Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 12

EXGAP120 – EXGAP129

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Sep 08

EXGAP120 – FPMS, Mons , 2002.

Soit une conique d'équation cartésienne $25(x-2)^2+9(y-1)^2=225$

1) La représenter graphiquement et la caractériser (nature, axes, foyers) ;

2) Donner les points I_1 et I_2 de cette conique qui ont une ordonnée égale à 5, ainsi que les équations des tangentes respectives t_1 et t_2 de la conique en ces points. Trouver ensuite le point d'intersection de ces tangentes ;

3) Donner l'équation d'un cercle admettant également t_1 et t_2 comme tangentes aux points respectifs I_1 et I_2.

Solution proposée par Steve Tumson

1) $25(x-2)^2+9(y-1)^2=225 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y-1)^2}{5^2}=1}$

$Nature$: ellipse

$Axe\ vertical\ (grand\ axe) : x=2$

$Axe\ horizontal\ (petit\ axe) :\ y=1$

Plaçons-nous dans un repère où les axes de l'ellipse sont les mêmes que les axes du repère, et où le grand axe est l'axe horizontale. Un tel repère s'écrit :

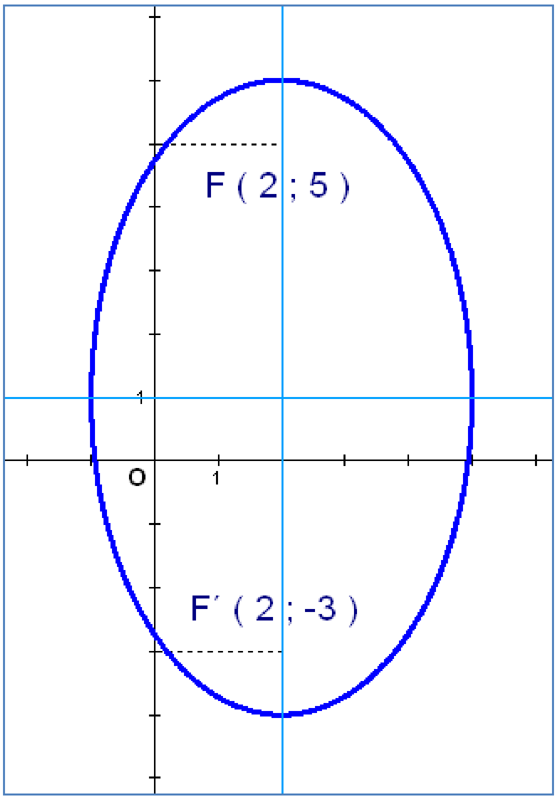
$$\begin{cases} X = y-1 \\ Y = x-2 \end{cases}$$

Dans ce repère, la conique s'écrit sous sa forme canonique :

$$\frac{X^2}{5^2}+\frac{Y^2}{3^2}=1$$

Dans ce repère, les coordonnées du foyer sont $F'(-c;0)$ et $F(c,0)$ avec $c^2=5^2-3^2=16 \to F'(-4;0)$ et $F(4,0)$

Dans le repère cartésien normal, les foyers sont donc $F'(2;-3)$ et $F(2,5)$



F (2 ; 5)
1
O
1
F´ (2 ; -3)

2)

On peut se replacer dans le repère propre à l'ellipse pour trouver les deux points demandés. Ainsi, il vient simplement :

$$\begin{cases} X = y-1 = 4 \\ Y = x-2 \end{cases} \Rightarrow \frac{X^2}{5^2}+\frac{Y^2}{3^2}=1 \Leftrightarrow \frac{16}{25}+\frac{Y^2}{9}=1 \Leftrightarrow \frac{Y^2}{9}=\frac{9}{25} \Leftrightarrow Y^2=\frac{81}{25} \Leftrightarrow Y=\pm\frac{9}{5}$$

$$\Rightarrow x = Y+2 = \frac{19}{5} \;\; et \;\; \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{I_1 = \left(\frac{1}{5};5\right) \;\; ; \;\; I_2 = \left(\frac{19}{5};5\right)}$$

Pour trouver les équations des tangentes, il reste à calculer la dérivée implicite de la conique :

$$\frac{d}{dx}\left(25(x-2)^2+9(y-1)^2\right)=\frac{d}{dx}\left(225\right) \Leftrightarrow 50(x-2)+18(y-1)\frac{dy}{dx}=0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{25(2-x)}{9(y-1)}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{I_1} = \frac{25\left(2-\frac{1}{5}\right)}{9(5-1)}=\frac{45}{36}=\frac{5}{4} \quad \text{et} \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{I_2} = \frac{25\left(2-\frac{19}{5}\right)}{9(5-1)}=\frac{-45}{36}=-\frac{5}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{t_1 \equiv (y-5)=\frac{5}{4}\left(x-\frac{1}{5}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{t_2 \equiv (y-5)=\frac{-5}{4}\left(x-\frac{19}{5}\right)}$$

$$\Rightarrow t_1 \cap t_2 : \frac{5}{4}\left(x-\frac{1}{5}\right)=\frac{-5}{4}\left(x-\frac{19}{5}\right) \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=\frac{29}{4} \Leftrightarrow \boxed{t_1 \cap t_2 = \left(2,\frac{29}{4}\right)}$$

3)

Le cercle étant tangent à ces deux droites, ses rayons y sont perpendiculaires. Le centre du cercle est donc l'intersection des deux normales aux tangentes précédemment trouvées :

$$n_1 \equiv (y-5)=-\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{5}\right) \quad \text{et} \quad n_2 \equiv (y-5)=\frac{4}{5}\left(x-\frac{19}{5}\right)$$

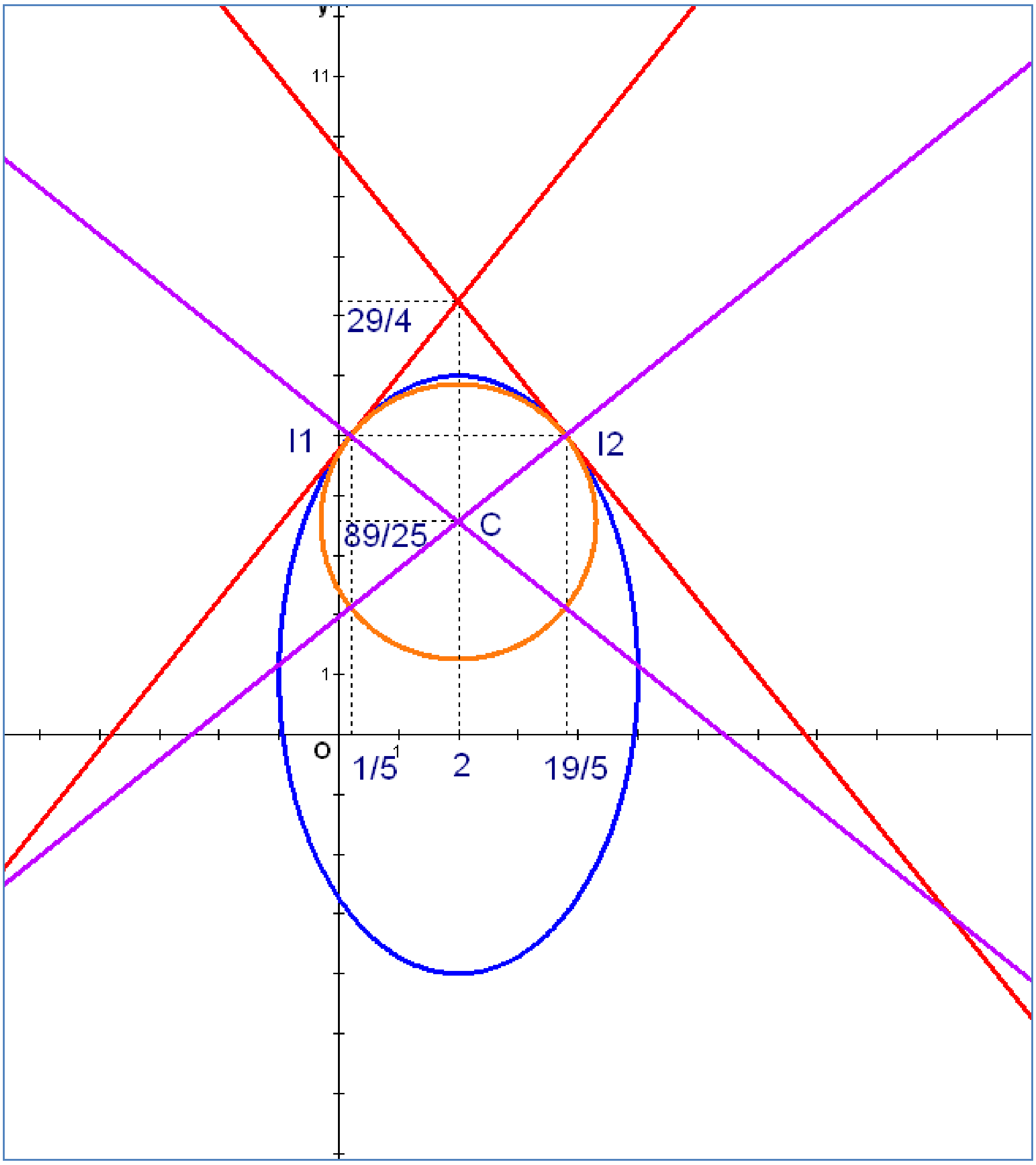
$$\Rightarrow C = n_1 \cap n_2 : -\frac{4}{5}\left(x-\frac{1}{5}\right)=\frac{4}{5}\left(x-\frac{19}{5}\right) \Leftrightarrow x=2 \Rightarrow y=\frac{89}{25}$$

$$\Rightarrow C=\left(2;\frac{89}{25}\right)$$

$$\Rightarrow r = d\left(C,I_1\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{5}-2\right)^2+\left(5-\frac{89}{25}\right)^2} \simeq 2,3$$

On écrit donc l'équation du cercle :

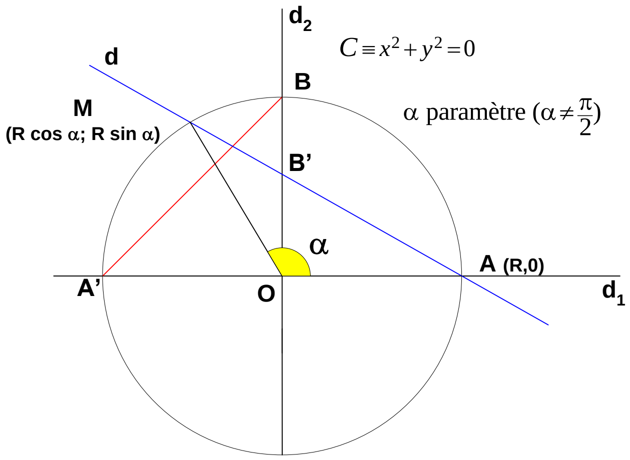
$$\boxed{(x-2)^2+\left(y-\frac{89}{25}\right)^2=2,3^2}$$


y
11
29/4
I1
I2
89/25
C
1
O
1/5
2
19/5

EXGAP121 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2008.

On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et deux droites perpendiculaires d_1 et d_2 passant par O. On note A une des intersections de d_1 avec $\mathcal{C}$ et B une des intersections de d_2 avec $\mathcal{C}$. Par A on mène une droite variable d qui coupe $\mathcal{C}$ en un point M distinct de B. La droite AM coupe d_2 en B' et la droite BM coupe d_1 en A'. Démontrer que le produit des longueurs des segments $[A,A']$ et $[B,B']$ reste constant lorsque d varie.

Solution proposée par Frédéric Garcet



$$AM \equiv \begin{vmatrix} x & R & R\cos\alpha \\ y & 0 & R\sin\alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to -R\sin\alpha.x + y\left(R\cos\alpha - R\right) + R^2\sin\alpha = 0$$

$$\to -x\sin\alpha + y\left(\cos\alpha - 1\right) + R\sin\alpha = 0$$

$$B' = AM \cap OY \to B' : \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{R\sin\alpha}{1-\cos\alpha} \end{pmatrix}$$

$$BM \equiv \begin{vmatrix} x & 0 & R\cos\alpha \\ y & R & R\sin\alpha \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to x\left(R - R\sin\alpha\right) + yR\cos\alpha - R^2\cos\alpha = 0$$

$$\to x\left(1-\sin\alpha\right) + y\cos\alpha - R\cos\alpha = 0$$

$$A' = BM \cap OX \to A' : \begin{pmatrix} \dfrac{R\cos\alpha}{1-\sin\alpha} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion :

$$|\,AA'\,|.|\,BB'\,| = \left| \frac{R\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - R \right| . \left| \frac{R\sin\alpha}{1-\cos\alpha} - R \right|$$

$$= R^2 \left| \frac{\cos\alpha - 1 + \sin\alpha}{1-\sin\alpha} . \frac{\sin\alpha - 1 + \cos\alpha}{1-\cos\alpha} \right|$$

$$= R^2 \left| \frac{\cos\alpha\sin\alpha - \cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin\alpha + 1 - \cos\alpha + \sin^2\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha} \right|$$

$$= 2R^2 \left| \frac{1-\cos\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{1-\cos\alpha - \sin\alpha + \sin\alpha\cos\alpha} \right| = 2R^2 = \text{Constante}$$

EXGAP122 – FSA, UCL, Louvain, juillet 2008, série 1.

Un segment de longueur constante l se meut de manière telle que les extrémités s'appuient en A et B, deux points variables sur les côtés d'un angle droit.
On demande :

1) de décrire le lieu du milieu du segment $[A, B]$
2) de décrire le lieu d'un point quelconque de ce segment

Solution proposée par Steve Tumson

1) Pour des raisons de facilités de calcul, choisissons les axes des abscisses et des ordonnées formant l'angle droit sur lequel s'appuie le segment.
On a donc, si le point B varie de 0 à t sur l'axe des abscisses :

$$A = \left(0, \sqrt{l^2 - t^2}\right) \qquad et \qquad B = (t, 0)$$

$$\Rightarrow M_{AB} = \left(\frac{t}{2}, \frac{\sqrt{l^2 - t^2}}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{t}{2} \Leftrightarrow t = 2x \\ y = \dfrac{\sqrt{l^2 - t^2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \frac{l^2}{4}}$$

Le lieu recherché est un cercle dont le centre est le sommet de l'angle droit (ici l'origine du repère) et dont le rayon vaut la moitié de la longueur du segment

2) Les cordonnées d'un point quelconque appartenant au segment est

$$Q_{AB} = \left(\alpha t, \beta\sqrt{l^2 - t^2}\right) \quad \forall \alpha, \beta \in \left]0, 1\right]$$

En effet, son abscisse est une fraction de l'abscisse de B et son ordonnée est une fraction de l'ordonnée de A.
Notons que ces deux paramètre ne sont pas indépendants !
Ils sont liés par une relation qui nous importe peu ici.

On écrit donc :

$$\begin{cases} x = \alpha t \Leftrightarrow t = \dfrac{x}{\alpha} \\ y = \beta\sqrt{l^2 - t^2} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\frac{x^2}{l^2\alpha^2} + \frac{y^2}{l^2\beta^2} = 1}$$

Les lieux de ces points sont donc des ellipses dont les axes sont les côtés de l'angle droit.

---

24 juillet 2008, (Relu par Benoit Baudelet)

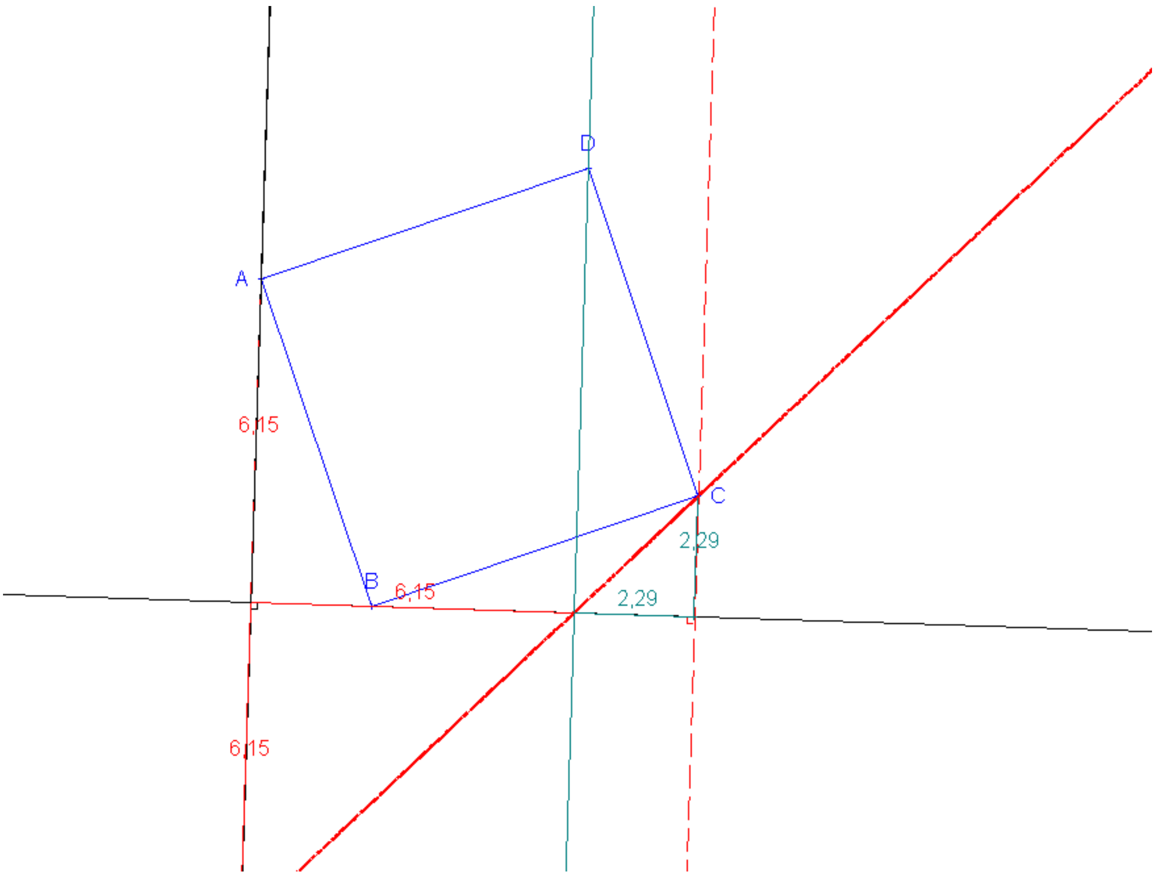
EXGAP123 – FSA, UCL, Louvain, Juillet 08, série 2

On donne deux droites fixes orthogonales. Sur la première est situé un point fixe *A*, sur la deuxième un point variable *B*.

Déterminez le lieu des sommets *C* et *D* du carré *ABCD*.

Ce carré ne rencontre les droites fixes qu'en *A* et *B*.

Solution proposée par Steve TUMSON



Choisissons, pour des raisons évidentes de simplicité de calcul, l'origine du repère cartésien comme l'intersection des droites perpendiculaires fixes (et donc orthogonales).
Les coordonnées des points A et B nous permettent de déterminer la longueur des côtés du carré :

$$\begin{cases} A=(0,Y_A) \\ B=(t,0) \end{cases} \Rightarrow d(A,B)=\sqrt{t^2+Y_A^2}$$

Pour trouver le lieu du sommet D, il faut trouver l'équation de la droite AD :

$$d_{AB} \equiv y=-\frac{Y_A}{t}x+Y_A \Rightarrow d_{AD} \equiv y=\frac{t}{Y_A}x+Y_A$$

La distance de A à D doit être la même que celle de A à B. On trouve ainsi l'équation du lieu de D :

$$d(A,D)=\sqrt{x_D^2+\left(y_D-Y_A\right)^2}=\sqrt{x_D^2+\left(\frac{t}{Y_A}x_D+Y_A-Y_A\right)^2}=\sqrt{t^2+Y_A^2}$$

$$\Leftrightarrow x_D^2+\frac{t^2}{Y_A^2}x_D^2=t^2+Y_A^2 \Leftrightarrow x_D^2=\frac{t^2+Y_A^2}{\left(1+\frac{t^2}{Y_A^2}\right)}=Y_A^2 \Leftrightarrow \boxed{x_D=Y_A} \text{ ou } x_D=-Y_A$$

On garde la première solution car sur notre schéma, le point D se situe en abscisse positive.
Les deux sont toutefois corrects, cela dépend de comment on a dessiné le schéma au début !

Même opération pour le lieu de C :

$$d_{AB} \equiv y=-\frac{Y_A}{t}x+Y_A \Rightarrow d_{BC} \equiv y=\frac{t}{Y_A}x+K \xrightarrow{B\in d_{BC}} K=-\frac{t^2}{Y_A} \Rightarrow d_{BC} \equiv y=\frac{t}{Y_A}x-\frac{t^2}{Y_A}$$

$$d(B,C)=\sqrt{\left(x_C-t\right)^2+y_C^2}=\sqrt{\left(x_C-t\right)^2+\left(\frac{t}{Y_A}x_C-\frac{t^2}{Y_A}\right)^2}=\sqrt{t^2+Y_A^2}$$

$$\Leftrightarrow \left(x_C-t\right)^2+\left(\frac{t}{Y_A}x_C-\frac{t^2}{Y_A}\right)^2=t^2+Y_A^2 \Leftrightarrow \left(x_C-t\right)^2+\frac{t^2}{Y_A^2}\left(x_C-t\right)^2=t^2+Y_A^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x_C-t\right)^2\left(1+\frac{t^2}{Y_A^2}\right)=t^2+Y_A^2 \Leftrightarrow \left(x_C-t\right)^2=\frac{t^2+Y_A^2}{\left(1+\frac{t^2}{Y_A^2}\right)}=Y_A^2 \Leftrightarrow \boxed{x_C=Y_A+t} \text{ ou } x_C=-Y_A+t$$

$$\Rightarrow y_C=\frac{t}{Y_A}\left(Y_A+t\right)-\frac{t^2}{Y_A}=t+\frac{t^2}{Y_A}-\frac{t^2}{Y_A} \Leftrightarrow \boxed{y_C=t}$$

On garde la première solution car sur notre schéma, le point C se situe en abscisse positive quand t est nul.
Les deux sont toutefois corrects, cela dépend de comment on a dessiné le schéma au début !

Finalement, en substituant le paramètre variable t :

$$\Rightarrow \boxed{y_C=x_C-Y_A}$$

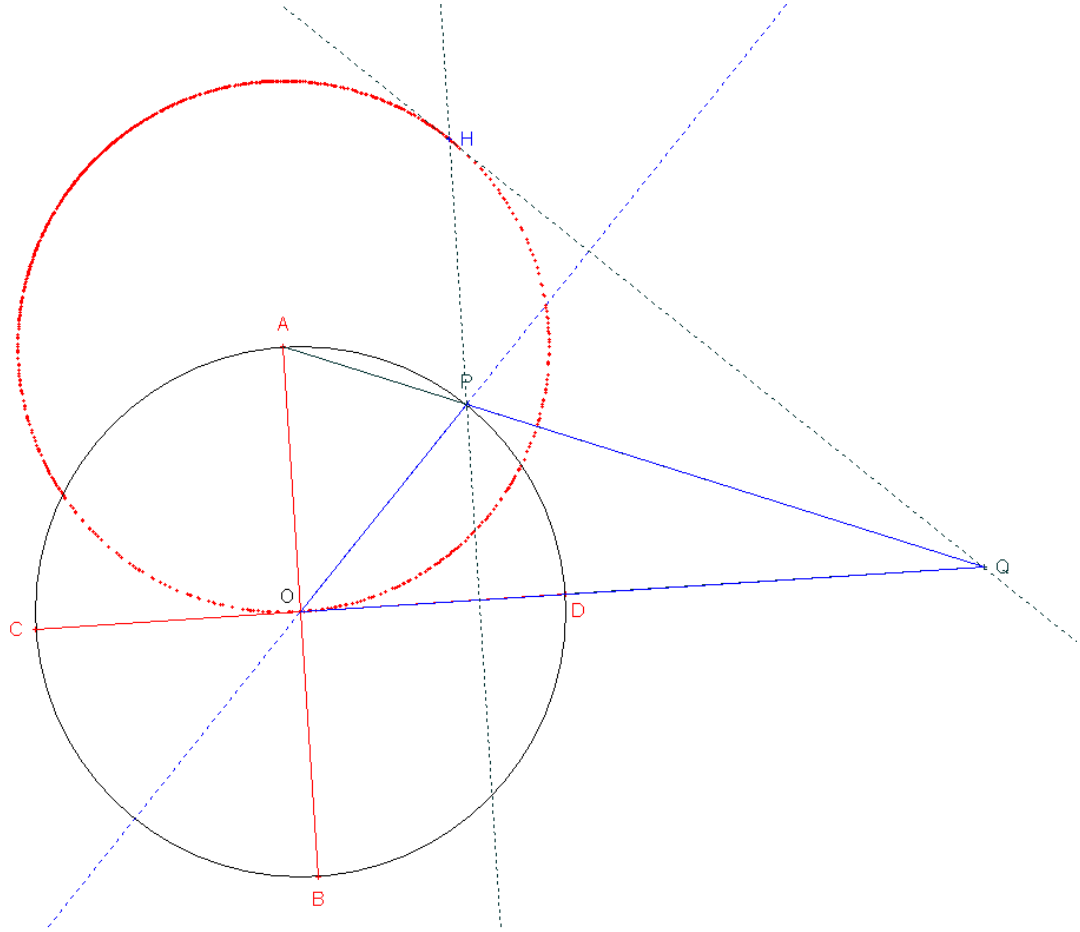
Le lieu du sommet D est donc une droite verticale d'abscisse Y_A et le lieu du sommet C est une droite de coefficient angulaire unitaire et d'ordonnée à l'origine $-Y_A$

30 juillet 08. (Relu par Benoit Baudelet)

EXGAP124 – FACSA, ULG, Liège, Septembre 08.

On considère un cercle C de centre O et deux diamètres perpendiculaires $[A, B]$ et $[C, D]$ de ce cercle.
Un point variable P parcourt C. On note Q l'intersection des droites AP et CD.
Déterminer le lieu de l'orthocentre (c'est-à-dire le point de rencontre des trois hauteurs) du triangle OPQ.

Solution proposée par Thomas Belligoi



Considérons un repère orthonormé d'origine O tel que les points A, B, C et D ont pour coordonnées $(0; R)$, $(0; -R)$, $(-R;\ 0)$ et (R; 0) respectivement.
On considere un cercle centré à l'origine et de rayon R.
Soit un point P de coordonnées $(\alpha; \beta)$, se déplaçant sur le cercle.
La relation suivante exprime l'appartenance de ce point au cercle :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

La droite AP, passant par les points $(0; R)$ et $(\alpha; \beta)$, a pour équation :

$$y = \frac{\beta - R}{\alpha} x + R$$

Le cas où $\alpha = 0$ (ou $\beta = R$) sera traité plus loin.
Le point Q est défini comme l'intersection de la droite AP et l'axe x :

$$\begin{cases} y = \dfrac{\beta - R}{\alpha} x + R \\ y = 0 \end{cases}$$

soit

$$Q : \left(-\frac{R\alpha}{\beta - R}; 0 \right)$$

L'orthocentre est le point de rencontre des hauteurs d'un triangle. Pour rechercher les coordonnées de l'orthocentre du triangle OPQ, il suffit de connaître l'equation de deux hauteurs.
La hauteur issue de P a pour equation : $x = \alpha$
et la hauteur issue de Q, perpendiculaire à OP (par conséquent, la pente de cette hauteur est donc l'opposé de l'inverse de celle de OP) et passant par Q, a pour équation :

$$y = -\frac{\alpha}{\beta} x - \frac{\alpha^2 R}{\beta(\beta - R)}$$

Les coordonnées de l'orthocentre sont obtenues en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\alpha}{\beta} x - \dfrac{\alpha^2 R}{\beta(\beta - R)} \\ x = \alpha \end{cases}$$

soit en isolant α et β

$$\begin{cases} \beta = -\dfrac{x^2}{y} + R \\ \alpha = x \end{cases}$$

Par conséquent, en éliminant les parmètres,

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2 \to x^2 + \left(-\frac{x^2}{y} + R \right)^2 = R^2$$

$$\to x^2 y^2 + x^4 - 2x^2 yR + \cancel{y^2 R^2} = \cancel{y^2 R^2}$$

$$\to x^2 + y^2 - 2yR = 0 \to \boxed{x^2 + (y - R)^2 = R^2}$$

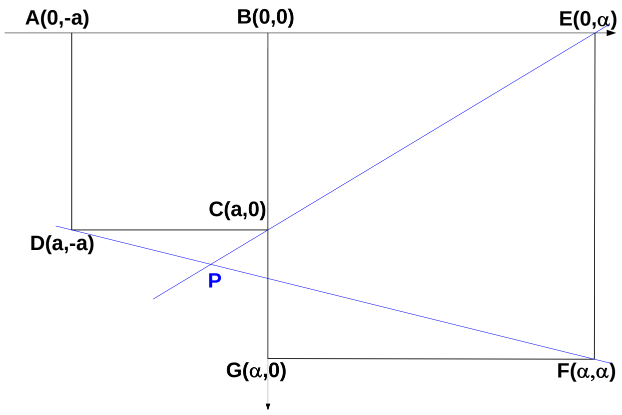
Le lieu géométrique est donc un cercle de centre $(0; R)$ et de rayon R

Cas particuliers

1. Si $\alpha = 0$ ou $\beta = R$, P est confondu avec A. La droite AP n'est pas définie.
2. Si $\beta = 0$ ou $\alpha = \pm 1$, les points O, P et Q sont alignés. Le triangle n'est pas défini.

EXGAP125 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 08

On donne deux carrés accolés le long d'un côté : *ABCD*, de côté fixe *a*, et *BEFG*, de côté variable (*G* est sur *BC* ou sur son prolongement au-delà de *C*).
On demande de déterminer le lieu géométrique du point *P*, intersection des droites *EC* et *DF*.



Soit *BC* l'axe *x* et *BE* l'axe *y*.

Nous allons écrire les équations des droites *CE* et *FD*. Le lieu de *P* est obtenu en éliminant le paramètre α entre les deux équations.

$$CE \equiv \frac{x}{a}+\frac{y}{\alpha}=1 \to \alpha=\frac{ay}{a-x}$$

$$FD \equiv \frac{x-a}{\alpha-a}=\frac{y+a}{\alpha+a} \to \frac{x-a}{\frac{ay}{a-x}-a}=\frac{y+a}{\frac{ay}{a-x}+a} \to \frac{x-a}{ay-a^2+ax}=\frac{y+a}{ay+a^2-ax}$$

Simplifions par *a* et faissons le produit croisé : $(x-a)(y+a-x)=(y+a)(y-a+x)$

$$\to \cancel{xy}+\cancel{ax}-x^2-ay-\cancel{a^2}+ax=y^2-\cancel{ay}+\cancel{xy}+\cancel{ay}-\cancel{a^2}+\cancel{ax}$$

$$\to x^2+y^2-ax+ay=0$$

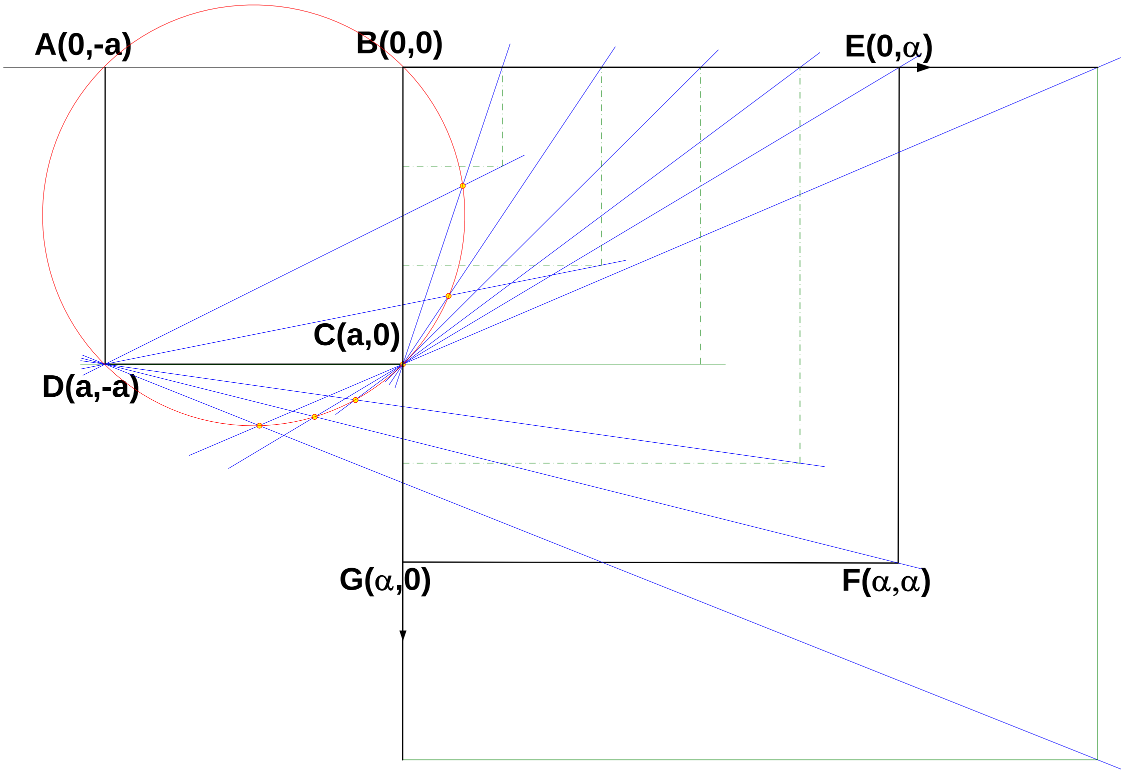
C'est l'équation d'un cercle. Réduisons le :

$$x^2-ax+\frac{a^2}{4}+y^2+ay+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2} \to \boxed{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{2}}$$

Cercle de centre $\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right)$ et de rayon $R=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

C'est donc le cercle circonscrit au *ABCD*.

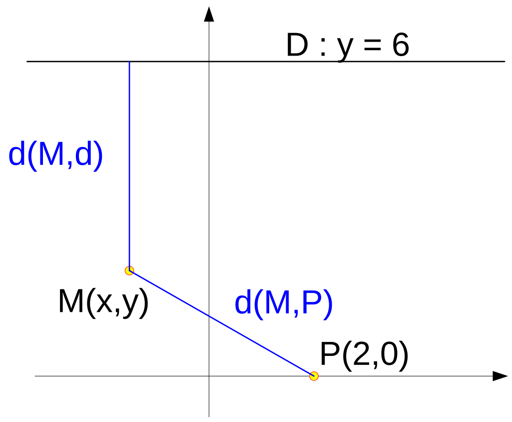
Nous noterons que seul l'arc $\overset{\frown}{BCD}$ est la partie du cercle qui représente le lieu de *P*.



20 décembre 2008

EXGAP126 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 08

Dans un plan rapporté au système d’axes coordonnés *OXY*, on donne la droite *d* d’équation $Y = 6$ et le point *P* de coordonnées (2,0). Déterminer le lieu des points *M* du plan dont le rapport des distances à la droite *d* et au point *P* vaut 2. Représentez ce lieu en prenant le cm comme unité de mesure.



Il suffit d'exprimer la condition demandée :

Distance de M à $P : d(M,P) = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}$

Distance de M à $d : d(M,d) = (y-6)$

Avec $d(M,d) = 2d(M,P)$

$\rightarrow 4\left[(x-2)^2 + y^2\right] = (y-6)^2 \rightarrow 4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 = y^2 - 12y + 36$

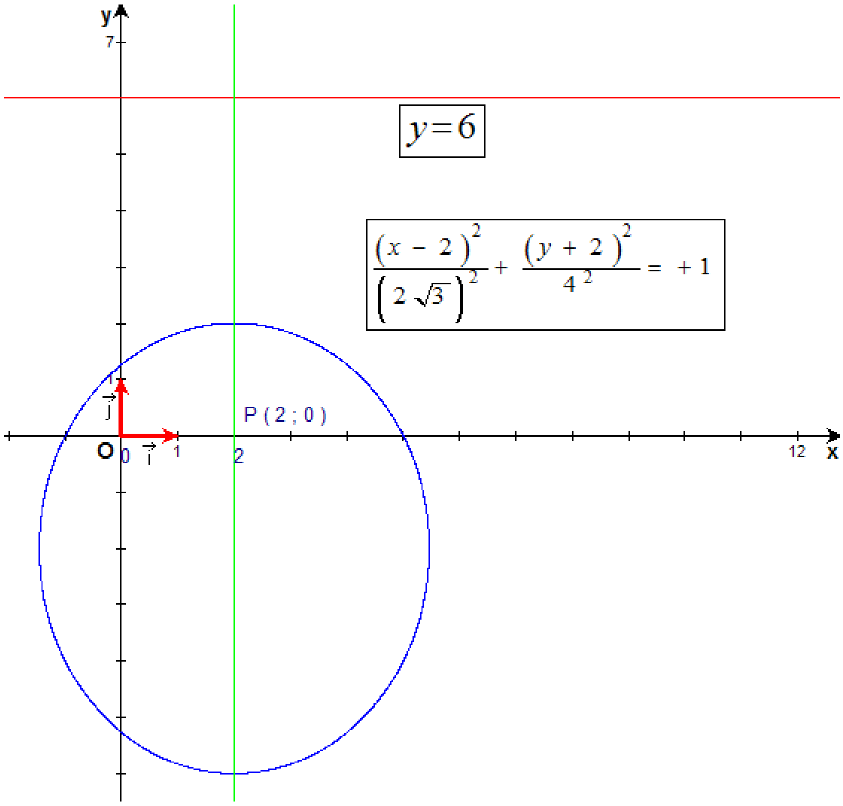
$\rightarrow 4x^2 + 3y^2 - 16x + 12y - 20 = 0$

C'est une ellipse. Réduisons la.

$\rightarrow 4(x^2 - 4x + 4) + 3(y^2 + 4y + 4) = 20 + 16 + 12$

$\rightarrow 4(x-2)^2 + 3(y+2)^2 = 48 \rightarrow \boxed{\dfrac{(x-2)^2}{(2\sqrt{3})^2} + \dfrac{(y+2)^2}{(4)^2} = 1}$

Ellipse de centre de $(2,-2)$, demi-grand axe $a = 4$ et demi-petit axe $b = 2\sqrt{3}$

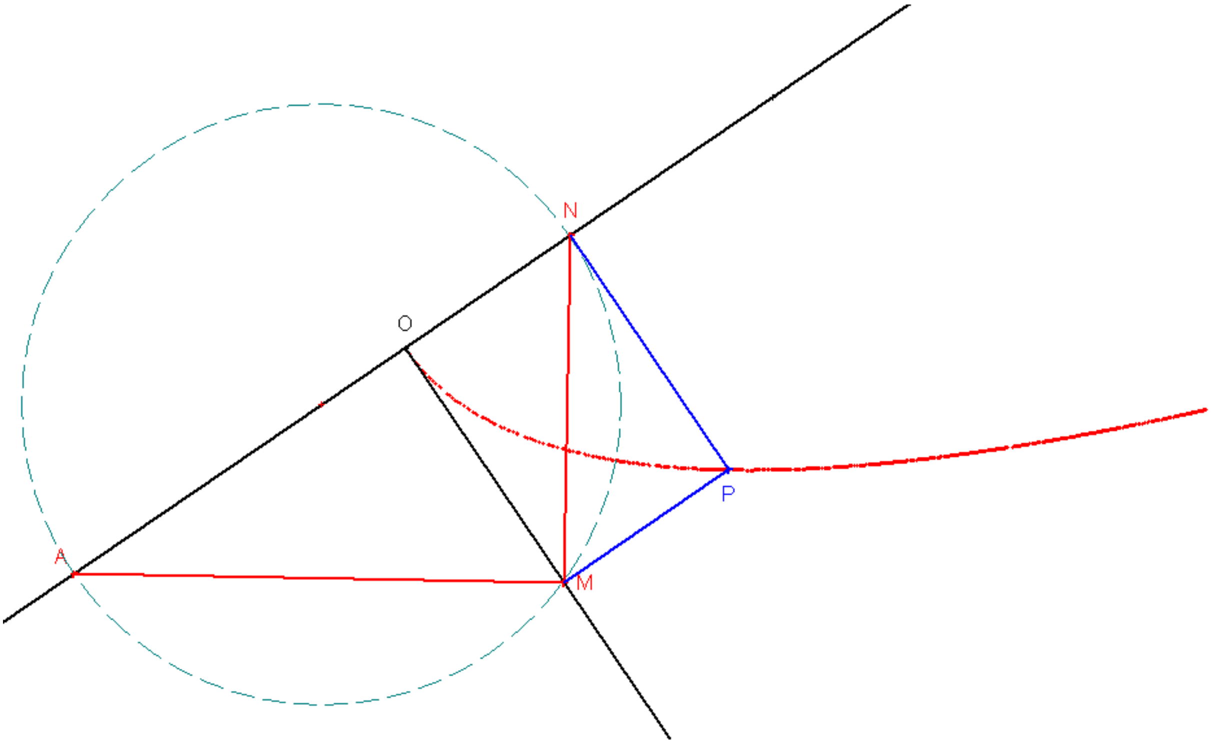


20 décembre 2008

EXGAP127 – EPL, UCL, Louvain, septembre 08

La droite a et la demi-droite b sont perpendiculaires en un point O.
Soit A un point fixe de la droite a tel que $|OA| = 1$. On considère un point M mobile, appartenant à la demi-droite b et un autre point N mobile lui aussi, appartenant à a tel que l'angle $\widehat{AMN}$ soit droit. Quelle est la courbe décrite par le point P, quatrième sommet du rectangle $NOMP$?

Solution proposée par Steve TUMSON



Pour des raisons évidentes de simplicité, nous choisirons la droite a comme l'axe des ordonnées d'un repère cartésien, et la demi-droie b comme l'axe des abscisses positives de ce même repère. On a donc : $A(0,-1)$ et $N(0,\lambda)$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}^+$

Puisque $\widehat{AMN}$ doit être droit, on peut voir M comme l'intersection d'un cercle C (de centre et de rayon $\frac{|AN|}{2}$) et de la demi-droite b.

Si M a comme corrdonées $M(\gamma,0)$, on en déduit le raport entre γ et λ suivant:

$$\begin{cases} C \equiv \left(y - \left(\frac{\lambda-1}{2} \right) \right)^2 + x^2 = \left(\frac{\lambda+1}{2} \right)^2 \\ M(\gamma,0) \in C \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lambda = \gamma^2}$$

Le point P a donc pour coordonnées : $P(\gamma,\lambda) \Leftrightarrow P(\gamma,\gamma^2)$

$$\begin{cases} x_P = \gamma \\ y_P = \gamma^2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_P = x_P^2}$$

La courbe recherchée est donc, dans ce repère choisi, une parabole !

21 décembre 08

EXGAP128 – FACSA, ULG, Liège, juillet 09.

Dans un repère orthonormé du plan, on donne la parabole $\mathcal{P}$ par son équation cartésienne

$$x^2 = 4y$$

(a) Déterminer l'équation cartésienne d'une tangente quelconque à la courbe $\mathcal{P}$

(b) Déterminer le lieu des poins à partir desquels les tangentes menées à la courbe $\mathcal{P}$ sont orthogonales entre elles.

---

1) La pente de la tangente en $x = \lambda$ est donnée par $y' = \frac{x}{2} \to m = \frac{\lambda}{2}$

L'équation de la tangente est alors : $y - f(\lambda) = m(x-\lambda) \to y - \frac{\lambda^2}{4} = \frac{\lambda}{2}(x-\lambda)$

$\to \boxed{t \equiv y = \frac{\lambda}{2}x - \frac{\lambda^2}{4}}$

2) Soit $P(\alpha,\beta)$ un point quelconque.

Une droite quelconque issue de P a pour équation : $y - \beta = m(x-\alpha) \to y = mx - m\alpha + \beta$

Les abscisses des points d'intersection avec la parabole est donnée par :

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ y = mx - m\alpha + \beta \end{cases} \to x^2 - 4mx + 4(m\alpha - \beta) = 0$$

Pour avoir une tangente il faut que le discriminant de cette équation soit nul :

$$\Delta' = 4m^2 - 4(m\alpha - \beta) = 0 \to m^2 - \alpha m + \beta = 0 \qquad (1)$$

Les racines de cette dernière équation sont les pentes de tangentes cherchées.

Elles doivent être orthogonales. Soit m_1 une de ces racines. L'autre est donc $-\frac{1}{m_1}$.

L'équation (1) doit donc pouvoir se factoriser sous la forme :

$$(x - m_1)\left(x + \frac{1}{m_1}\right) = 0 \to m^2 - \left(m_1 - \frac{1}{m_1}\right)m - 1 = 0$$

Par identification avec (1), on en déduit que α et β doivent respecter les conditions :

$$\begin{cases} \alpha = m_1 - \frac{1}{m_1} \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Autrement dit, le point P doit être situé sur la droite $y = -1$ qui est simplement la directrice de la parabole.

Note : Ce résultat était connu d'avance. La directrice d'une parabole est sa courbe orthoptique, c'est-à-dire le lieu des points d'où l'on peut mener deux tangentes orthogonales.

---

9 aout 2009

EXGAP129 – EPL, UCL, Louvain, juillet 09, série 1.

Soit une parabole P dont l'équation dans un repère cartésien est $y = a\,x^2$.

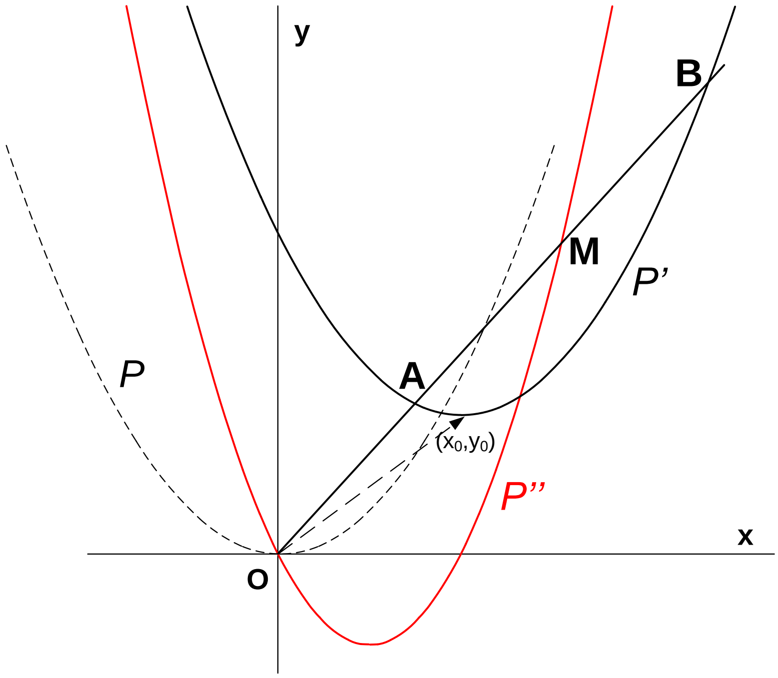
1) On translate P (sans rotation) de telle façon que le sommet soit translaté du point $(x,y)=(0,0)$ vers le point $(x,y)=(x_o,y_o)$.
Trouvez l'équation de cette nouvelle parabole P'.

2) On considère une droite D, mobile, passant par l'origine des axes $(x,y)=(0,0)$.
Cette droite coupe la parabole P' en deux points A et B.
Soit M le point milieu du segment reliant A et B. Trouvez l'équation du lieu de M.

3) A quelle famille de courbes appartient M ?

4) Une fraction du lieu doit être exclue. Trouvez cette fraction et expliquez votre raisonnement.

Les sous-questions (1) à (3) doivent faire l'objet, en plus du raisonnement, de réponses brèves encadrées $(\text{en cas d'erreur, le raisonnement sera aussi considéré})$.



Si la parabole $P \equiv y = ax^2$ est translatée au point (x_0, y_0), l'équation devient :

$$\boxed{P' \equiv y - y_0 = a(x - x_0)^2}$$

Cherchons l'équation donnant les points d'intersection A et B de la droite $D \equiv y = mx$ avec la parabole P'. $\to mx - y_0 = a(x - x_0)^2 \to ax^2 - (2ax_0 + m)x - ax_0^2 + y_0 = 0$

Les coordonnées de M, milieu de $\overline{AB}$ sont alors : $\begin{cases} x = \dfrac{2ax_0 + m}{2a} \\ y = \dfrac{2ax_0 + m}{2a}.m \end{cases}$

Pour obtenir le lieu de M, il suffit d'éliminer *m*.

$$\begin{cases} m = 2a(x - x_0) \\ y = \dfrac{2ax_0 + 2a(x - x_0)}{2a}.2a(x - x_0) \end{cases} \to \boxed{P'' \equiv y = 2ax(x - x_0)}$$

C'est une parabole qui passe par l'origine et d'axe de symétrie $x = \dfrac{x_0}{2}$

Pour trouver la partie du lieu qui doit être exclue, il faut distinguer deux cas :
$a > 0$ (Paraboles à concavité positive) et $a < 0$ (Paraboles à concavité négative).

Soit donc $a > 0$. Les valeurs de x à exclure sont celles pour lesquelles P' est située au-dessus de P''. Ce qui s'écrit :

$$a(x - x_0)^2 + y_0 > 2ax(x - x_0) \to ax^2 < ax_0^2 + y_0 \to x^2 < \frac{ax_0^2 + y_0}{a}$$

La dernière équation implique que : $y_0 > -ax_0^2$. Si tel est le cas alors les valeurs de x à exclure sont données par :

$$\boxed{x \in \left] -\sqrt{\frac{ax_0^2 + y_0}{a}}, \sqrt{\frac{ax_0^2 + y_0}{a}} \right[}$$

Si maintenant $y_0 = -ax_0^2$, la parabole P' a pour équation : $y = ax(x - 2x_0)$. Elle passe donc par l'origine et aucun point de P'' n'est à exclure.
Enfin si $y_0 > -ax_0^2$, l'origine est située à "l'intérieure" de P et aucun point n'est à exclure.

Soit $a < 0$, la condition devient :

$$a(x - x_0)^2 + y_0 < 2ax(x - x_0) \to ax^2 > ax_0^2 + y_0 \to x^2 < \frac{ax_0^2 + y_0}{a}$$

C'est à dire la même relation et donc les mêmes conclusions que pour $a > 0$