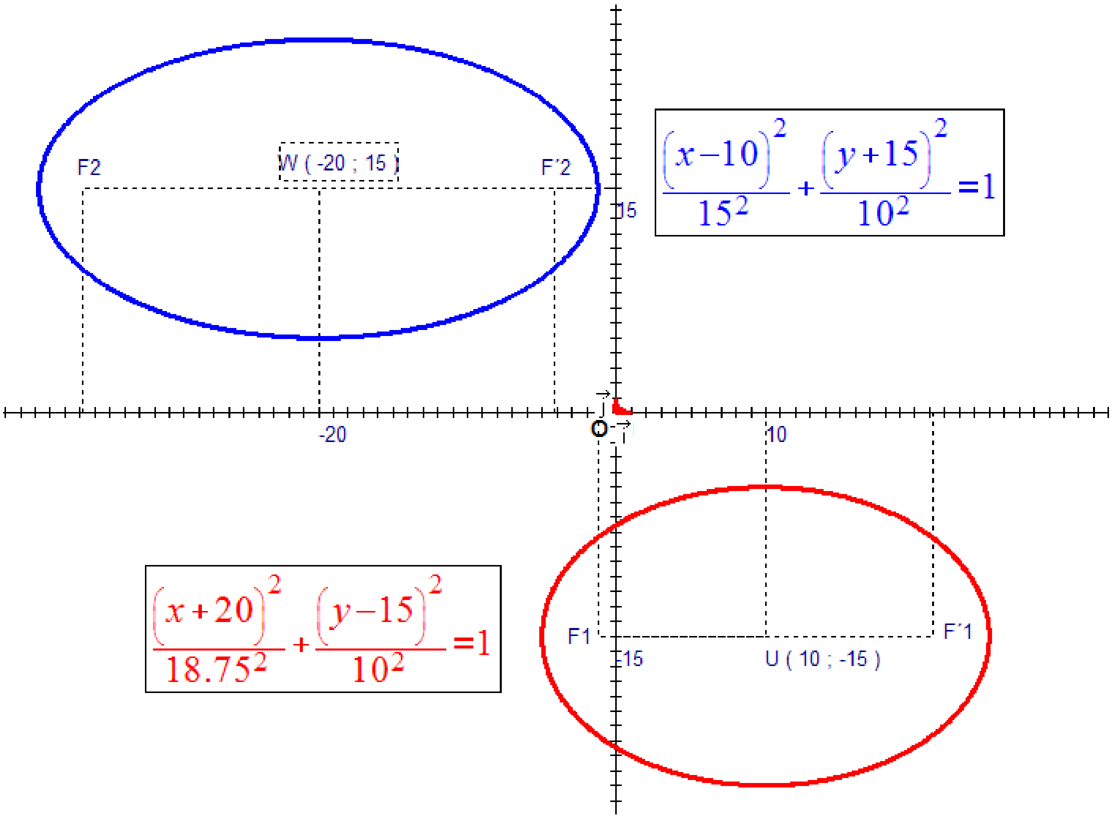
De la similitude des triangles IJK et KLM :
$$LM = IJ \times \frac{KL}{JK} = 59.895 \times \frac{28.751}{30.494} = 56.471$$

Le rapport des aires des 2 triangles vaut ainsi :
$$\frac{\text{Aire du triangle } IJK}{\text{Aire du triangle } KLM} = \left(\frac{IJ}{LM}\right)^2 = \left(\frac{59.895}{56.471}\right)^2 = 1.125$$

5) Si a et b sont les demi-grand et demi-petit axes d'une ellipse, son aire se calcule selon : $\pi \times a \times b$
L'aire de la plus petite des 2 ellipses $[a, b]$ vaut : $\pi \times 15 \times 10$
L'aire de la plus grande des 2 ellipses $[a', b']$ vaut : $1.25 \times \pi \times 15 \times 10$ et vaut aussi $\pi \times a' \times 10$
Donc , le demi-grand axe a' de cette ellipse vaut : $a' = 1.25 \times 15 = 18.75$

La plus petite des ellipses est caractérisée par $a = 15$ et $b = 10$.
Son équation s'écrit : $\dfrac{(X-10)^2}{15^2} + \dfrac{(Y+15)^2}{10^2} = 1$
Sa demi-distance focale c est telle que : $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow c = 11.18$
Les coordonnées de ses foyers sont donc : $(-1.18, -15)$ et $(21.18, -15)$

La plus grande des ellipses est caractérisée par $a' = 18.75$ et $b' = 10$.
Son équation s'écrit : $\dfrac{(X+20)^2}{18.75^2} + \dfrac{(Y-15)^2}{10^2} = 1$
Sa demi-distance focale c' est telle que : $c'^2 = a'^2 - b'^2 \rightarrow c' = 15.86$
Les coordonnées de ses foyers sont donc : $(-35.86, +15)$ et $(-4.14, +15)$



Le 10 mars 2007

EXGAP103 – Mons – Juillet 2006 – Série C

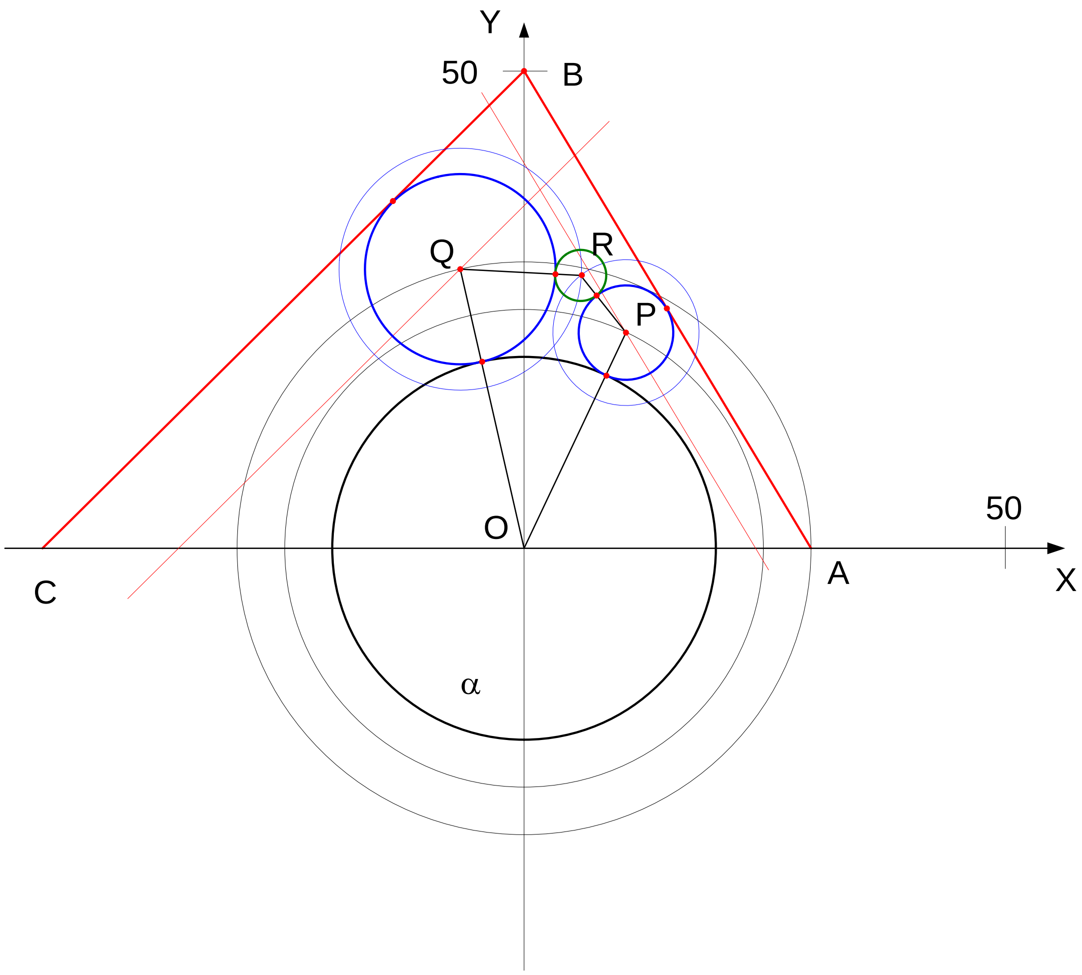
1°. Dans un système d'axes OXY orthonormé, une circonférence (C_1) centrée à l'origine O et de rayon $R_1 = 20$ est donnée, ainsi que 2 droites AB et BC [Coordonnées de A : (30, 0) ; Coordonnées de B : (0, 50) ; Coordonnées de C : (– 50, 0)].

Par les méthodes de la Géométrie Synthétique, construire une circonférence (C_2) de centre P, de rayon $R_2 = 5$, tangente à la fois à la droite AB et à la circonférence (C_1) et telle qu'elle ne traverse pas l'axe OX, puis une circonférence (C_3) de centre Q, de rayon $R_3 = 10$, tangente à la fois à la droite BC et à la circonférence (C_1) et telle qu'elle ne traverse pas l'axe OX.

Construire enfin une circonférence (C_4) de centre R, de rayon $R_4 = 2.5$, tangente à la fois aux 2 circonférences (C_2) et (C_3) et telle que son centre R soit au-dessus du segment PQ.

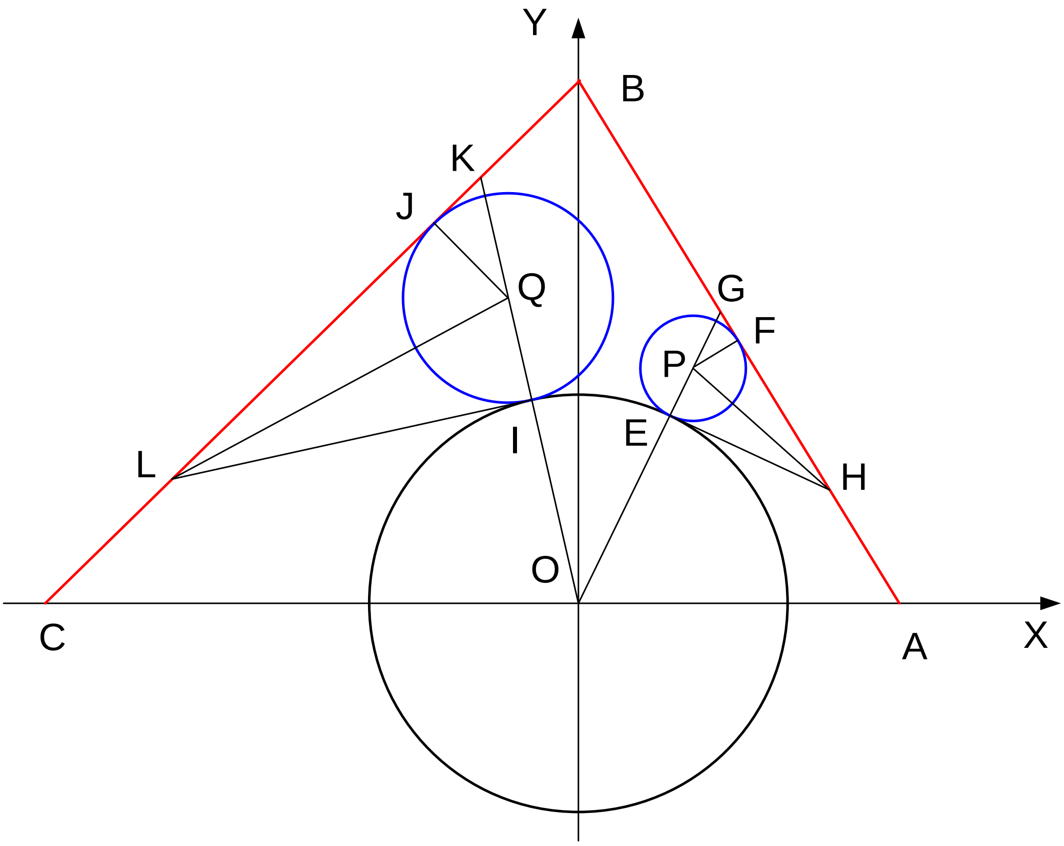
2°. Soit E et F les points de contact de (C_2) avec, respectivement, (C_1) et AB et soit I et J les points de contact de (C_3) avec, respectivement, (C_1) et BC.
La tangente commune à (C_1) et à (C_2) en E coupe AB en H et la tangente commune à (C_1) et à (C_3) en I coupe BC en L.
La droite OP coupe AB en G et la droite OQ coupe BC en K.
Joignons H à P et L à Q.
Exprimer, par les méthodes de la Géométrie Synthétique, la somme des angles $\widehat{EHP}$ et $\widehat{ILQ}$ en fonction des angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{BCA}$ et $\widehat{GOK}$.

3°. Par les méthodes de la Géométrie Analytique, déterminer les équations de (C_2) ou (C_3) [au choix] et de (C_4) [*Pour déterminer C_4, la connaissance préalable des coordonnées des centres P et Q de C_2 et de C_3 est indispensable : selon que vous aurez fait choix de la détermination de C_2 ou de C_3, l'Interrogateur vous fournira les coordonnées de Q ou de P : n'hésitez pas à en faire la demande à l'Interrogateur !*]



1°. Pour tracer une circonférence de rayon R_i tangente à la fois à une droite et à une circonférence donnée de rayon R_j et de centre C_j, il faut tracer une parallèle à distance R_i de la droite et une circonférence de centre C_j et de rayon $(R_j + R_i)$: l'intersection de cette parallèle et de cette circonférence de rayon $(R_j + R_i)$ donne lieu au centre C_i de la circonférence recherchée.

Pour tracer une circonférence de rayon R_k tangente à la fois à 2 circonférences données de rayon R_m et R_n et de centres C_m et C_n, il faut tracer 2 circonférences de centres C_m et C_n et de rayons $(R_m + R_k)$ et $(R_n + R_k)$: l'intersection de ces 2 nouvelles circonférences donne lieu au centre C_k de la circonférence recherchée.



2° Dans les quadrilatères $EPFH$ et $IQJL$, les angles en E, F, I et J sont droits :
ces quadrilatères sont donc inscriptibles et les sommes de leurs angles opposés valent π.

Par suite, comme les cordes EP et FP valent le rayon R_2 et comme les cordes IQ et JQ valent le rayon R_3 : $\widehat{EHP} = \widehat{FHP} = 0.5\times\left(\pi - \widehat{EPF}\right)$ et $\widehat{ILQ} = \widehat{JLQ} = 0.5\times\left(\pi - \widehat{IQJ}\right)$

Or, dans les triangles rectangles FGP et JKQ :

$\widehat{FGP} = 0.5\pi - \left(\pi - \widehat{EPF}\right)$ et $\widehat{JKQ} = 0.5\pi - \left(\pi - \widehat{IQJ}\right)$

Et donc : $\widehat{EPF} = \widehat{FGP} + 0.5\pi$ et $\widehat{IQJ} = \widehat{JKQ} + 0.5\pi$

Dans les triangles OGA et OKC : $\widehat{FGP} = \pi - \left(\widehat{BAC} + \widehat{AOG}\right)$ et $\widehat{JKQ} = \pi - \left(\widehat{BCA} + \widehat{COK}\right)$

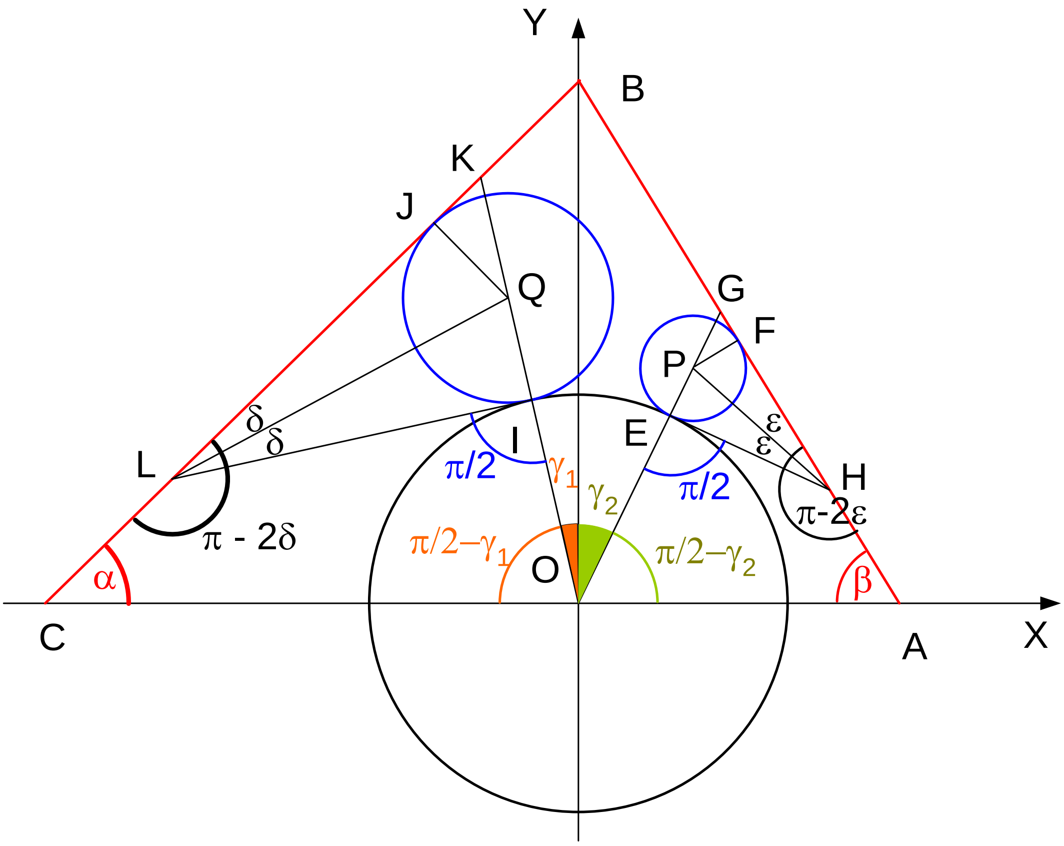
Donc : $\widehat{EPF} = 1.5\pi - \left(\widehat{BAC} + \widehat{AOG}\right)$ et $\widehat{IQJ} = 1.5\pi - \left(\widehat{BCA} + \widehat{COK}\right)$

Donc : $\widehat{EHP} = 0.5\times\left(\left(\widehat{BAC} + \widehat{AOG}\right) - 0.5\pi\right)$

et $\widehat{ILQ} = 0.5\times\left(\left(\widehat{BAC} + \widehat{COK}\right) - 0.5\pi\right)$

$\rightarrow$ $\widehat{EHP} + \widehat{ILQ} = 0.5\times\left(\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right) + \left(\widehat{AOG} + \widehat{COK} - \pi\right)\right)$

$\rightarrow$ $\boxed{\widehat{EHP} + \widehat{ILQ} = 0.5\times\left(\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right) - \widehat{GOK}\right)}$



Variante N° 1 pour la solution de la question 2°

La somme des angles de tout quadrilatère = 2 π.

Par suite, dans le quadrilatère *COIL* :

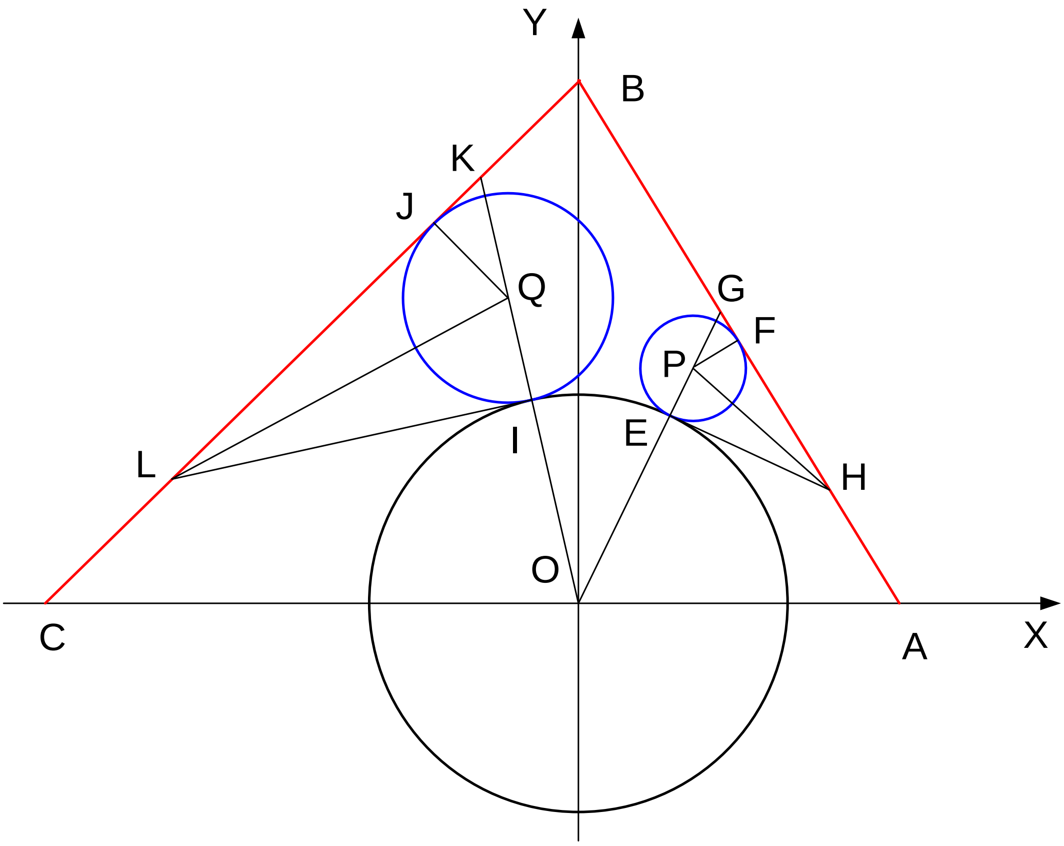
$$\alpha+\left(\frac{\pi}{2}-\gamma_1\right)+\frac{\pi}{2}+(\pi-2\delta)=2\pi\rightarrow\alpha-\gamma_1-2\delta=0\rightarrow2\delta=\alpha-\gamma_1\qquad(1)$$

De même, dans le quadrilatère *OAHE* :

$$\beta+\left(\frac{\pi}{2}-\gamma_2\right)+\frac{\pi}{2}+(\pi-2\varepsilon)=2\pi\rightarrow\beta-\gamma_2-2\varepsilon=0\rightarrow2\varepsilon=\beta-\gamma_2\qquad(2)$$

(1) et (2) $\rightarrow\varepsilon+\delta=0.5\times\left((\alpha+\beta)-(\gamma_1+\gamma_2)\right)$

Ou encore : $\boxed{\widehat{EHP}+\widehat{ILQ}=0.5\times\left(\left(\widehat{BAC}+\widehat{BCA}\right)-\widehat{GOK}\right)}$


Y
B
K
J
Q
G
F
P
E
I
L
H
O
C
A
X

Variante N° 2 pour la solution de la question 2°

Le triangle LIK est rectangle : $ILK = \frac{\pi}{2} - IKL = \frac{\pi}{2} - \left(\pi - OKB\right) = OKB - \frac{\pi}{2}$ $\quad(1)$

Mais comme LJ et LI sont les 2 tangentes à la circonférence de centre Q

$$: ILQ = JLQ = \frac{ILK}{2} \qquad (2)$$

De (1) et (2): $\widehat{ILQ} = \frac{\widehat{OKB}}{2} - \frac{\pi}{4}$ $\quad(3)$

Le triangle HEG est rectangle $\widehat{EHG} = \frac{\pi}{2} - \widehat{EGH} = \frac{\pi}{2} - \left(\pi - \widehat{OGB}\right) = \widehat{OGB} - \frac{\pi}{2}$ $\quad(4)$

Mais comme HF et HE sont les 2 tangentes à la circonférence de centre P

$$: \widehat{EHP} = \widehat{FHP} = \frac{\widehat{EHG}}{2} \qquad (5)$$

De (4) et (5) $\widehat{EHP} = \frac{\widehat{OGB}}{2} - \frac{\pi}{4}$ $\quad(6)$

De (3) et (6) $\widehat{ILQ} + \widehat{EHP} = \frac{1}{2}\left(\widehat{OKB} + \widehat{OGB} - \pi\right)$ $\quad(7)$

Or, la somme des angles de tout quadrilatère vaut 2 π : ainsi en est-il donc de la somme des angles du quadrilatère OKBG et, par suite :

$\widehat{OKB} + \widehat{OGB} = 2\pi - \left(\widehat{GOK} + \widehat{GKB}\right) = 2\pi - \left(\widehat{GOK} + \widehat{ABC}\right)$ $\quad(8)$

Or, la somme des angles de tout triangle vaut π : ainsi en est-il du triangle ABC

et, par suite : $\widehat{ABC} = \pi - \left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right)$ $\quad(9)$

De (8) et (9) : $\widehat{OKB} + \widehat{OGB} = 2\pi - \left(\widehat{GOK} + \left(\pi - \left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right)\right)\right)$

ou $\widehat{OKB} + \widehat{OGB} = \pi + \left(\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right) - \widehat{GOK}\right)$ $\quad(10)$

De (7) et (10) : $\boxed{\widehat{EHP} + \widehat{ILQ} = 0.5 \times \left(\left(\widehat{BAC} + \widehat{BCA}\right) - \widehat{GOK}\right)}$

3° A) <u>Circonférence (C_2)</u>

<u>1er lieu de son centre P</u> : circonférence de centre O et de rayon 25 : $X^2+Y^2=25^2$ $\quad (1)$

<u>2ème lieu de son centre P</u> : parallèle à AB, à distance 5 de AB

$A(30,0), B(0,50) \rightarrow$ Angle de AB avec OX = $\arctan\dfrac{50}{30} = 59.036°$

$$AU = \frac{5}{\sin 59.036°} = 5.831 \rightarrow OU = 30 - 5.831 = 24.169 \rightarrow U(24.169, 0)$$

$\rightarrow$ Equation de la parallèle : $Y = \tan(\pi - 59.036°)X + b$

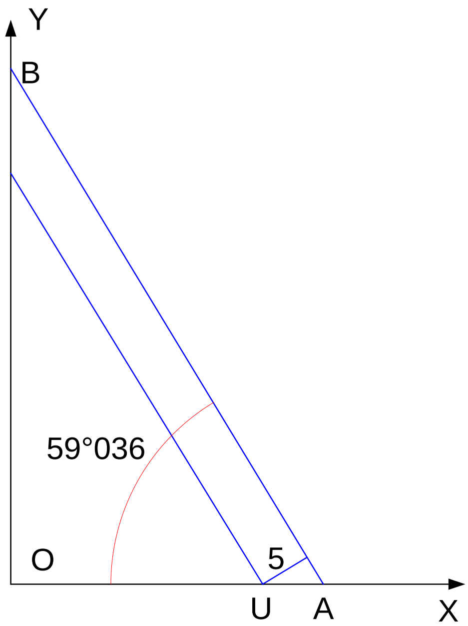
$$\rightarrow 0 = -(1.667 \times 24.169) + b \rightarrow Y = -1.667X + 40.290 \qquad (2)$$

De (1) et (2) : $X^2 + (-1.667X + 40.290)^2 = 25^2 \rightarrow 3.779X^2 - 134.327X + 998.284 = 0$

$\rightarrow X_P = +10.582 \qquad (3)$

(3) dans $(2) \rightarrow Y_P = +22.650 \qquad (4)$

De (3) et (4): Equation de la circonférence (C_2) : $\boxed{(X - 10.582)^2 + (Y - 22.650)^2 = 5^2}$



B. Circonférence (C_3)

1er lieu de son centre Q : circonférence de centre O et de rayon 30 : $X^2 + Y^1 = 30^2$ $\quad (5)$

2ème lieu de son centre Q : parallèle à BC, à distance 10 de BC

$C(-50,0), B(0,50) \to$ Angle de BC avec $OX = 45°$

$$CW = \frac{10}{\sin 45°} = 14.142 \to OW = 50 - 14.142 = 38.858 \quad \to W(-35.858, 0)$$

$\to$ Equation de la parallèle : $Y = \tan 45.X + b$

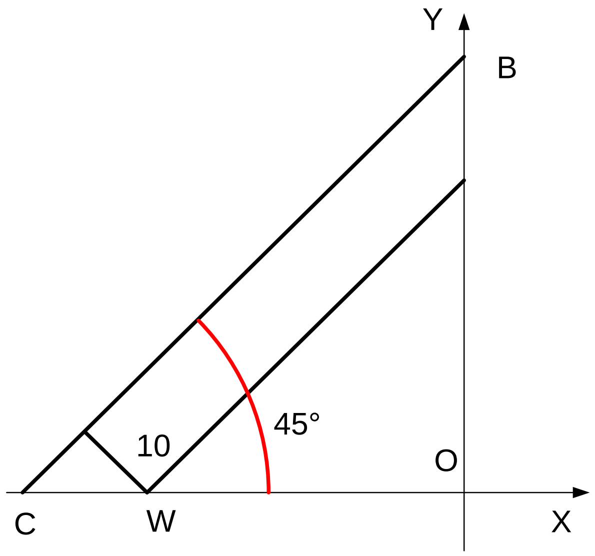
$$\to 0 = (1.000X - 35.858) + b \to Y = X + 35.858 \qquad (6)$$

De (5) et (6) : $X^2 + (X + 35.858)^2 = 30^2$

$$\to 2X^2 + 71.716X + 385.796 = 0 \to X_Q = -6.591 \qquad (7)$$

(7) dans $(6) \to Y_Q = +29.267$ $\quad (8)$

De (7) et (8) : Equation de la circonférence (C_3) : $\boxed{(X + 6.591)^2 + (Y - 29.267)^2 = 10^2}$



C. Circonférence (C_4)

1er lieu de son centre R : circonférence de centre P et de rayon 7.5 :

$$(X-10.582)^2+(Y-22.65)^2=7.5^2 \text{ ou } X^2+Y^2-21.164X-45.300Y+568.751=0 \qquad (9)$$

2ème lieu de son centre R : circonférence de centre Q et de rayon 12.5 :

$$(X+6.591)^2+(Y-29.267)^2=12.5^2 \text{ ou } X^2+Y^2+13.182X-58.534Y+743.749=0 \qquad (10)$$

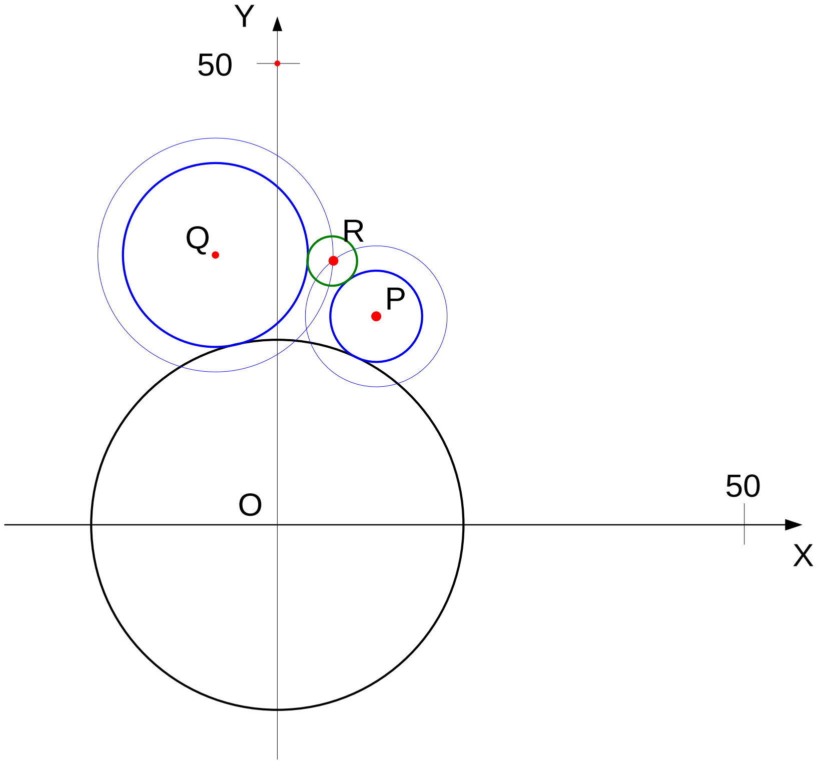
$$(9)-(10):\to -34.346X+13.234Y-174.998=0 \to X=0.385-5.095 \qquad (11)$$

$$(11) \text{ dans } (9) \to (0.385Y-5.095)^2+Y^2-21.164(0.385Y-5.095)-45.300Y+568.751=0$$

$$\to 1.148Y^2-57.371Y+702.541=0 \to Y_R=+28.509 \qquad (12)$$

$$(12) \text{ dans } (11) :\to X_R=(0.385\times 28.509)-5.095 \to X_R=+5.881 \qquad (13)$$

De (12) et (13) : Equation de la circonférence (C_4) : $\boxed{(X-5.881)^2+(Y-28.509)^2=2.5^2}$

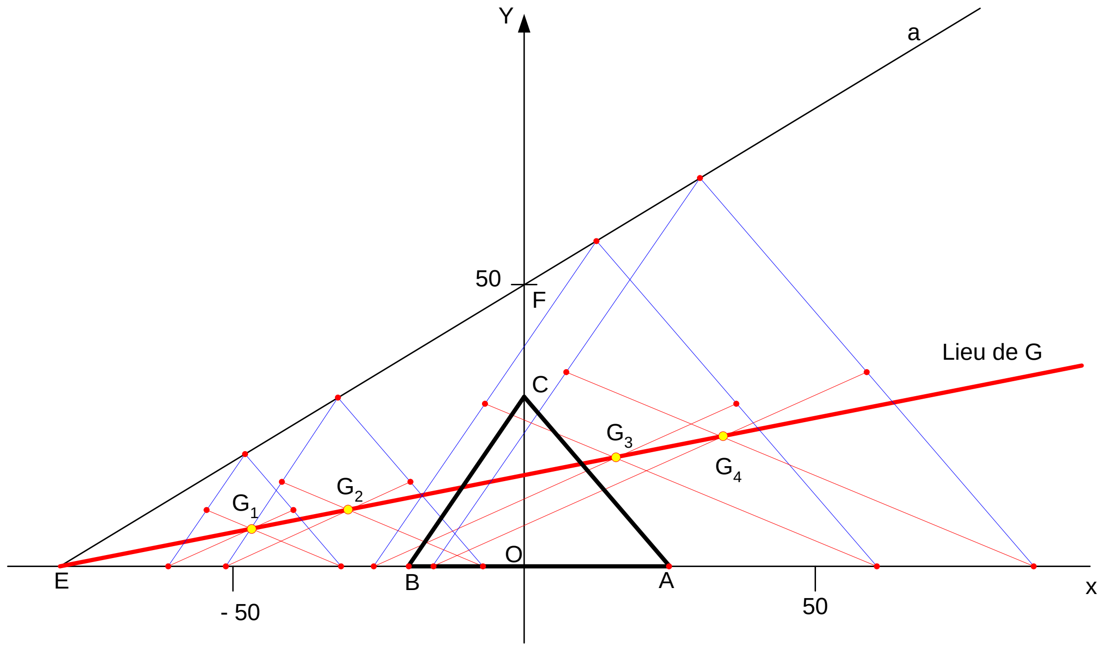


[2]Le 10 mars 2007

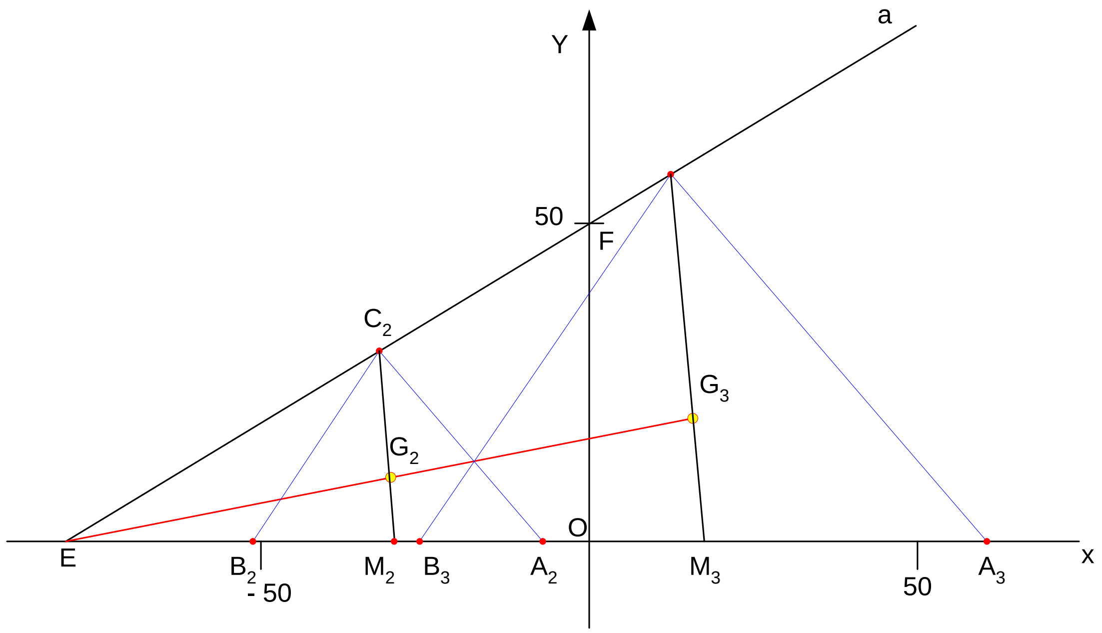
EXGAP104 – Mons – Juillet 2006 – Série D

Dans le système de référence orthonormé OXY, soit un triangle ABC, les coordonnées (X, Y) de ses sommets étant : A (25, 0), B (- 20, 0), C (0, 30).
Soit aussi une droite a passant par les points E (- 80, 0) et F (0, 50).
Un triangle variable, semblable à ABC, se déplace de telle sorte que son sommet C_i parcourt la droite a, tandis que ses sommets A_i et B_i parcourent l'axe OX.

1. Par les méthodes de la Géométrie Synthétique, déterminer le lieu du centre de gravité variable du triangle variable $A_iB_iC_i$.
2. Par les méthodes de la Géométrie Analytique, déterminer l'équation du lieu du centre de gravité variable du triangle variable $A_iB_iC_i$.
3. Par les méthodes de la Géométrie Analytique, déterminer l'équation de la circonférence dont le centre est situé sur OY et qui est tangente à la droite a et au lieu du centre de gravité des triangles $A_iB_iC_i$ tel qu'il vient d'être étudié en questions 1° et 2°.
4. Par les méthodes de la Géométrie Analytique, déterminer l'équation de la parabole dont le sommet est situé sur OX, dont l'axe est parallèle à OY et qui passe par les 2 points I et J de la circonférence - déterminée en question 3° - qui sont équidistants de la droite a et du lieu des centres de gravité déterminé en questions 1° et 2°. Cette parabole sera telle que l'abscisse de son sommet soit supérieure à l'abscisse du point I (abscisse de I < abscisse de J). Quelle est l'équation de la directrice de cette parabole et quelles sont les coordonnées de son foyer ?



Construisons quelques-uns uns de ces triangles $A_iB_iC_i$ et déterminons, dans chaque cas, leur centre de gravité G_i :
Le lieu recherché du centre de gravité variable est manifestement une droite passant par le point E. Prouvons-le.



1ère méthode
Considérons 2 quelconques de ces triangles :

A. Ces 2 triangles étant semblables, posons que leur rapport de similitude est " k ".
Dès lors : $\dfrac{A_3C_3}{A_2C_2} = k$ et $\dfrac{B_3C_3}{B_2C_2} = k$.

B. Comme les bases A_3B_3 et A_2B_2 de ces 2 triangles reposent sur OX, elles sont nécessairement parallèles et, par suite, vu l'égalité obligée des angles de 2 triangles semblables, les angles que font A_3B_3 et A_2B_2 avec OX sont égaux et A_3B_3 est parallèle à A_2B_2 ; de même, B_3C_3 est parallèle à B_2C_2.

C. Vu ces parallélismes, les 2 triangles EA_3C_3 et EA_2C_2 sont semblables et les 2 triangles EB_3C_3 et EB_2C_2 sont semblables.
Par suite : $\dfrac{EA_3}{EA_2} = \dfrac{EC_3}{EC_2} = \dfrac{A_3C_3}{A_2C_2} = k$ et $\dfrac{EB_3}{EB_2} = \dfrac{B_3C_3}{B_2C_2} = k$
[Comme $\dfrac{EA_3}{EA_2} = k$, $\dfrac{EB_3}{EB_2} = k$ et $\dfrac{EC_3}{EC_2} = k$, les points A_2 et A_3 d'une part, B_2 et B_3 d'autre part, C_2 et C_3 enfin, sont homothétiques et se correspondent ainsi dans une homothétie de centre E et de rapport k.]

D. Considérons alors les milieux M_3 et M_2 de A_3B_3 et A_2B_2.
$EM_3 = EA_3 - 0.5\ A_3B_3$ et $EM_2 = EA_2 - 0.5\ A_2B_2$
Or $EA_3 = k\ EA_2$ et $A_3B_3 = k\ A_2B_2$
Donc $EM_3 = k\left(EA_2 - 0.5\ A_2B_2\right) = k\ EM_2$
[Ainsi : M_3 et M_2 sont homothétiques dans l'homothétie précitée.]

E. Alors, comme $EM_3 = k\ EM_2$ et $EC_3 = k\ EC_2 \;\rightarrow\; C_3M_3$ est // à C_2M_2
(Réciproque du Théorème de THALES appliqué au triangle : " Si une droite détermine sur 2 côtés d'un triangle des segments proportionnels, cette droite est parallèle au 3ème côté ") ; les triangles EC_3M_3 et EC_2M_2 sont donc semblables et, par suite : $C_3M_3 = k\ C_2M_2$.

F. Les centres de gravité G_3 et G_2 sont situés aux 2/3 (comptés à partir de C_3 et de C_2) des médianes parallèles C_3M_3 et C_2M_2 .
Par conséquent : $G_3M_3 = \dfrac{C_3M_3}{3}$ et $G_2M_2 = \dfrac{C_2M_2}{3}$
Or $C_3M_3 = k\ C_2M_2 \;\rightarrow\; G_3M_3 = K\ G_2M_2$
Et comme $C_3M_3\ //\ C_2M_2 \;\rightarrow G_3M_3\ //\ G_2M_2$

G. Comme
$$\begin{cases} EM_3 \text{ et } EM_2 \text{ sont alignés sur } OX \text{ et donc parallèles} \\ EM_3 = k\ EM_2 \\ G_3M_3\ //\ G_2M_2 \\ G_3M_3\ =\ k\ G_2M_2 \end{cases}$$
Alors : les triangles EM_3G_3 et EM_2G_2 sont semblables et, comme leurs côtés EM_3 et EM_2 sont alignés et donc parallèles, les côtés EG_3 et EG_2 sont parallèles, mais, comme ils passent tous deux par le point E, ils sont alignés.
Ainsi, E, G_2 et G_3 sont alignés sur une droite.

H. Comme le raisonnement qui vient d'être tenu conduirait au même résultat en considérant tout autre triangle $A_iB_iC_i$ en remplacement de $A_2B_2C_2$, il est à conclure que <u>l'ensemble des centres de gravité G_i sont alignés sur une droite passant par le point E, droite qui est le lieu recherché de ces centres de gravité.</u>

<u>2ème méthode</u>

Les triangles $A_iB_iC_i$ se correspondent dans une homothétie de centre E.
Les points C_i et M_i, milieux de A_iB_i sont, respectivement, des ensembles de points homothétiques dans cette homothétie de centre E.
Or, dans une homothétie, les droites joignant des paires de points homothétiques sont parallèles.
Sur chacune de ces médianes parallèles, les points G_i divisent ces médianes dans la même proportion " 1/3, 2/3 ".
Ces Centres de Gravité forment donc un ensemble de points homothétiques dans l'homothétie de centre E : ils sont donc alignés sur une droite passant par E.
Cette droite passant par E est donc le lieu recherché des centres de gravité.

3ème méthode

Il existe un théorème relatif à l'homothétie de polygones (réguliers ou irréguliers) :

" Si un ensemble de polygones, réguliers ou irréguliers, sont homothétiques dans une homothétie donnée, leurs isobarycentres (c.à.d. leurs centres de gravité) sont des points homothétiques dans cette homothétie ".

En présentant ce théorème, la démonstration de l'alignement des centres de gravité est immédiate, considérant qu'un triangle est une forme particulière de polygone.

2) A. Considérons l'un quelconque des triangles $A_iB_iC_i$. Posons l'abscisse de son sommet Ci comme paramètre λ. C_i appartient à la droite a, passant par $E(-80,0)$ et $F(0,50)$ et d'équation :
$Y = aX + b \to 50 = 0 + b \to 0 = -80a + 50 \to Y = 0.625X + 50$
Les coordonnées variables de C_i sont donc : $X_{Ci} = \lambda$ et $Y_{Ci} = 0.625\lambda + 50$

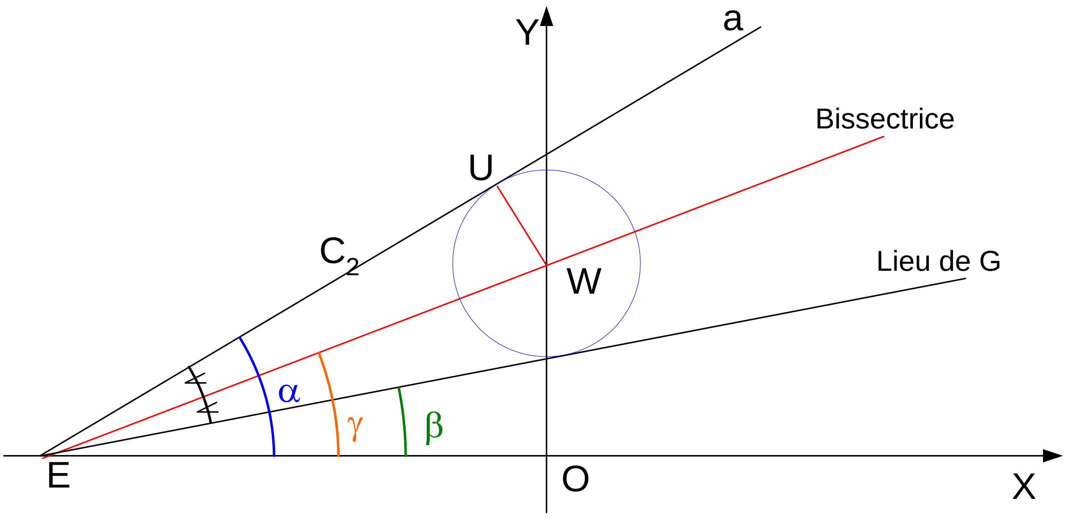
B. Le sommet A_i est l'intersection de l'axe OX avec la droite parallèle à AC, passant par C_i.
$A(25,0), C(0,30) \to$ Equation de AC : $Y = -1.2X + 30$
$\to$ Equation de la // à AC, passant par C_i: $Y = -1.2X + 1.825\lambda + 50$
A_i, intersection de l'axe OX (Equation $Y = 0$) avec cette droite // à AC, passant par C_i, a donc comme coordonnées : $\begin{cases} X_{Ai} = 1.521\lambda + 41.666? + 41.666 \\ Y_{Ai} = 0 \end{cases}$

C. Le sommet B_i est l'intersection de l'axe OX avec la droite parallèle à BC, passant par C_i.
$B(-20,0), C(0,30) \to$ Equation de BC : $Y = 1.5X + 30$
$\to$ Equation de la // à BC, passant par C_i: $Y = 1.5X - 0.875\lambda + 50$
B_i, intersection de l'axe OX (Equation $Y = 0$) avec cette droite // à BC, passant par C_i, a donc comme coordonnées : $\begin{cases} X_{Bi} = 0.583\lambda - 33.333 \\ Y_{Bi} = 0 \end{cases}$

D. Les coordonnées de M_i, milieu de A_iB_i sont donc :
$$X_{Mi} = \frac{X_{Ai} + X_{Bi}}{2} = \frac{(1.521 + 0.583)\lambda + (41.666 - 33.333)}{2} \to \begin{cases} X_{Mi} = 1.052\lambda + 4.167 \\ Y_{Mi} = 0 \end{cases}$$

E. Les coordonnées du point G_i sont déduites du fait que ce point est situé aux 2/3 (comptés à partir de C_i) de C_iM_i :
$$X_{Gi} = X_{Mi} + \frac{X_{Ci} - X_{Mi}}{3} = \frac{2X_{Mi}}{3} + \frac{X_{Ci}}{3} = 1.034\lambda + 2.778 \qquad (1)$$
$$Y_{Gi} = \frac{Y_{Ci}}{3} = 0.208\lambda + 16.667 \qquad (2)$$

F. L'équation du lieu de G_i s'obtient en éliminant le paramètre λ entre (1) et (2):
$\boxed{Y = 0.201X + 16.108}$



3) A. Le centre de la circonférence recherchée se trouve à l'intersection de la bissectrice des 2 droites tangentes : la bissectrice d'un angle est en effet le lieu des points équidistants des 2 droites formant cet angle .

Or : Equation de la droite a : $Y = 0.625X + 50$

Equation de la droite, lieu des centres de gravité : $Y = 0.201X + 16.108$

L'angle α formé par la droite " a " avec OX vaut ainsi : $\alpha = \arctan 0.625 = 32.005°$

L'angle β formé par la Sde droite avec l'axe OX vaut ainsi : $\beta = \arctan 0.201 = 11.365°$

L'angle γ formé par la bissectrice avec l'axe OX en est déduit : $\gamma = \dfrac{\alpha+\beta}{2} = 21.685°$

B. Cette bissectrice passe par le point $E(-80,0)$ et son équation s'établit donc selon :

$Y = \tan 21.685 \times (X + 80) = 0.398X + 31.812$

C. Cette droite coupe l'axe Y (d'équation $X = 0$) au centre W de la circonférence recherchée, point de coordonnées : $\begin{cases} X_W = 0 \\ Y_W = 31.812 \end{cases}$

D. Pour calculer le rayon de cette circonférence, menons par W une perpendiculaire à la droite a ; son équation est : $Y = -\dfrac{1}{0.625}X + 31.812$

[son coefficient angulaire est l'inverse de l'opposé de celui de a, vu la perpendicularité]
Les coordonnées du pied de cette perpendiculaire sur a résultent de la résolution du système formé par l'équation de a et par l'équation de la perpendiculaire à " a ".
Soit U ce point :

$$\begin{cases} Y = 0.625\,X + 50 \\ Y = -\dfrac{1}{0.625}X + 31.812 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X_U = -8.174 \\ Y_U = +44.891 \end{cases}$$

Le rayon R de cette circonférence $= UW = \sqrt{8.174^2 + 13.079^2} = 15.423$

E. L'équation de cette circonférence s'établit donc selon :

$$\boxed{X^2 + (Y - 31.812)^2 = 15.423^2}$$

4) A. L'équation générale d'une parabole dont l'axe est parallèle à OY et dont le sommet est situé sur OX s'écrit : $(X-s)^2 = 4pY$ où $p =$ distance sommet $-$ directrice et aussi distance sommet $-$ foyer et $s =$ abscisse du sommet

B. Cette parabole doit passer par les points I et J appartenant à la circonférence déterminée au 3° et équidistants des 2 droites a et m.
Or, le lieu des points équidistants de ces 2 droites a et m a déjà été défini en question 3°, il s'agit de la bissectrice de l'angle formé par les 2 droites a et m et dont l'équation a été établie selon : $Y = 0.398X + 31.812$ $\qquad (3)$
Par ailleurs, l'équation de la circonférence a été définie selon :

$$X^2 + (Y - 31.812)^2 + 15.423^2 \qquad (4)$$

$$(3) \text{ dans } (4) \rightarrow X^2 + (0.398)X^2 = 15.423^2 \rightarrow X = \pm 14.330 \qquad (5)$$

$$(5) \text{ dans } (3) \rightarrow Y = 26.109 \text{ et } Y = 37.515 \qquad (6)$$

Les coordonnées des points I et J sont donc : $\begin{cases} X_i(-14.330, 26.109) \\ X_J(14.330, 37.515) \end{cases}$

C. Exprimons que la parabole recherchée passe par I et J :

$$(-14.330 - s)^2 = 4 \times p \times 26.109 \rightarrow s^2 + 28.660\, s + 205.349 = 104.436\, p \qquad (7)$$

$$(+14.330 - s)^2 = 4 \times p \times 37.515 \rightarrow s^2 - 28.660\, s + 205.349 = 150.060\, p. \qquad (8)$$

$$(8) - (7) \rightarrow \; -57.320\, s = 45.624\, p \;\rightarrow\; p = -1.256\, s \qquad (9)$$

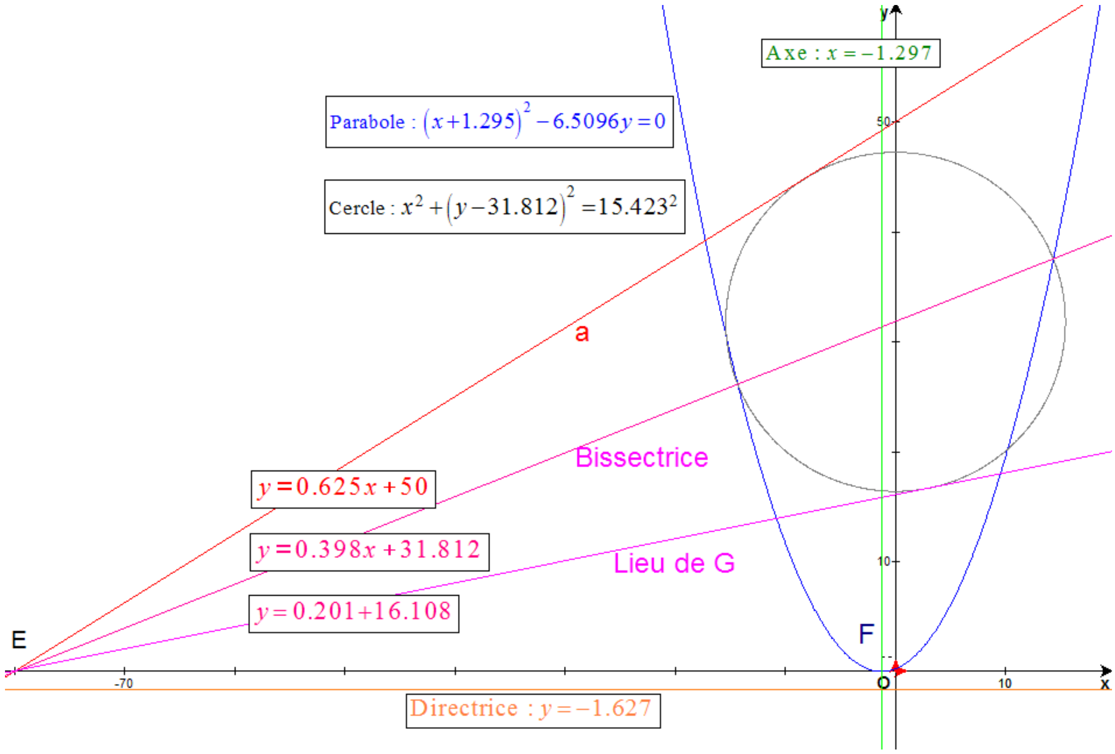
$$(9) \text{ dans } (7) \rightarrow s^2 + 159.832\, s + 205.349 = 0 \qquad (10)$$

Résolvons l'équation (10), du second degré en l'inconnue s : $\rightarrow \begin{cases} s = -158.537 \\ s = -1.295 \end{cases}$ $\qquad (11)$

$$(11) \text{ dans } (9) \rightarrow \begin{cases} p = +199.122 \\ p = +1.627 \end{cases} \qquad (12)$$

D. Il existe donc 2 paraboles qui répondent à la condition de passage par les 2 points I et J. L'énoncé prescrit cependant une condition complémentaire : le sommet de la parabole à prendre en compte est tel que son abscisse soit supérieure à celle du point I. Dès lors, l'équation de la parabole, les coordonnées de son foyer $F*$ et l'équation de sa directrice répondant à la question posée s'expriment selon :

$$\boxed{(X + 1.295)^2 = 4 \times 1.627Y \rightarrow \begin{cases} X_{F*} = -1.295 \\ Y_{F*} = +1.627 \end{cases} \quad \text{Directrice : } Y = -1.627}$$



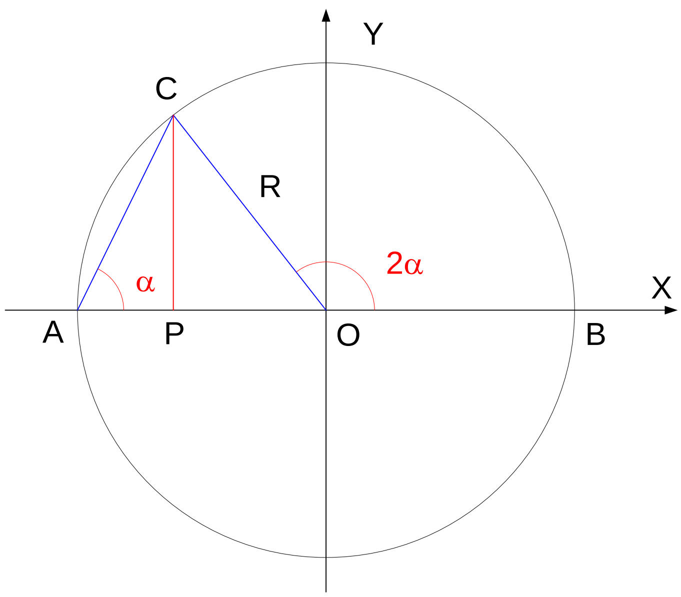
La parabole recherchée et ses caractéristiques

Le 10 mars 2007

EXGAP105 – Mons – Juillet 2006 – Série E

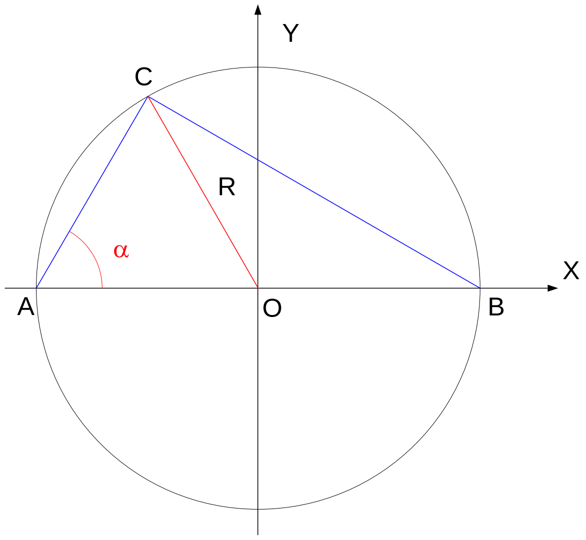
Dans un système d’axes orthonormé *OXY*, considérons une circonférence de centre *O* et de rayon *R* et appelons *C* le point variable qui parcourt cette circonférence. Appelons aussi « *A* » le point d’intersection fixe (d’abscisse négative) de l’axe *OX* et de cette circonférence et « *B* » le point d’intersection fixe (d’abscisse positive) de cet axe *OX* avec cette même circonférence.

1. Par les méthodes de la Géométrie Synthétique (et par les relations trigonométriques du triangle rectangle), déterminer ce que valent la somme et la valeur absolue de la différence des segments *AC* et *OC* en fonction de l’angle α ($\alpha = OAC$) et du rayon *R*.
2. Traçons la tangente à la circonférence en *C* et appelons «*D* » et « *E* » les intersections de cette tangente avec, respectivement, les axes *OX* et *OY*. *P* est le pied de la perpendiculaire abaissée de *C* sur *OX*.
3. Pour quelle valeur α_i de l’angle α les côtés du triangle *OCE* sont-ils proportionnels aux côtés du triangle *ACP* (*AP* proportionnel à *CE*, *CP* proportionnel à *CO*, *AC* proportionnel à *OE*) et que vaut ce rapport de proportionnalité, exprimé en fonction de cet angle α_i ?
4. Hors de toute considération trigonométrique, démontrer par la seule Géométrie Synthétique que l’un des 2 angles formés par la tangente à la circonférence en *C* et par la corde *AC* vaut toujours la moitié de l’angle *COA*.
5. Pour une valeur α_k moitié de la valeur particulière α_i de l’angle α déterminée en question 2° et pour $R = 40$, que valent la somme *S* et la valeur absolue *D* de la différence des segments *AC* et *OC* ?
6. Par les méthodes de la Géométrie Analytique, établir le lieu des points dont la somme des distances aux points *A* et *O* vaut *S* (*S* déterminé en question 4°) et le lieu des points dont la valeur absolue de la différence des distances aux points *A* et *O* vaut *D* (*D* déterminé en question 4°).



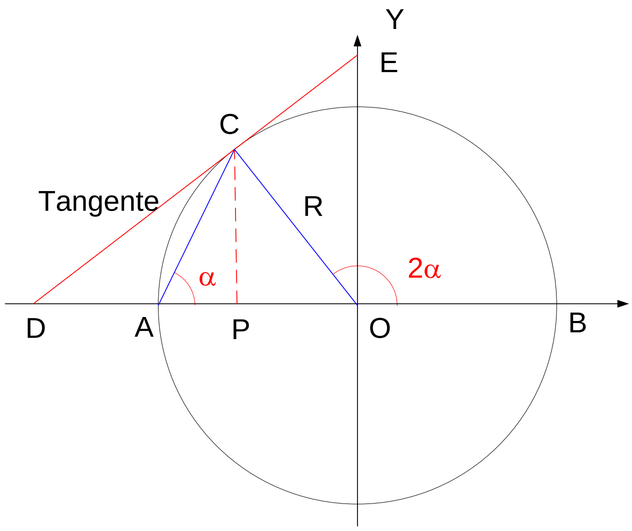
1) <u>1ère méthode</u>

L'angle α est un angle inscrit interceptant l'arc BC de la circonférence.
L'angle BOC est un angle au centre interceptant le même arc BC de la circonférence : sa valeur est donc le double de celle de l'angle inscrit interceptant le même arc et donc : $\overline{BOC} = 2\alpha$. Par suite, l'angle $\overline{AOC}$, supplément de l'angle $\overline{BOC}$, vaut : $\overline{AOC} = \pi - 2\alpha$
De C, abaissons la perpendiculaire CP à l'axe OX.
Dans le triangle rectangle $OPC : CP = R\sin \overline{AOC} = R\sin(\pi - 2\alpha) \rightarrow CP = R\sin 2\alpha$
Dans le triangle rectangle $APC : AC = \dfrac{CP}{\sin\alpha} \rightarrow AC = \dfrac{R\sin 2\alpha}{\sin\alpha}$
Or $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \rightarrow \underline{AC = 2R\cos\alpha}$
Donc : $\boxed{AC + OC = R(1 + 2\cos\alpha) \quad \text{ou} \quad |AC - OC| = R|1 - 2\cos\alpha|}$



<u>2ème méthode</u>

Dans le triangle rectangle ACB :$AC = AB\cos\alpha = 2R\cos\alpha$
Or, $OC = R$
Donc : $\boxed{AC + OC = R(1 + 2\cos\alpha) \quad \text{ou} \quad |AC - OC| = R|1 - 2\cos\alpha|}$



2) A. <u>Considérons d'abord le cas où C appartiendrait au 2ème quadrant</u>
(c.à.d. si $X_c < 0$ et $Yc > 0$)

Si les 2 triangles OCE et ACP présentent des côtés proportionnels, les 2 triangles sont semblables. Or, si 2 triangles sont semblables, leurs angles sont égaux.

Dans le triangle rectangle OCE : $\widehat{COE} = 2\alpha - \dfrac{\pi}{2}$

[2 α est l'angle au centre interceptant le même arc que α]

$\rightarrow \widehat{CEO} = \dfrac{\pi}{2} - \widehat{COE} = \dfrac{\pi}{2} - \left(2\alpha - \dfrac{\pi}{2}\right) = \pi - 2\alpha$

Dans le triangle rectangle ACP : $\widehat{CAP} = \alpha \rightarrow \widehat{ACP} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$

Donc, pour assurer la similitude : $\widehat{COE} = \widehat{ACP}$
(puisque les côtés AP et CE sont proportionnels)

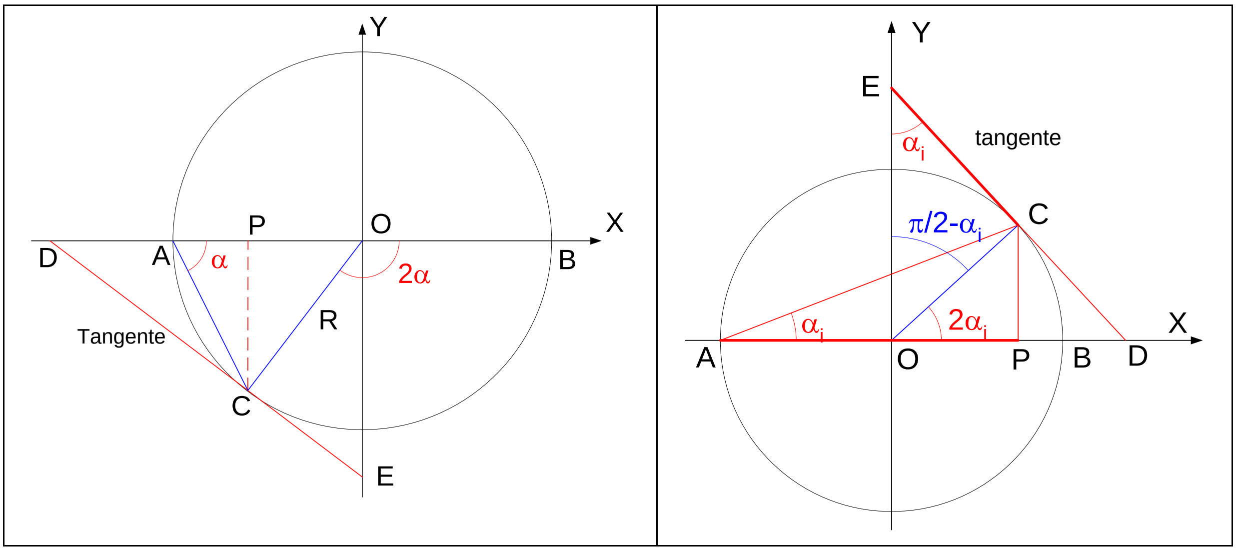
$\rightarrow 2\alpha_i - \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha_i \quad (1) \qquad \rightarrow \alpha_i = \dfrac{\pi}{3} \qquad \rightarrow \widehat{CEO} = \widehat{ACP}$

(puisque les côtés CP et CO sont proportionnels) $\rightarrow \pi - 2\alpha_i = \alpha_i \quad (2)$

Ces 2 conditions relatives à l'égalité des angles $\widehat{COE}$ et $\widehat{ACP}$ d'une part, $\widehat{CEO}$ et $\widehat{CAP}$ d'autre part, c.à.d. les 2 conditions assurant la similitude des triangles OCE et ACP

sont donc simultanément assurées pour : $\boxed{\alpha_i = \dfrac{\pi}{3}}$

B. Il est par ailleurs évident qu'une démonstration strictement semblable à la précédente, appliquée au cas où C appartiendrait au 3ème quadrant (c.à.d. si $X_c < 0$ et $Y_c < 0$)
conduirait à une même valeur absolue de $\alpha_i = \dfrac{\pi}{3}$



C. Dans le cas où le point C appartiendrait au 1er quadrant (c.à.d. si $X_c > 0$ et $Y_c > 0$), il est par contre impossible de déterminer un angle α_i qui satisferait à la condition de similitude des 2 triangles :

La similitude des triangles (cas imposé où EC est proportionnel à AP) impliquerait en effet que les 2 angles $\widehat{CEO} = \widehat{CAP}$ soient égaux et, dans ce cas, $\widehat{CAP}$ vaudrait α_i. Mais, comme l'angle au centre , interceptant l'arc CB vaut nécessairement le double de l'angle inscrit $\widehat{CAP}$ qui intercepte le même arc CB, alors, l'angle $\widehat{COE}$ vaudrait $\frac{\pi}{2} - \widehat{COB} = \frac{\pi}{2} - 2\alpha_i$.
Or, dans le triangle rectangle EOC, la somme des 2 angles aigus $\widehat{COE}$ et $\widehat{CEO}$ doit valoir $\frac{\pi}{2}$. Il faudrait donc que $\frac{\pi}{2} - 2\alpha_i + \alpha_i = \frac{\pi}{2}$ et donc que $\alpha_i = 0$.
En ce cas, le triangle ACP serait dégénéré en le segment AB et le triangle OCE serait tel que $C \equiv B$ et tel que le point E serait à l'infini sur OY du côté positif.

D. Dans le cas où le point C appartiendrait au 4ème quadrant (c.à.d. si $X_c > 0$ et $Y_c < 0$), il est évident, par analogie avec ce qui vient d'être exposé au point précédent, qu'il serait alors tout aussi impossible de déterminer un angle α_i qui satisferait à la condition de similitude des 2 triangles.

Pour calculer le rapport de proportionnalité qui existe entre les côtés de ces 2 triangles dans le cas où $\alpha_i = \frac{\pi}{3}$, considérons le rapport des hypoténuses OE et AC des 2 triangles rectangles OCE et ACP : $AC = 2R\cos\alpha_i$

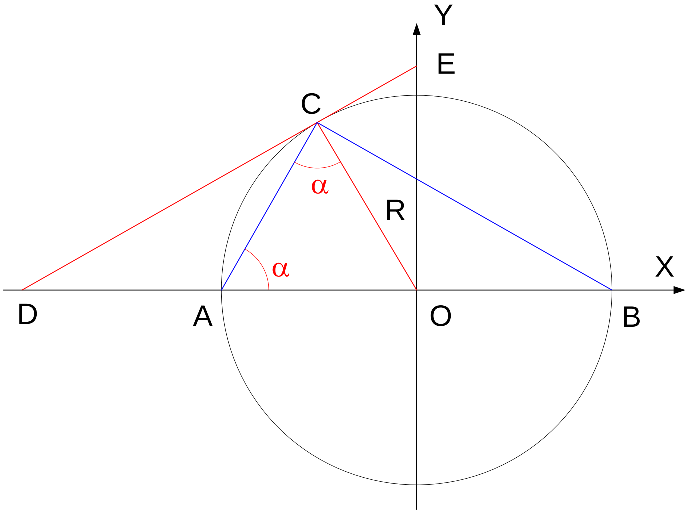
$$\rightarrow OE = \frac{R}{\cos\left[2\alpha_i - \frac{\pi}{2}\right]} = \frac{R}{\cos\left[\frac{\pi}{2} - \alpha_i\right]} = \frac{R}{\sin 2\alpha_i} = \frac{R}{2\sin\alpha_i \cos\alpha_i}$$

$$\rightarrow \boxed{\text{Rapport de proportionnalité} = \frac{AC}{OE} = 4\sin\alpha_i \cos^2\alpha_i}$$

Variante pour le calcul du rapport de proportionnalité :

$$\text{Rapport de proportionnalité} = \frac{AC}{OE} = \frac{CP}{CO} = \frac{R\sin 2\alpha_i}{R} = \sin 2\alpha_i$$

Or, pour $\alpha_i = \frac{\pi}{3} = 60°$: $\cos\alpha_i = 0.5 \rightarrow 4\sin\alpha_i\cos^2\alpha_i = \sin\alpha_i$
Or encore : $\sin 2\alpha_i = 2\sin\alpha_i\cos\alpha_i = 2\sin\alpha_i\cos\alpha_i$
et donc, pour $\alpha_i = 60°$: $\sin 2\alpha_i = \sin\alpha_i$
Ainsi, pour $\alpha_i = 60°$: $4\sin\alpha_i\cos^2\alpha_i = \sin 2\alpha_i$



3) L'angle DCA est un angle tangentiel interceptant l'arc CA. Il est donc égal à tout angle inscrit interceptant le même arc. Or, tout angle inscrit interceptant un arc donné est égal à la moitié de l'angle au centre interceptant le même arc.

Donc, l'angle tangentiel $\widehat{DCA}$ qui intercepte l'arc CA est égal à la moitié de l'angle au centre $\widehat{COA}$ qui intercepte le même arc CA.

Variante de solution pour la question 3°

Le triangle ACO est isocèle $(AO = CO = R) \rightarrow ACO = CAO = \alpha$

La somme des angles de tout triangle = π $\rightarrow COA = \pi - (ACO + CAO) = \pi - 2\alpha$

Or : $DCA = \pi - (ACO + OCA) = \pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow DCA = \frac{\pi}{2} - \alpha \rightarrow \boxed{DCA = \frac{1}{2} COA}$

4) $S = AC + OC = R(1 + 2\cos\alpha_k) = 40(1 + 2\cos 30°) = 109.282$

$D = |\ AC - OC\ | = R|\ 1 - 2\cos\alpha_k\ | = 40|\ 1 - 2\cos 30\ || = 29.282$

5) Le 1er lieu est, par définition, l'ellipse dont les foyers sont A et O : la demi-distance focale c vaut donc 20.

La longueur a de son demi-grand axe vaut $\dfrac{S}{2}=\dfrac{109.282}{2}$.

La longueur b de son demi-petit axe s'établit selon :

$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{54.641^2-20^2}=50.849$

Le centre U de cette ellipse est au milieu du segment joignant les foyers et par suite : $U(-20,0)$.

Son équation s'établit selon :

$$\frac{(X-X_U)^2}{a^2}+\frac{(Y-Y_U)^2}{b^2}=1\rightarrow\boxed{\frac{(X+20)^2}{54.641^2}+\frac{Y^2}{50.849^2}=1}$$

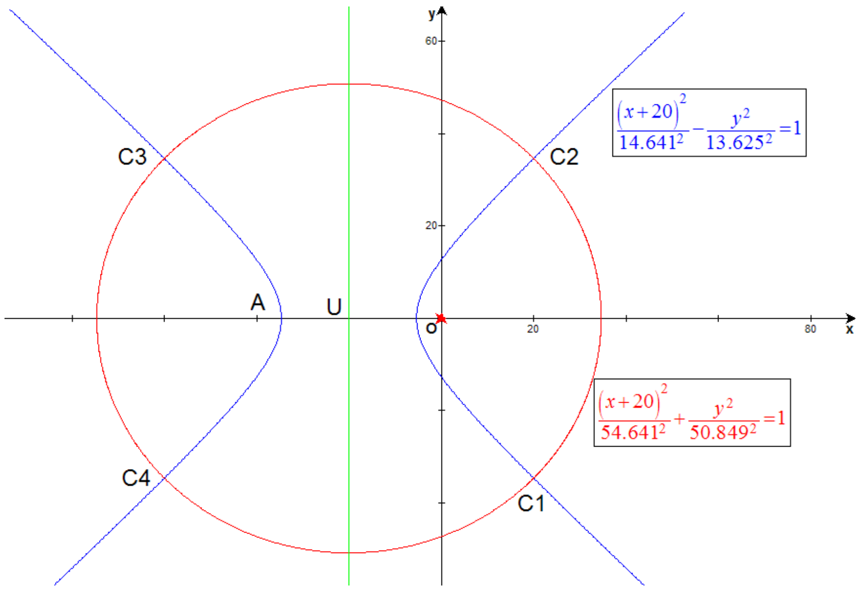
Le 2ème lieu est, par définition, l'hyperbole dont les foyers sont A et O : la demi-distance focale c vaut donc 20 et son axe est confondu avec OX. Son centre est encore le milieu du segment joignant les foyers, c.à.d. le même point $U(-20,0)$ que dans le cas de l'ellipse.

L'équation canonique d'une hyperbole de centre U dont l'axe est confondu avec OX s'établit selon : $\dfrac{(X-X_U)^2}{a^2}-\dfrac{(Y-0)^2}{b^2}=1$

où a = demi-valeur absolue de la différence des distances entre foyers et point courant sur l'hyperbole, soit ici la valeur $\dfrac{D}{2}=\dfrac{28.282}{2}=14.641$

et où b se calcule selon : $b=\sqrt{c^2-a^2}=\left(20^2-14.641^2\right)^{0.5}=13.625$

L'équation de l'hyperbole s'établit donc selon : $\boxed{\dfrac{(X+20)^2}{14.641^2}-\dfrac{Y^2}{13.625^2}=1}$



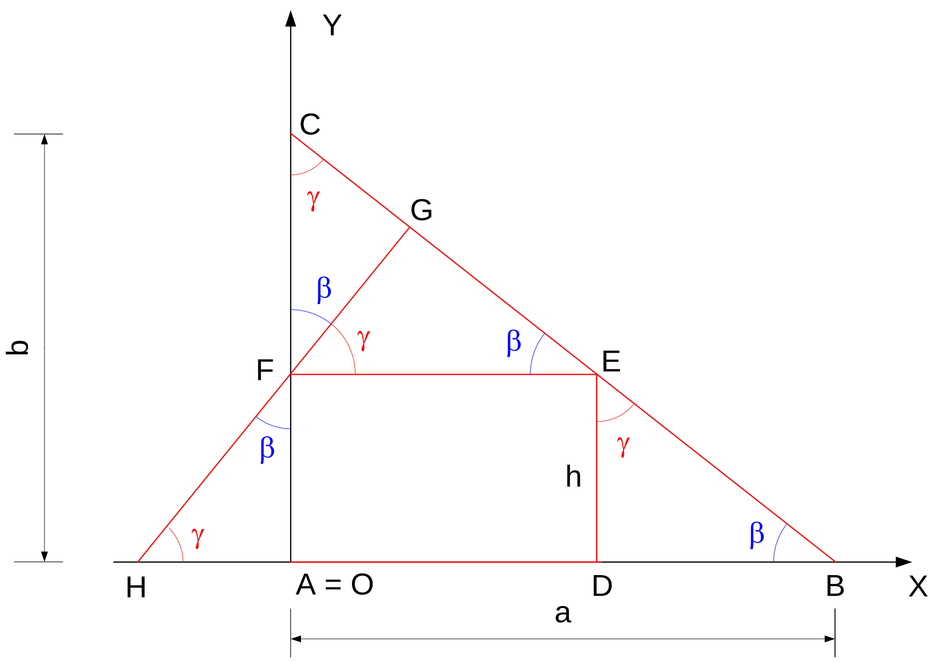
Subsidiairement, on remarquera qu'il existe 4 points C_1, C_2, C_3 et C_4 qui répondent simultanément aux 2 conditions relatives à la somme et à la différence des distances.

Le 10 mars 2007

EXGAP106 – Mons – Juillet 2006 – Série F

Dans le système orthonormé OXY, considérons un triangle ABC, rectangle en A et tel que A est confondu avec l'origine O, B a comme coordonnées $(a, 0)$ et C a comme coordonnées $(0, b)$ [N.B. $a > 0$, $b > 0$].
Par un point quelconque D situé sur OX, entre A et B, menons une parallèle à OY qui coupe BC en E. La longueur du segment DE est dénommée « h ».
Par le point E, menons une parallèle à OX qui coupe AC en F.
Par ce point F, menons une perpendiculaire à BC qui coupe BC en G et le prolongement (vers la gauche) de AB en H.

1. Par les méthodes de la Géométrie Synthétique, déterminer quelle relation $h = f\ (a,\ b)$ il faut imposer pour que l'aire du triangle AFH soit égale à celle du triangle EFG. Appliquer ensuite cette relation pour déterminer la valeur numérique de h répondant à la condition posée quand a = 10 et b = 8. Calculer alors la valeur commune des aires de ces 2 triangles.
2. Une circonférence (C_1) passe par les points A, F et G et une autre circonférence (C_2) passe par les points H, A et G. Par les méthodes de la Géométrie Synthétique, démontrer que le rapport k de l'aire de la circonférence (C_1) à celle de (C_2) ne dépend pas de h mais du rapport (a / b).
3. Par les méthodes de la Géométrie Analytique, dans le cas où a = 10, b = 8 et h = 3. 5, déterminer l'équation de l'hyperbole dont le centre est le point E, dont les axes sont parallèles à OX et à OY, dont l'un des sommets est confondu avec le point F et dont les asymptotes font entre elles le même angle que les 2 tangentes en G aux 2 circonférences (C_1) et (C_2) . [N.B. « F » ne désigne pas ici l'un des foyers de l'hyperbole].



1) 1ère méthode

Dans le triangle ABC, dénommons "β" l'angle ABC et "γ" l'angle ACB.
Les 3 triangles BDE, CFG, AFH (et FGE d'ailleurs aussi) sont tous semblables au triangle ABC. En effet, l'angle au sommet B du triangle rectangle BDE est égal à β, l'angle au sommet C du triangle rectangle CFG est égal à γ.
Dans ce dernier triangle CFG, l'angle au sommet F doit donc nécessairement être égal à β. L'angle au sommet F du triangle AFH est opposé par le sommet à l'angle au même sommet F du triangle CFG : il vaut donc β.
[La similitude des 4 triangles rectangles précités peut aussi être déduite du fait que leurs côtés adjacents à leurs angles aigus sont perpendiculaires entre eux]

Puisque ces 3 triangles sont semblables, leurs côtés sont proportionnels.
Dès lors :

– Triangle BDE $\quad \dfrac{DB}{h} = \dfrac{a}{b} \to DB = h\dfrac{a}{b} \to \text{Aire de } BDE = h^2 \dfrac{a}{2b}$

$$AD = a - DB = \frac{a(b-h)}{b}$$

– Triangle CFG $\quad \dfrac{CG}{AC} = \dfrac{CF}{BC} \to CG = \dfrac{b(b-h)}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\frac{FG}{AB} = \frac{CF}{BC} \to FG = \frac{a(b-h)}{\sqrt{a^2+b^2}} \to \text{Aire de } CFG = \frac{ab(b-h)^2}{2(a^2+b^2)}$$

– Triangle AFH $\quad \dfrac{AH}{AF} = \dfrac{AC}{AB} \to AH = \dfrac{hb}{a} \to \text{Aire de } AFH = \dfrac{bh^2}{2a}$

– Rectangle $AFED$ $\quad AD = \dfrac{a(b-h)}{b}$ et $DE = h \to \text{Aire de } AFED = \dfrac{ah(b-h)}{b}$

Il en résulte :
Aire du triangle EFG = Aire ABC − (Aire BDE + Aire CFG + Aire $AFED$)

$$\to \text{Aire } FEG = \frac{ab}{2} - \left(\frac{h^2 a}{2b} + \frac{ab(b-h)^2}{2(a^2+b^2)} + \frac{ah(b-h)}{b}\right)$$

$$\to \text{Aire } FEG = \frac{ab}{2}\left(1 + \frac{h^2}{b^2} - \frac{(b-h)^2}{a^2+b^2} - \frac{2h}{b}\right)$$

La condition "Aire de AFH = Aire de FEG" revient donc à une équation du second degré en l'inconnue h :

$$\to \frac{bh^2}{2a} = \frac{ab}{2}\left(1 + \frac{h^2}{b^2} - \frac{(b-h)^2}{a^2+b^2} - \frac{2h}{b}\right) \quad \to \frac{h^2}{a^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2} - \frac{(b-h)^2}{a^2+b^2} - \frac{2h}{b}$$

$$\to \frac{h^2}{a^2} = 1 + \frac{h^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2+b^2} + \frac{2bh}{a^2+b^2} - \frac{h^2}{a^2+b^2}$$

$$\to h^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2+b^2}\right) - 2h\left(\frac{b}{a^2+b^2} - \frac{b}{b^2}\right) + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 0$$

$$\to h^2\left((a^2+b^2) - a^2(a^2+b^2) + a^2b^2\right) + 2h\left(a^2b(a^2+b^2) - a^2b^3\right) + a^2b^4 - a^2b^2(a^2+b^2) = 0$$

$$\to \boxed{(b^4 + a^2b^2 - a^4)h^2 + 2a^4bh - a^4b^2 = 0}$$

Pour $a = 10$ et $b = 8$, la résolution de cette équation donne lieu à la valeur $\boxed{h = 3.952}$

2ème méthode

Les triangles AHF et FGE sont semblables (cf. 1ère méthode) .
Or, si 2 triangles semblables sont isométriques, leurs côtés sont eux-mêmes isométriques.
Donc, comme il est imposé que les triangles rectangles AHF et FGE soient isométriques, leurs hypoténuses FE et FH sont isométriques : $\rightarrow FE = FH$ (1)

Les triangles rectangles ACB et DEB sont aussi semblables (cf. 1ère méthode).

Il en résulte que : $DB = h\dfrac{a}{b}$ (2)

De (2) : $FE = AD = AB - DB = a - h\dfrac{a}{b}$ (3)

Les triangles rectangles AHF et ACB sont aussi semblables (cf. 1ère méthode).

Il en résulte que $HA = h\dfrac{b}{a}$ (4)

Appliquons alors la relation métrique de Pythagore dans le triangle rectangle AFH :

$FH^2 = HA^2 + AF^2$ (5)

De (4) et du fait que $AF = DE = h$, il vient : $FH^2 = h^2\left(\dfrac{b^2}{a^2} + 1\right)$ (6)

Elevons alors les 2 membres de (1) au carré : $FE^2 = FH^2$ (7)

De (4),(6) et (7), il résulte que : $a^2 + h^2\dfrac{a^2}{b^2} - 2a^2\dfrac{h}{b} = h^2\left(\dfrac{b^2}{a^2} + 1\right)$

$\rightarrow h^2\left(1 + \dfrac{b^2}{a^2} - \dfrac{a^2}{b^2}\right) + 2a^2\dfrac{h}{b} - a^2 = 0 \rightarrow \boxed{\left(b^4 + a^2b^2 - a^4\right)h^2 + 2a^4bh - a^4b^2 = 0}$ (8)

Pour $a = 10$ et $b = 8$, la résolution de cette équation (8) donne lieu à la valeur $\boxed{h = 3.952}$

3ème méthode

Les triangles AHF et FGE sont semblables (cf. 1ère méthode) .
Or, si 2 triangles semblables sont isométriques, leurs côtés opposés aux mêmes angles sont eux-mêmes isométriques. Donc : $GE = AF$ (9)

Dans le triangle rectangle FGE : $GE = \dfrac{FG}{\tan\beta}$ (10)

Dans le triangle rectangle ABC : $\tan\beta = \dfrac{b}{a}$ (11)

De (10) et (11) : $GE = FG\,\dfrac{a}{b}$ (12)

Dans le triangle rectangle FGC : $FG = FC\cos\beta = (b-h)\cos\beta$ (13)

De (12) et (13): $GE = \dfrac{a}{b}(b-h)\cos\beta$ (14)

De (9) et (14), et vu que $AF = h$: $\dfrac{a}{b}(b-h)\cos\beta = h$ (15)

Dans le triangle rectangle ABC : $\cos\beta = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}\times\dfrac{a}{a^2+b^2}$ (16)

De (15) et (16) : $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{a^2}{b^2}\times\dfrac{b-h}{a^2+b^2} = h$ (17)

$(17)\rightarrow$ $\boxed{h = \dfrac{a^2b}{a^2+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{b}{a^2+b^2}}}$ (18)

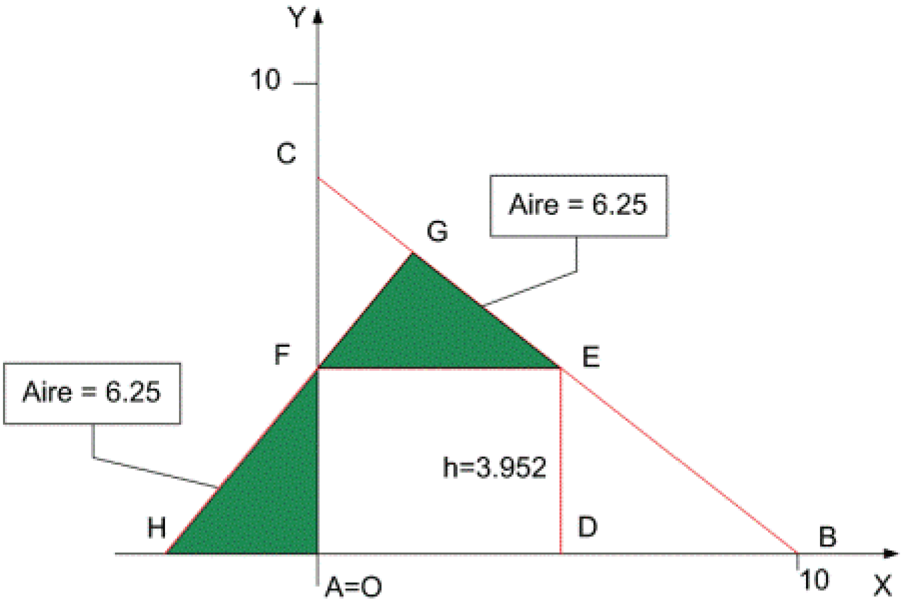
Pour $a = 10$ et $b = 8$, cette expression (17) donne lieu à la valeur $\boxed{h = 3.952}$

Calcul de l'aire commune aux triangles AFH et FGE

Opérons ce calcul dans le triangle AFH, en tenant compte des valeurs $a = 10, b = 8$ et $h = 3.952$:

$(4)\rightarrow HA = h\dfrac{b}{a} = 3.952\times\dfrac{8}{10} = 3.1616$

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Aire du triangle } AFH = HA\times\dfrac{h}{2} = 3.1616\times\dfrac{3.952}{2} = 6.273222 \cong 6.25}$

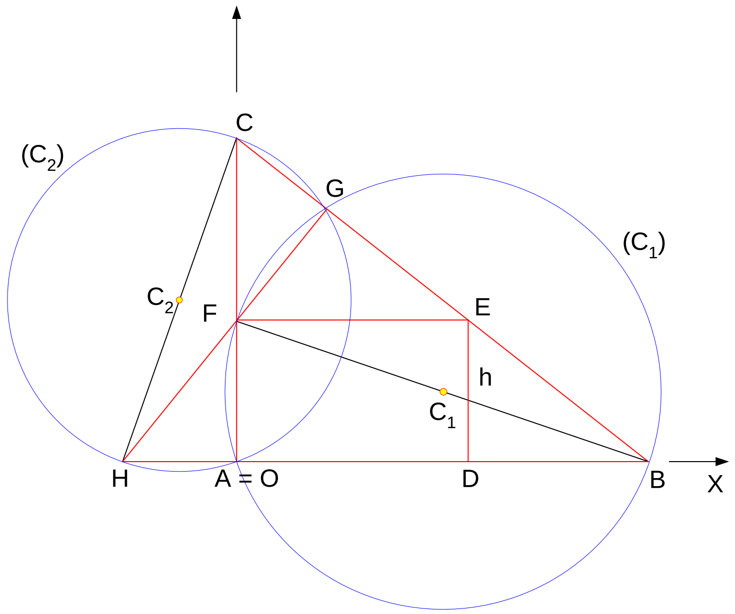


2) <u>1ère méthode :</u>

Une et une seule circonférence passe par 3 points.
Or, le quadrilatère convexe $AFGB$ est inscriptible : ses 2 angles opposés en A et G valent en effet $\pi / 2$ et leur somme vaut donc π, condition nécessaire et suffisante pour qu'un quadrilatère soit inscriptible.
La circonférence (C_1) passant par les 3 points A, F et G est donc la circonférence circonscrite à ce quadrilatère $AFGB$.
La diagonale BF de ce quadrilatère y est une corde interceptée par les 2 angles droits en A et G : BF est donc le diamètre de cette circonférence (C_1).
Or encore, le quadrilatère concave $AHFGC$ est inscriptible : ses 2 angles en A et G valent en effet $\pi / 2$.
La circonférence (C_2) passant par les 3 points H, A et G est donc la circonférence circonscrite à ce quadrilatère $AHFGC$.
La corde CH de ce quadrilatère y est interceptée par les 2 angles droits en A et G :
HC est donc le diamètre de cette circonférence (C_2).
Le rayon R_1 de (C_1), moitié du diamètre BF se calcule comme hypoténuse du triangle rectangle AFB : $R_1 = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AF^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + h^2}$
Le rayon R_2 de (C_2), moitié du diamètre HC se calcule comme hypoténuse du triangle rectangle AHC, en tenant compte qu'il vient d'être démontré en question 1° que

$AH = h\frac{b}{a}$: $R_2 = \frac{1}{2}\sqrt{AH^2 + AC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{hb}{a}\right)^2 + b^2}$

La proposition " Aire de la circonférence (C_1) = $k \times$ Aire de (C_2) " s'exprime donc selon : $\pi \times 0.25 \times \left(a^2 + h^2\right) = k \times \pi \times 0.25 \times \left(\frac{b}{a}\right)^2 \times \left(h^2 + a^2\right) \rightarrow \boxed{k = \left(\frac{a}{b}\right)^2}$



2ème méthode :

L'angle inscrit δ ayant comme sommet le point C de la circonférence (C_1) et interceptant l'arc HO de cette circonférence est égal à l'autre angle inscrit δ ayant comme sommet le point G de la circonférence (C_1) et interceptant le même arc HO de cette circonférence.
Mais cet angle inscrit δ ayant comme sommet le point G de la circonférence (C_1) est aussi le même angle inscrit δ ayant comme sommet le point G de la circonférence (C_2) et interceptant l'arc FO de cette circonférence (C_2).
Cet angle inscrit d ayant comme sommet le point G de la circonférence (C_2) et interceptant l'arc FO de cette circonférence (C_2) est égal à l'autre angle inscrit δ ayant comme sommet le point B de la circonférence (C_2) et interceptant le même arc FO de cette circonférence (C_2).
Les 2 triangles rectangles OCH et OBF présentent donc le même angle aigu d en C et en B : ces 2 triangles sont donc semblables.
Cette similitude implique la proportionnalité des côtes de ces triangles.

Exprimons-la : $$\frac{OF}{OH} = \frac{OB}{OC} = \frac{FB}{HC}$$

Or : $$\frac{FB}{HC} = \frac{2R_1}{2R_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Or encore : $$\frac{OB}{OC} = \frac{a}{b}$$

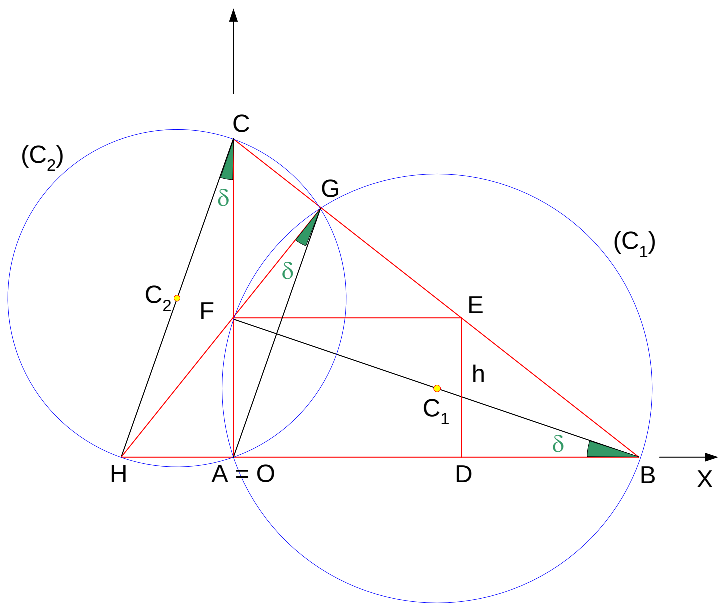
Et ainsi : $$\frac{R_1}{R_2} = \frac{a}{b}$$

La proposition "Aire de la circonférence (C_1) = $k \times$ Aire de (C_2)" s'exprime donc selon :

$$\pi \times R_1^2 = k \times \pi \times R_2^2$$

ou $$k = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

$\rightarrow$ $$\boxed{k = \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$



<u>3ème méthode</u> :

La proposition "Aire de la circonférence $(C_1) = k \times$ Aire de (C_2)" s'exprime selon :

$$\pi \times R_1^2 = k \times \pi \times R_2^2$$

ou $$k = \frac{R_1^2}{R_2^2}$$

ou $$k = \frac{FB^2}{HC^2}$$

Or, en appliquant la relation de Pythagore dans les triangles rectangles OBF et OHC :

$$FB^2 = OB^2 + OF^2 = a^2 + OF^2$$
$$HC^2 = OC^2 + OH^2 = b^2 + OH^2$$

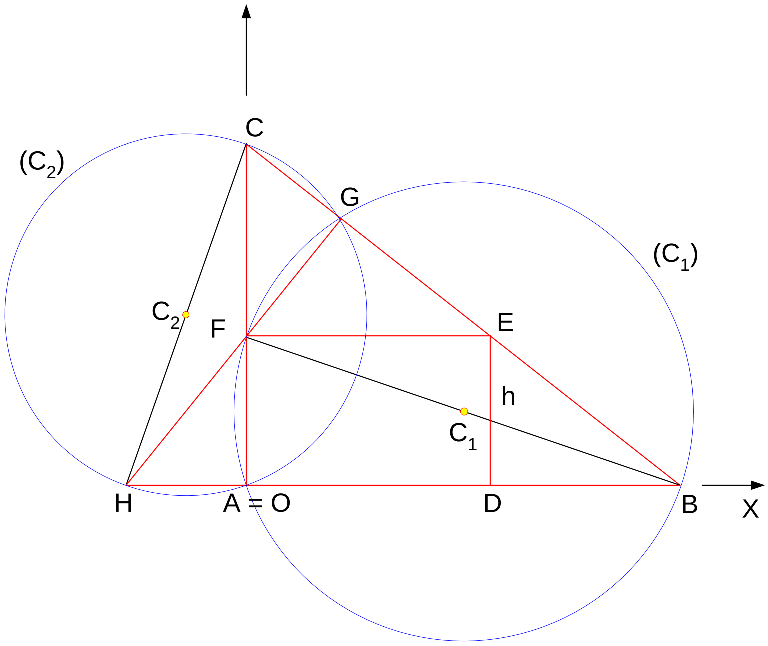
Or, il a été démontré dans la question 1° que les triangles OHF (ou, identiquement AHF puisque $A = O$) et ABC étaient semblables. Leurs côtés sont donc proportionnels et appelons alors ? ce coefficient de proportionnalité.

Par suite : $$OF = \lambda a$$
$$OH = \lambda b$$

Donc : $$FB^2 = a^2 + \lambda^2 a^2 = a^2\left(1+\lambda^2\right)$$
$$HC^2 = b^2 + \lambda^2 b^2 = b^2\left(1+\lambda^2\right)$$

Par suite : $$k = \frac{FB^2}{HC^2} = \frac{a^2\left(1+\lambda^2\right)}{b^2\left(1+\lambda^2\right)} = \frac{a^2}{b^2}$$

Et ainsi : $$\boxed{k = \left(\frac{a}{b}\right)^2}$$



3) A. Coordonnées du point G :

G est à l'intersection de CB et de HF.

Equation de CB $\left[C(0,8), B(10,0)\right] : \rightarrow Y = -0.8X + 8$ $\quad(1)$

Equation de HF $\left[H\left(-\dfrac{hb}{a},0\right) = H(-2.8,0), F(0,3.5)\right] \rightarrow Y = 1.25X + 3.5$ $\quad(2)$

En résolvant le système [$(1),(2)$] $\rightarrow G(+2.195, 6.244)$

B. Tangentes en G aux 2 circonférences :

1ère méthode : Le principe de cette 1ère méthode est de tenir compte du fait qu'une tangente à une circonférence est perpendiculaire au rayon passant par le point de contact.

Centre C_1 de la circonférence (C_1) = milieu de FB et $F\left(0,h\right)=F\left(0,3.5\right);B\left(10,0\right)$
$\rightarrow$ $C_1\left(5,1.75\right)$
Centre C_2 de la circonférence (C_2) = milieu de HC et $H\left(-\frac{hb}{a},0\right)=H\left(-2.8,0\right);C\left(0,8\right)$
$\rightarrow$ C_2 (- 1.4, 4)
Pente du rayon $R_1=C_1G$: Pente $=\dfrac{Y_G-Y_{C_1}}{X_G-X_{C_1}}\rightarrow$ Pente du rayon $R_1=-\dfrac{4.494}{2.805}$
Pente du rayon $R_2=C_2G$: Pente $=\dfrac{Y_G-Y_{C_2}}{X_G-X_{C_2}}\rightarrow$ Pente du rayon $R_1=\dfrac{2.244}{3.595}$
Les pentes des 2 tangentes T_1 et T_2, perpendiculaires aux rayons R_1 et R_2, sont telles qu'elles valent les inverses des opposés des pentes de ces rayons :
$\rightarrow$ Pente de la tangente $T_1=\dfrac{2.804}{4.4994}$
$\rightarrow$ Pente de la tangente $T_2=-\dfrac{3.595}{2.244}$
Les angles α_1 et α_2 que forment ces tangentes avec OX en sont déduits :
α_1 = arc tg (+ 2.805 / 4.494) $\rightarrow \alpha_1$ = + 31.970989°
α_2 = arc tg (− 3.595 / 2.244) $\rightarrow \alpha_2$ = − 58.027578°
Les 2 tangentes forment donc, entre elles, un angle α = 89.998567°, disons un angle de 90 ° (N.B. Cette valeur particulière ne résulte pas ici d'une propriété générale d'orthogonalité des 2 rayons R_1 et R_2, mais simplement d'un hasard de calcul lié au choix de la valeur de h conduisant à cette presque-orthogonalité parfaite).

<u>2ème méthode</u> : Le principe de cette 2ème méthode est de couper chacune des 2 circonférences par une droite quelconque passant par G et d'exprimer, dans chaque cas, que les 2 intersections entre droite et circonférence doivent être confondues en le point G.

Une droite quelconque passant par le point G présente comme équation :

$Y = \lambda(X - 2.195) + 6.244$ où $\lambda =$ paramètre $\quad (3)$

Ses intersections avec la circonférence (C_1) d'équation :

$(X-5)^2 + (Y-1.75)^2 = (5-2.195)^2 + (1.75\text{-}6.244)^2$ ou $(X-5)^2 + (Y-1.75)^2 = 28.064 \quad (4)$

se déterminent en remplaçant, dans (4), Y par son expression (3); il en résulte une équation du second degré en l'abscisse X du point d'intersection droite / circonférence :

$(X-5)^2 + [\lambda(X-2.195)+4.494]^2 = 28.064$

ou $X^2(1+\lambda^2) + X(-10-4.390\lambda^2+8.988\lambda) + (25+4.818\lambda^2-19.729\lambda+20.196-28.064) = 0$

Pour que cette équation admette 2 solutions confondues, il faut que son réalisant ρ soit nul et donc :

$\rho = (4.390\lambda^2 - 8.988\lambda + 10)^2 - 4(1+\lambda^2)(4.818\lambda^2 - 19.729\lambda + 17.132) = 0$

$\rightarrow (4.390\lambda^2 - 8.988\lambda + 10)^2 = 4(1+\lambda^2)(4.818\lambda^2 - 19.729\lambda + 17.132)$

Posons $A = (4.390\lambda^2 - 8.988\lambda + 10)^2 \quad B = 4(1+\lambda^2)(4.818\lambda^2 - 19.729\lambda + 17.132)$

Et résolvons par approximations successives :

λ	A	B
0.3	59.270	50.781
0.6	38.286	38.238
0.9	66.636	23.736
0.63	36.965	36.962
0.62	37.393	37.390
0.623	37.263	37.262
0.624	37.220	37.219

$\rightarrow \lambda \approx 0.624 \rightarrow \alpha_1 \approx 31.96°$

De même, ses intersections avec la circonférence (C_2) d'équation :

$(X+1.4)^2 + (Y-4)^2 = (-1.4-2.195)^2 + (4-6.244)^2$ ou $(X+1.4)^2 + (Y-4)^2 = 17.960 \quad (5)$

se déterminent en remplaçant, dans (5), Y par son expression (3); il en résulte une équation du second degré en l'abscisse X du point d'intersection droite / circonférence :

$(X+1.4)^2 + [\lambda(X-2.195)+2.244]^2 = 17.960$

ou $X^2(1+\lambda^2) - X(4.390\lambda^2 - 4.488\lambda - 2.8) + (4.818\lambda - 9.851 - 10{,}963) = 0$

Pour que cette équation admette 2 solutions confondues, il faut que son réalisant ρ soit nul et donc :

$\rho = (4.390\lambda^2 - 4.488\lambda - 2.8)^2 - 4(1+\lambda^2)(4.818\lambda^2 - 9.851\lambda - 10.963) = 0$

ou $(4.390\lambda^2 - 4.488\lambda - 2.8)^2 = 4(1+\lambda^2)(4.818\lambda^2 - 9.851\lambda - 10.963)$

Posons $A = (4.390\lambda^2 - 4.488\lambda - 2.8)^2 \quad B = 4(1+\lambda^2)(4.818\lambda^2 - 9.851\lambda - 10.963)$

Et résolvons par approximations successives :

λ	A	B
−1	36.942	29.648
−1.3	109.276	107.446
−1.6	243.959	243.969
−1.9	465.485	463.708

$\rightarrow \lambda = -1.6 \rightarrow \alpha_2 = -57.995°$

$\rightarrow$ <u>Les 2 tangentes forment donc, entre elles, un angle $a \approx 31.96° + 57.995 \approx 90°$</u>

3ème méthode :

La pente de la tangente en un point T de n'importe quelle courbe exprimable sous la forme d'une équation implicite, de la forme $F=0$, s'établit en opérant le rapport, affecté du signe "$-$", des dérivées partielles selon X (c.à.d. F'_x) et Y (c.à.d. F'_y) de la fonction F, calculées pour les valeurs des coordonnées X_T et Y_T du point de contact T considéré :

$$\text{Pente de la tangente en } T = -\left(\frac{F'_X}{F'_Y}\right)_T$$

Appliquons ce principe pour le cas d'espèce en déterminant les pentes des tangentes aux 2 circonférences (C_1) et (C_2), au point G.

Circonférence (C_1) : $F_1 = (X-5)^2 + (Y-1.75)^2 - 28.064 = 0$

$F_1'_x = 2(X-5) \rightarrow$ En G : $F_1'_x = 2(2.195-5) = -5.610$

$F_1'_y = 2(Y-1.75) \rightarrow$ En G : $F_1'_y = 2(6.244-1.75) = +8.988$

$$\rightarrow \text{Pente de la tangente en } G = -\left(\frac{F_1'_x}{F_1'_y}\right)_G = \frac{5.610}{8.988} = 0.624166$$

$\rightarrow \quad \alpha_1 = \arctan(+0.624166) = 31.97099°$

Circonférence (C_2): $F_2 = (X+1.4)^2 + (Y-4)^2 - 17.960 = 0$

$F_2'_x = 2(X+1.4) \quad \rightarrow$ En G : $F_2'_x = 2(2.195+1.4) = +7.190$

$F_2'_y = 2(Y-4) \quad \rightarrow$ *En G* : $F_2'_y = 2(6.244-4) = +4.488$

$$\rightarrow \text{Pente de la tangente en } G = -\left(\frac{F_2'_x}{F_2'_y}\right)_G = -\frac{7.190}{4.488} = -1.60204$$

$\rightarrow \quad \alpha_1 = \arctan(-1.60204) = -\ 58.02758°$

$\rightarrow$ Les 2 tangentes forment donc, entre elles, un angle $\alpha = 31.97099° + 58.02758° = 89.99857° \approx 90°$

C. Coordonnées du point E :

E appartient à CB.

Equation de CB $[C(0,8), B(10,0)]$: $\quad Y = -\ 0.8\ X + 8$

E a comme ordonnée imposée : $Y_E = h = 3.5 \rightarrow \quad 3.5 = -0.8 X_E + 8$

$\rightarrow \quad X_E = +5.625$

D. <u>Equation de l'hyperbole</u>

Equation générale d'une hyperbole de centre $E(+5.625,+3.5)$, dont les axes sont parallèles à OX et à OY et dont les sommets sont sur l'axe parallèle à OX :

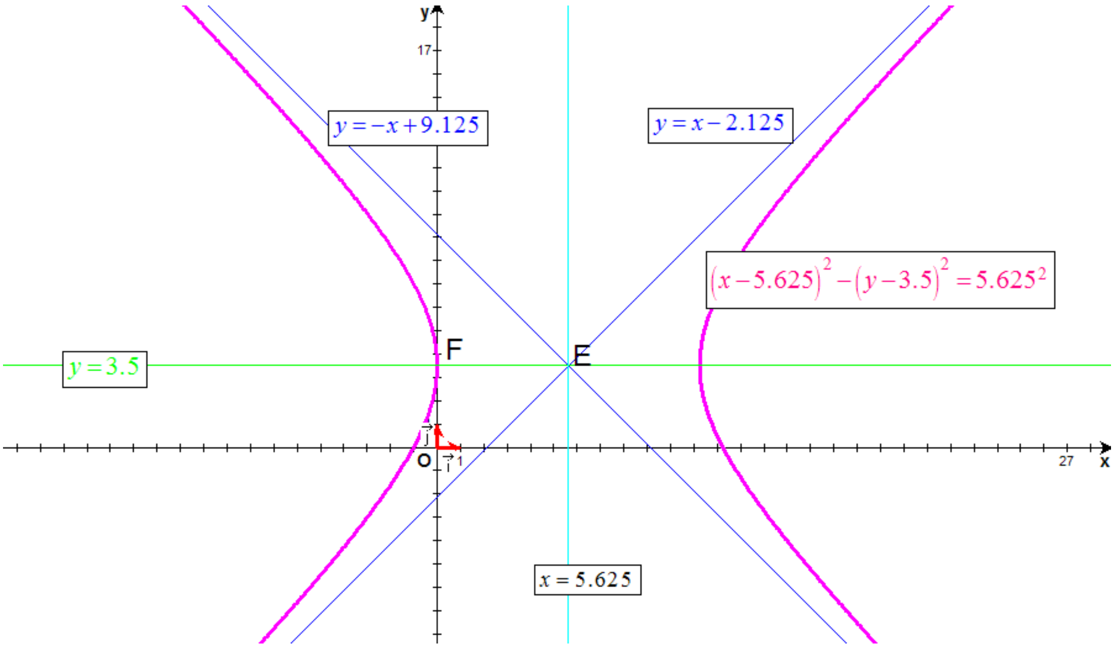
$$\frac{(X-5.625)^2}{m^2}-\frac{(Y-3.5)^2}{n^2}=1 \qquad (6)$$

Pour en connaître davantage à propos des dénominateurs m^2 et n^2 la condition imposée que les asymptotes fassent entre elles le même angle (qui sera pris = 90°) que les tangentes aux 2 circonférences doit être prise en compte.
Or, les 2 asymptotes sont symétriques par rapport à l'axe OX : l'une fait donc un angle = + 45° avec OX, l'autre, un angle de − 45°. Les pentes de ces asymptotes sont donc + 1 et − 1.
Or encore, les pentes des asymptotes à une hyperbole dont l'axe OX porte les 2 sommets s'établissent selon : $\frac{n}{m}$ et $-\frac{n}{m} \rightarrow m=n$ $\qquad (7)$

Il existe cependant encore une infinité d'hyperboles dont les asymptotes répondent à la condition précitée. Pour y distinguer celle qui est recherchée, il faut alors faire appel à l'autre condition exprimée dans l'énoncé : l'un des sommets de l'hyperbole est le point : $F(0,h)=F(0,3.5)$ $\qquad (8)$

De $(6),(7)$ et (8) $\rightarrow \frac{(0-5.625)^2}{m^2}-\frac{(3.5-3.5)^2}{n^2}=1 \rightarrow m^2=5.625^2$ $\qquad (9)$

De $(6),(7)$ et $(9) \rightarrow$ Equation de l'hyperbole recherchée : $\boxed{(X-5.625)^2-(Y-3.5)^2=5.625^2}$

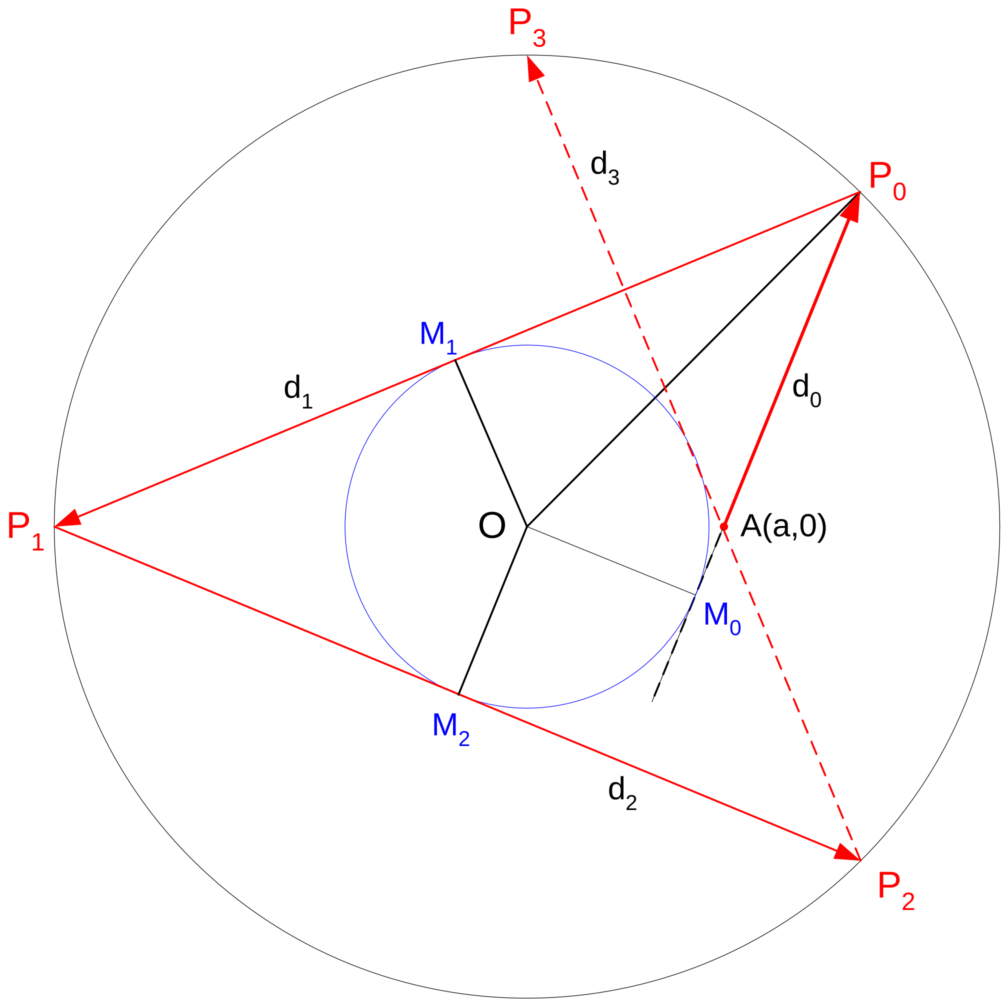


Graphique de l'hyperbole et de ses asymptotes

Le 10 mars 2007

EXGAP107 – Louvain, série 1 – juillet 2006

On considère une table de billard de forme circulaire dont le centre est l'origine du repère orthonormé *Oxy* du plan et dont le rayon est $R = 1\ m$. A partir d'une position (a ; 0) de cette table, on met en mouvement une boule dans une direction (b ; 1). Les paramètres a et b sont des réels positifs quelconques. Inévitablement, la boule va rebondir sur le bord de la table selon la règle de l'angle d'incidence égal à l'angle de réflexion. Tous les frottements sont négligés et la boule aura donc un mouvement perpétuel. En fonction des paramètres du problème, on vous demande de déterminer l'équation cartésienne de la limite de la surface de la table qui ne sera jamais atteinte par la bille. On s'intéresse, d'abord, au cas général. Ensuite, une discussion rapide des cas particuliers remarquables peut être effectuée.



La bille suit les trajectoires d_0, d_1, d_2, d_3.....d_n et touche le bord successivement en $P_0, P_1, P_2, ...P_n$.

Les angles $OAP_0, OP_0P_1, OP_1P_2, OP_2P_3.....OP_nP_{n+1}$ sont tous égaux puisque ce sont des angles d'incidence et de réflexion.

Soit M_0 le pied de la perpendiculaire abaissée de O sur d_0. De même, on définit $M_1, M_2...M_n$

Les triangles rectangles $OM_0P_0, OP_0M_1, OM_1P_1, OP_1M_2, OM_2P_2, ...$ sont tous égaux car ils ont l'hypoténuse égal (le rayon du grand cercle) et un angle égal.

Conclusion : La bille ne pénétrera pas dans un cercle de centre O et de rayon égal à $|OM_0|$

Déterminons $|OM_0|$

La droite issue de A: $d_0 \equiv y = b(x-a)$

La perpendiculaire $OM_0 : y = -\dfrac{x}{b}$

Les coordonnées de M_0 sont données par $\begin{cases} y = b(x-a) \\ y = -\dfrac{x}{b} \end{cases} \rightarrow -\dfrac{x}{b} = b(x-a)$

$$\rightarrow -x = b^2x - ab^2 \rightarrow x_{M_0} = \frac{ab^2}{b^2+1} \rightarrow y_{M_0} = -\frac{ab}{b^2+1}$$

$$\rightarrow |MO|^2 = \left(\frac{ab^2}{b^2+1}\right)^2 + \left(-\frac{ab}{b^2+1}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{(b^2+1)^2}(b^2+1) = \frac{a^2b^2}{b^2+1}$$

Le cercle cherché a donc pour équation : $\boxed{x^2 + y^2 = \dfrac{a^2b^2}{b^2+1}}$

Discussion

1) $b = 0 \rightarrow$ Cercle réduit a un point.

2) $b = \infty \rightarrow d_0$ est perpendiculaire à OA. C'est un cercle de rayon a

C'est aussi le plus grand cercle possible.

EXGAP108 – Louvain, série 2 – juillet 2006

Dans le plan rapporté µa un repère orthonormé Oxy, on considère les éléments suivants :

- le point : $P \equiv (-4; 0)$,
- le cercle γ de centre $(-4; 2)$ et d'équation $4x^2 + 4y^2 + 32x + my + 7 - 3m = 0$;

où m est un paramètre réel.

On vous demande de :

1. déterminer le rayon du cercle,
2. déterminer l'équation cartésienne du lieu des points M tels que la distance MP vaut k fois la distance MT avec k un réel strictement positif quelconque et T le point de contact d'une des tangentes à γ issues de M.
3. discuter la nature du lieu en fonction des valeurs possibles de k.

---

1) Rayon du cercle

Réduisons l'équation du cercle :

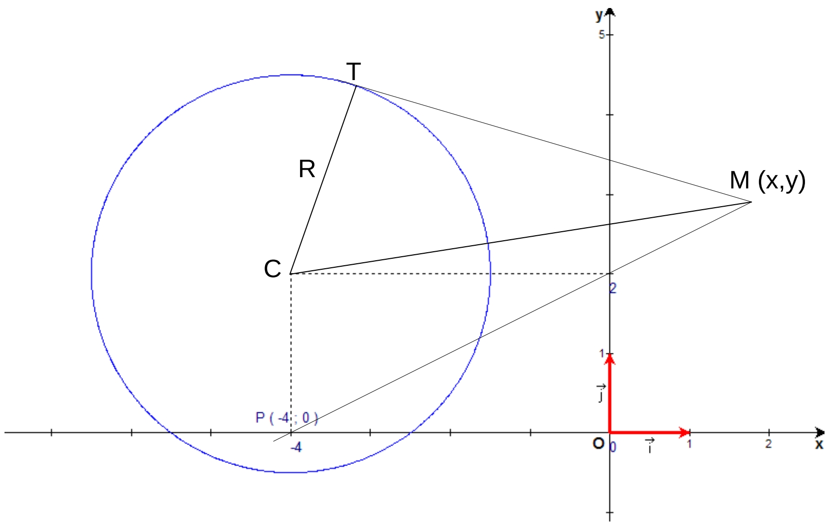
$$4x^2 + 4y^2 + 32x + my + 7 - 3m = 0$$

$$\rightarrow 4\left(x^2 + 8x + 16\right) + 4\left(y^2 + \frac{m}{4}y + \frac{m^2}{64}\right) = 3m - 7 + 64 + \frac{m^2}{16}$$

$$\rightarrow (x+4)^2 + \left(y + \frac{m}{8}\right)^2 = 3m + 57 + \frac{m^2}{16}$$

On en déduit que : $\frac{m}{8} = -2 \rightarrow m = -16 \rightarrow R^2 = 3m + 57 + \frac{m^2}{16} = \left(\frac{5}{2}\right)^2$

Et donc : $\boxed{R = \frac{5}{2}}$



2) Lieu

Par Pythagore : $|\ MT\ |^2 = |\ CM\ |^2 - R^2$

Si les coordonnées de M sont (x, y), on a directement :

$|\ MP\ |^2 = |\ MT\ |^2 \to |\ MP\ |^2 = |\ CM\ |^2 - R^2$

$$\to (x+4)^2 + y^2 = k\left[(x+4)^2 + (y-2)^2 - \frac{25}{4}\right]$$

Après développement et réduction des termes semblables, on trouve le lieu de M.

$$\boxed{(1-k)x^2 + (1-k)y^2 + 8(1-k)x + 4ky + \frac{64-55k}{4} = 0}$$

3) Discussion

$a)$ $k=1$

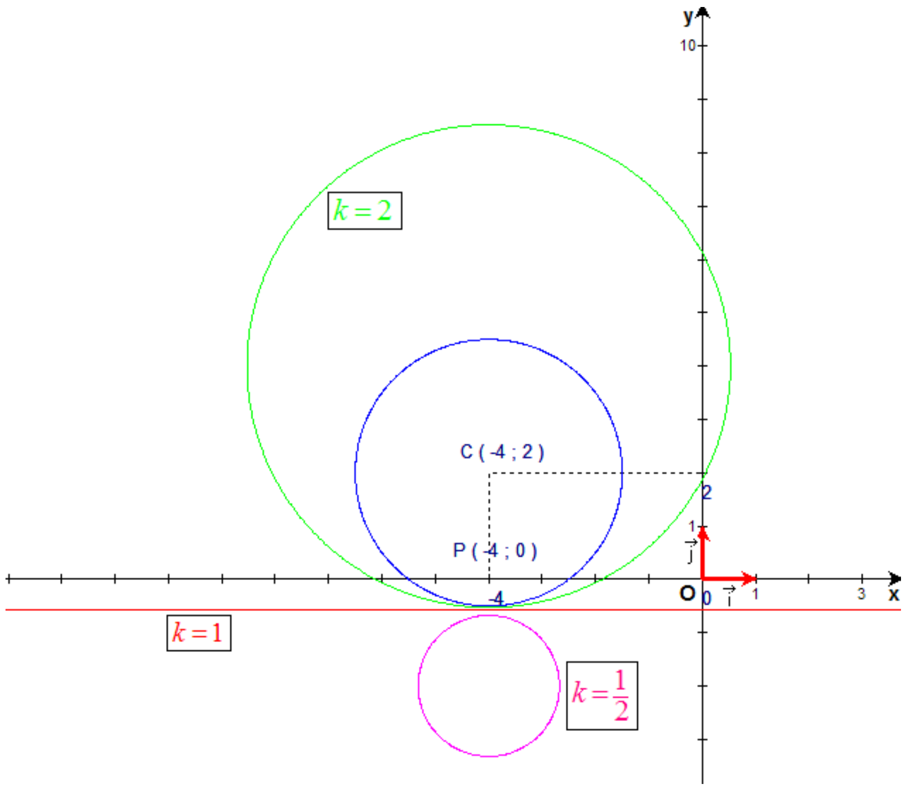
L'équation devient : $y = -\frac{9}{16}$. C'est une droite parallèle à l'axe des x

$b)$ $k \neq 1$

Dans ce cas, ce sont des cercles de centres :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y} \to 2(1-k)x + 8(1-k) = 0 \to x = -4 \\ \frac{\partial}{\partial x} \to 2(1-k)y + 4k = 0 \to y = -\frac{2k}{1-k} \quad (k \neq 1) \end{cases}$$

Les centres des cercles sont donc alignés sur une droite d'équation : $x = -4$



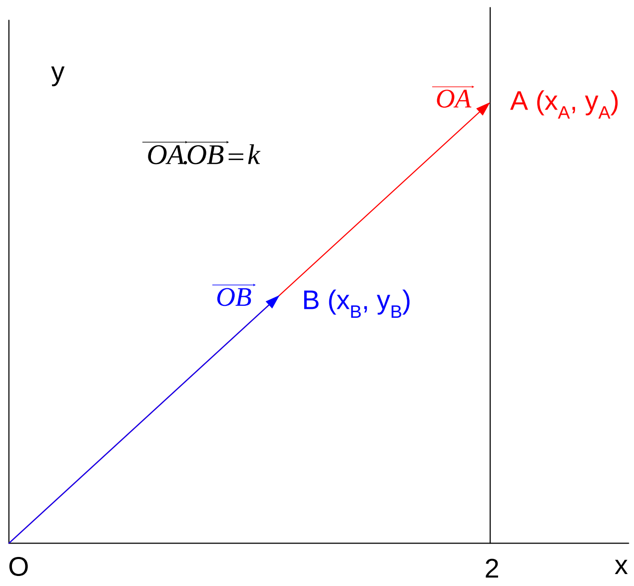
Le 30 juin 2007

EXGAP109 – Louvain, septembre 2006

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé *Oxy*, on considère deux points mobiles *A* et *B* qui présentent les caractéristiques suivantes. Ils sont toujours alignés avec le point *O* et le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est une constante positive :

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=k>0$$

Sachant que *A* se déplace sur la droite verticale $x = 2$, déterminer le lieu de *B* en fonction de *k*.



Les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ peuvent s'écrire : $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$ et $\overrightarrow{OB} = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$

Donc : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = k \rightarrow \overrightarrow{OA} = \dfrac{k}{\overrightarrow{OB}} \rightarrow x_A\vec{i} + y_A\vec{j} = \dfrac{k}{x_B\vec{i} + y_B\vec{j}} = \dfrac{k\left(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}\right)}{\left(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}\right)^2} = \dfrac{k\left(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}\right)}{x_B{}^2 + y_B{}^2}$

Ce qui conduit au système : $\begin{cases} x_A = \dfrac{kx_B}{x_B{}^2 + y_B{}^2} & (1) \\ y_A = \dfrac{ky_B}{x_B{}^2 + y_B{}^2} \end{cases}$

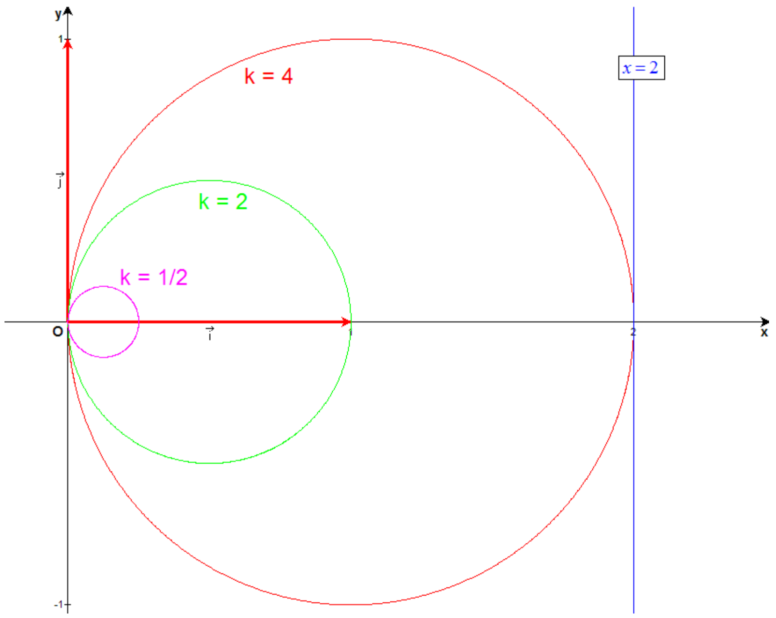
Or x_A se trouve sur la droite : $x = 2 \rightarrow x_A = 2$

Et donc : $(1) \rightarrow 2x_B{}^2 + 2y_B{}^2 = kx_B \rightarrow 2x_B{}^2 + 2y_B{}^2 - kx_B = 0$

Le lieu de B est donc un cercle d'équation :

$\boxed{2x^2 + 2y^2 - kx = 0}$ de centre $C\left(\dfrac{k}{4}, 0\right)$ et de rayon $R = \dfrac{k}{2}$

Ce résultat était attendu puisque l'inversion d'un cercle passant par le pôle est une droite.



Le 30 juin 2007