Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 13

EXGAP130 – EXGAP139

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson

Sep 09

EXGAP130 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2009 série 1.

Soit un système de coordonnées cartésiennes (x, y). On considère la famille des paraboles $\left(\text{type } A\right)$ qui ont pour axe de symétrie l'axe X et pour sommet le point $(c, 0)$.
Une autre famille $\left(\text{type } B\right)$ est constituée de paraboles qui ont pour axe de symétrie l'axe Y et pour sommet le point $(0, d)$.

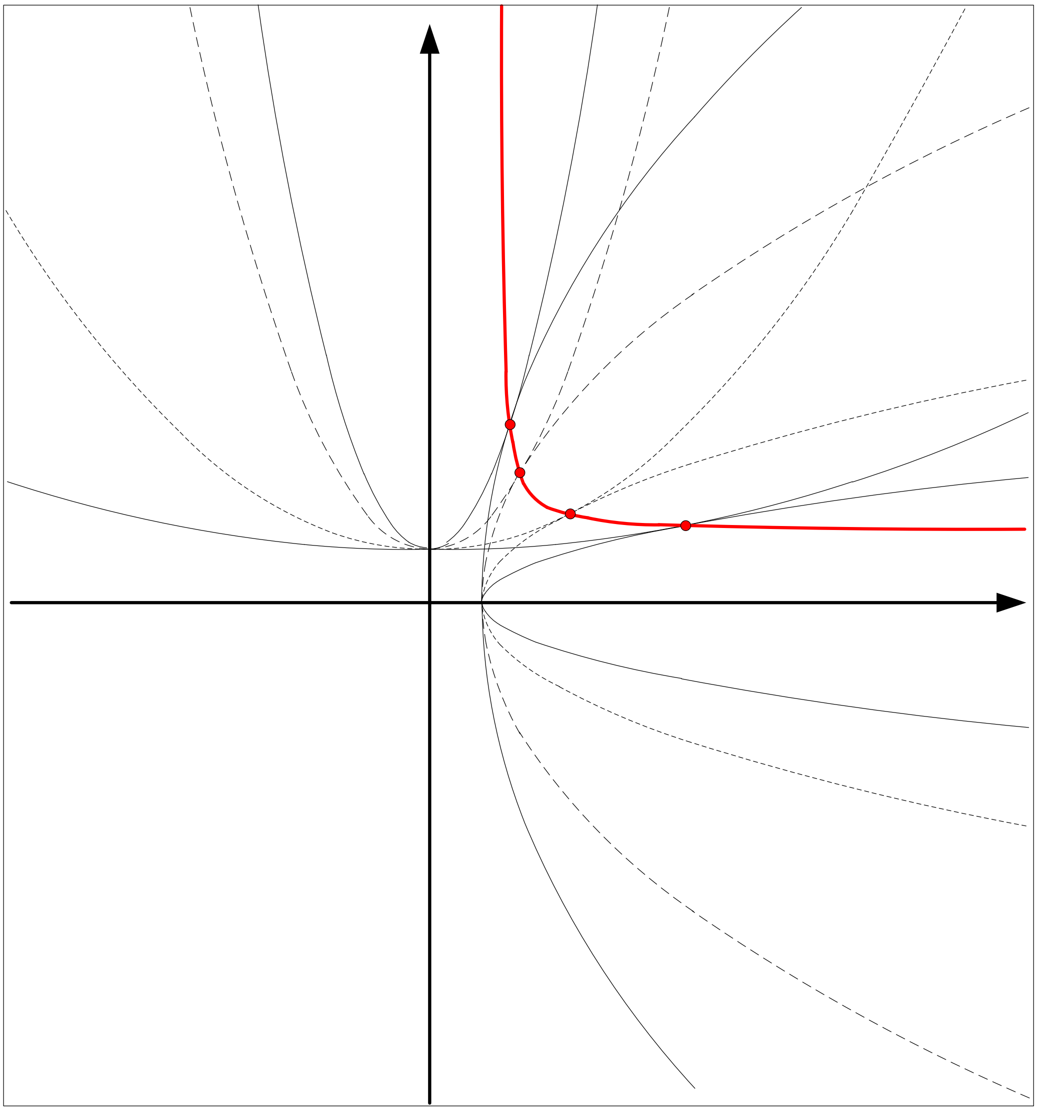
1) Donnez une équation cartésienne générale pour chacun des deux types de paraboles.
2) Faites un dessin montrant une parabole de type A et une parabole de type B telles qu'elles aient un et un seul point de contact $\left(\text{les paraboles sont tangentes}\right)$.

Pour chaque parabole de type A, il existe une seule parabole de type B qui lui soit tangente.
On se propose de chercher le lieu des points de contact entre ces paraboles.
Soit (x_c, y_c) un tel point de contact. Pour trouver le lieu des points de contact $\left(\text{une équation liant } x_c \text{ à } y_c\right)$, l'on va utiliser le fait que, en un tel point, les droites tangentes aux deux paraboles ont la même pente $\left(\text{il s'agit d'ailleurs d'une seule et même droite}\right)$.

3) Donnez une équation exprimant l'égalité de ces pentes.
4) Donnez, en fonction des paramètres c et d uniquement, l'équation du lieu des points de contact entre les paraboles.

Suggestion : évitez de résoudre des équations d'ordre élevé; basez votre approche sur le fait que l'équation liant x_c à y_c ne peut faire apparaître que les paramètres c et d.

5) A quel type de courbes ce lieu appartient – il ?



Les familles ont pour équation : $\begin{cases} \text{Type } A : a^2x = y^2 + a^2c \\ \text{Type } A : y = bx^2 + d \end{cases}$

Si ces deux familles ont une tangente commune, alors les dérivées, au point de contact (x_c, y_c) des deux familles sont égales : $\dfrac{a}{2\sqrt{x_c - c}} = 2bx_c \quad (1)$

De plus le point de contact appartient aux deux familles :

$$\text{Type } A \rightarrow y_c = a\sqrt{x_c - c} \rightarrow a = \frac{y_c}{\sqrt{x_c - c}}$$

$$\text{Type B} \rightarrow y_c = bx_c^2 - d \rightarrow b = \frac{y_c - d}{x_c^2}$$

On remplace dans (1)

$$\frac{y_c}{2(x_c - c)} = 2\frac{y_c - d}{x_c} \rightarrow 3x_cy_c - 4dx_c - 4cy_c + 4cd = 0$$

Le lieu est donc :

$$\boxed{y = \frac{4d}{3}\frac{(x - c)}{\left(x - \frac{4c}{3}\right)}}$$

C'est une hyperbole équilatère de type $y = k\left(\dfrac{x - \alpha}{x - \beta}\right)$, de centre $(4d/3, 4c/3)$

Notons que dans le cas particulier ou $c = 0,$ le lieu est une droite horizontale : $y = \dfrac{4d}{3}$

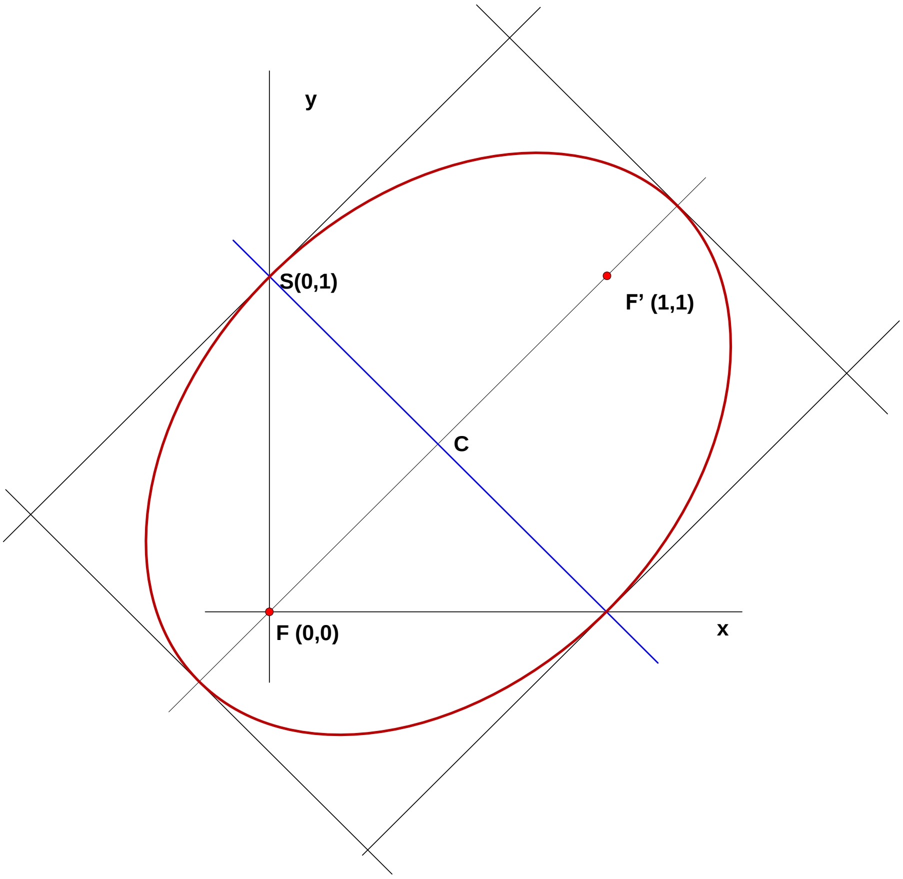
EXGAP131 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2009.

Donnez l'équation cartésienne de l'ellipse dont les foyers sont en : $F(0,0)$ et $F'(1,1)$ et qui passe par le point $S(0,1)$. Commencez par faire un dessin.

NB : L'exercice requiert la mise en oeuvre d'une propriété des ellipses (14 points sur 25) ainsi qu'une partie algébrique qui permet d'amener le résultat sous une forme qui puisse être identifiée à l'équation d'une ellipse (11 points sur 25). Cette deuxième partie peut être un peu longue: essayez d'utiliser une ≪ astuce ≫ pour raccourcir le développement

---

Solution proposée par Paul Etienne



Soit $P(x,y)\in E \rightarrow d(P,F)+d(P,F')=d(S,F)+d(S,F')$

$\rightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2 \rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}=2-\sqrt{x^2+y^2}$

$\rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2=4-4\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$

$\rightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=4-4\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$

$\rightarrow 2\sqrt{x^2+y^2}=x+y+1 \rightarrow 4\left(x^2+y^2\right)=x^2+y^2+1+2xy+2x+2y$

$\rightarrow \boxed{3x^2-2xy+3y^2-2x-2y-1=0}$

Remarques

1. Le milieu des foyers est le centre $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ de E

2. Comme $SC \perp FF'$: S est un sommet du petit axe, l'autre est $S'(1,0)$

3. Les sommets du grand axe sont à distance 1 de C sur SS'

Réduction de la conique proposée par Christophe Leclère

Il reste à transformer l'équation $3x^2+3y^2-2xy-2x-2y-1=0$ en une forme canonique pour les ellipses.

Pour ce faire, il convient d'utiliser un repère dans lequel les axes de l'ellipse sont parallèles aux axes.

D'après la figure $\left(\text{ou en examinant la droite } FF'\right)$, on remarque que, dans le repère proposé,

les axes de l'ellipse forment un angle de 45° avec les axes Ox et Oy.

On va donc exprimer l'équation dans un nouveau repère dont les $\left(\text{nouveaux}\right)$ axes Ox' et Oy'

sont déterminés par des vecteurs unités $u\left(\text{selon } Ox'\right)$ et $v\left(\text{selon } Oy'\right)$ dont les coordonnées dans le repère original sont données par

$$u\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad v\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Un point P repéré dans le nouveau repère par les coordonnées (x',y') aura donc pour coordonnées dans le repère original $\left(x,y\right)=x'u+y'v$, c'est-à-dire

$$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x'-y'\right) \qquad \text{et} \qquad y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')$$

Cette relation entre les coordonnées dans l'ancien et le nouveau repère, nous permet de réécrire l'équation de l'ellipse dans le nouveau repère :

$$\frac{3}{2}\left(x'-y'\right)^2+\frac{3}{2}\left(x'+y'\right)^2-2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x'-y'\right)\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x'+y'\right)-2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x'-y'\right)-2\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x'+y'\right)-1=0$$

$$3x'^2+3y'^2-x'^2+y'^2-2\sqrt{2}x'-1=0$$

$$2x'^2-2\sqrt{2}x'+4y'^2=1$$

Pour obtenir la forme canonique d'une ellipse, c'est-à-dire $\frac{(x-c)^2}{a^2}+\frac{(y-d)^2}{b^2}=1$, il suffit de réécrire

$$2x'^2-2\sqrt{2}x'=2\left(x'^2-\sqrt{2}x'\right)=2\left(\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}\right)=2\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-1$$

L'équation devient alors,

$$2\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+4y'^2=2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\left(x'-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{1}-\frac{y'^2}{\frac{1}{2}}=1$$

ce qui correspond à une ellipse de centre $C\left(\frac{\sqrt{2}}{2},0\right)$ et de rayons $1\left(\text{en } Ox'\right)$ et $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\text{en} Oy'\right)$.

Dans le repère original, le centre devient $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, qui est bien un point à mi-chemin entre

les deux foyers F et F'. On peut également vérifier que la distance entre $C\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ et le sommet

du petit axe $S\left(0,1\right)$ vaut bien $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Le 12 septembre 2009

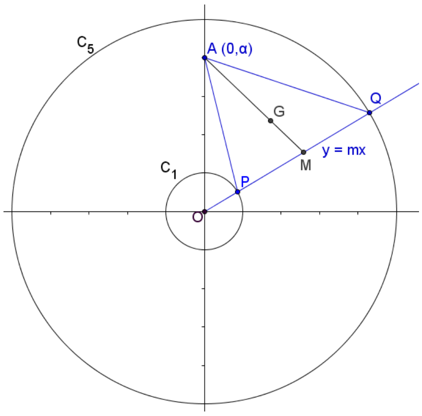
EXGAP132 – FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2009.

OXY est un repère aothonormé du plan. C_1 et C_5 sont les cercles centrés à l'origine de rayons respectifs 1 et 5. Une demi-droite mobile d'origine O et de pente m (où m est un paramètre réel ou infini) coupe C_1 en P et C_5 en Q. Soit A un point de l'axe OY.

a) Déterminer le lieu du centre de gravité (centre de masse, barycentre) du triangle APQ.

b) Existe-t-il des positions particulières de A, sur OY, telles que le lieu soit tangent à C_1 et C_5 ?

c) Y-a-t-il d'autres points du plan pour lesquels cette propriété est vérifiée? Si oui, lesquels?



1) Les équations des cercles sont : $\begin{cases} C_1 \equiv x^2+y^2=1 \\ C_5 \equiv x^2+y^2=5 \end{cases}$ et l'équation de la droite variable $d \equiv y = mx$.

Les points d'intersections de la droite d avec les cercles sont :

$$P = C_1 \cap d : \left(\sqrt{\frac{1}{1+m^2}}, m\sqrt{\frac{1}{1+m^2}}\right) \quad \text{et} \quad Q = C_5 \cap d : \left(\left(\sqrt{\frac{25}{1+m^2}}, m\sqrt{\frac{25}{1+m^2}}\right)\right)$$

Soit le point $A(0,\lambda)$ un point de l'axe des y, les coordonnées de G, centre de gravité du triangle APQ,

sont : $G : \left(\dfrac{x_A+x_P+x_Q}{3}, \dfrac{y_A+y_P+y_Q}{3}\right)$.

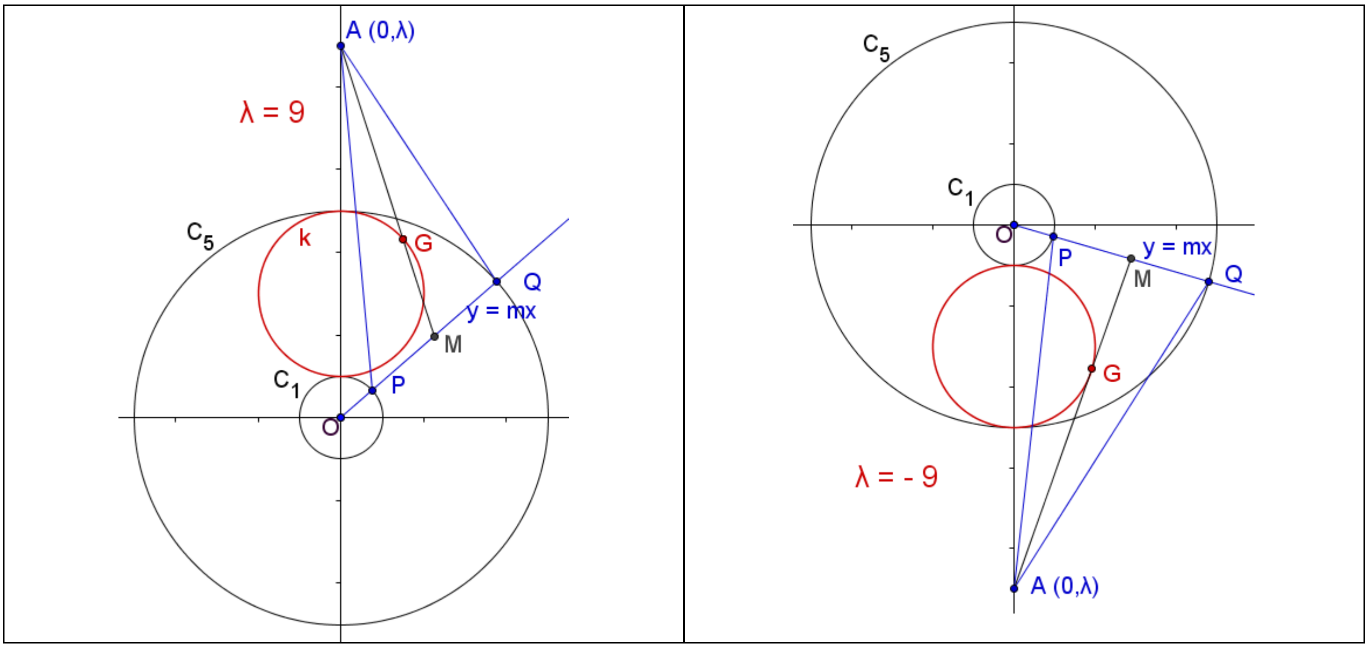
On remplace et on obtient le système : $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{3}\left(\sqrt{\dfrac{1}{1+m^2}}+\sqrt{\dfrac{25}{1+m^2}}\right) \\ y_G = \dfrac{1}{3}\left(\lambda + m\sqrt{\dfrac{1}{1+m^2}}+m\sqrt{\dfrac{25}{1+m^2}}\right) \end{cases}$

$$\rightarrow \begin{cases} 3x_G = 6\sqrt{\dfrac{1}{1+m^2}} \\ 3y_G - \lambda = 6\sqrt{\dfrac{m^2}{1+m^2}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(\dfrac{3x_G}{6}\right)^2 = \dfrac{1}{1+m^2} \\ \left(\dfrac{3y_G-\lambda}{6}\right) = \dfrac{m^2}{1+m^2} \end{cases}$$

On élimine facilement le paramètre m en additionnant membre à membre :

$$\rightarrow \left(\frac{3x_G}{6}\right)^2 + \left(\frac{3y_G-\lambda}{6}\right) = 1 \rightarrow 9x_G^2 + (3y_G-\lambda)^2 = 36 \rightarrow \boxed{x_G^2 + \left(y_G - \frac{\lambda}{3}\right)^2 = 4}$$

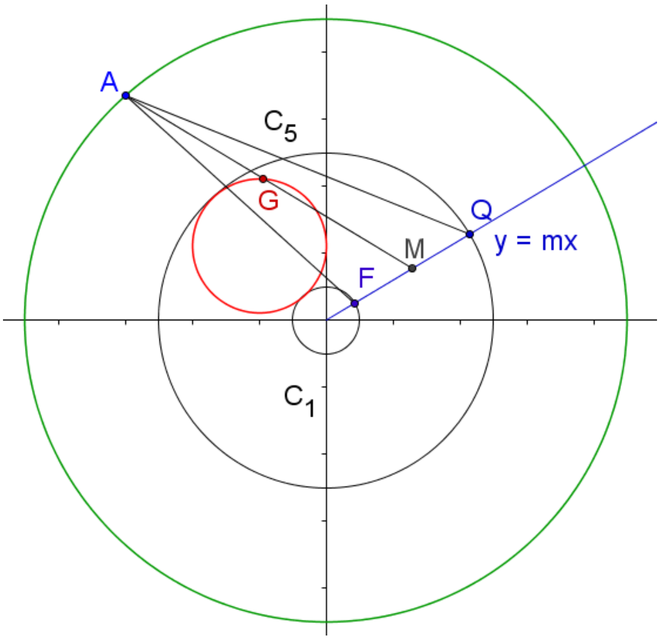
C'est un cercle de centre $\left(0, \dfrac{\lambda}{3}\right)$ et de rayon 2



b) Le lieu sera tangent aux deux cercles si l'ordonnée du centre $\left(\dfrac{\lambda}{3}\right)$ est situé à mi-distance des deux circonférences C_1 et C_5. $\rightarrow \dfrac{\lambda}{3} = 3 \rightarrow \boxed{\lambda = 9}$

Par simple raison de syméttrie : $\boxed{\lambda = -9}$ est également une solution.

c) De même pour des raisons de symétrie, on en déduit que si A se déplace sur la circonférence de centre O et de rayon 9, le lieu sera tangent aux deux cercles donnés.



EXGAP133 – FACS, ULB, Bruxelles, Septembre 2009.

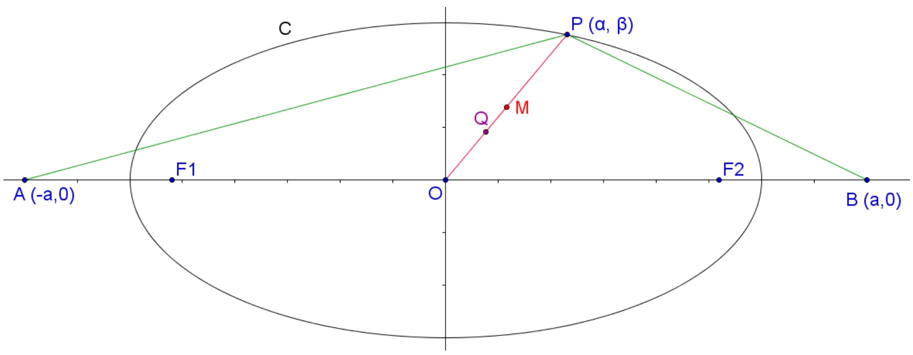
OXY est un repère orthonormé du plan . On donne l'ellipse d'équation $\frac{X^2}{36}+\frac{Y^2}{9}=1$ et deux points de l'axe OX : $A(-a,0)$ et $B(a,0)$ où a est réel positif.

a) Déterminez le lieu géométrique du centre de gravité (centre de masse, barycentre) du triangle PAB sachant que P est un point quelconque de l'ellipse.

b) Calculer la valeur de a si A et B sont les foyers de l'ellipse.

c) Déterminez le lieu géométrique du point Q situé sur OP au tiers de OP à partir de O.

d) Déterminez le lieu géométrique du point M, milieu de OP.



$a)$ Soit $P(\alpha,\beta)$ appartenant à l'ellipse C. Donc : $\frac{\alpha^2}{36}+\frac{\beta^2}{9}=1 \to \beta=\pm\frac{1}{2}\sqrt{36-\alpha^2}$.

Le centre de gravité G du triangle PAB est le point de rencontre de ces médianes.

$$\to \begin{cases} x_G=\frac{\alpha}{3} \\ y_G=\pm\frac{1}{6}\sqrt{36-\alpha^2} \end{cases} \to y_G=\pm\frac{1}{6}\sqrt{36-9x_G{}^2} \to 36y_G^2=36-9x_G^2 \to \boxed{\frac{x^2}{4}+y^2=1}$$

C'est une ellipse centrée à l'origine, de demi grand axe $a=2,$ de demi petit axe $b=1$ et de foyers $H_1(-\sqrt{3},0)$ et $H_2(\sqrt{3},0)$.

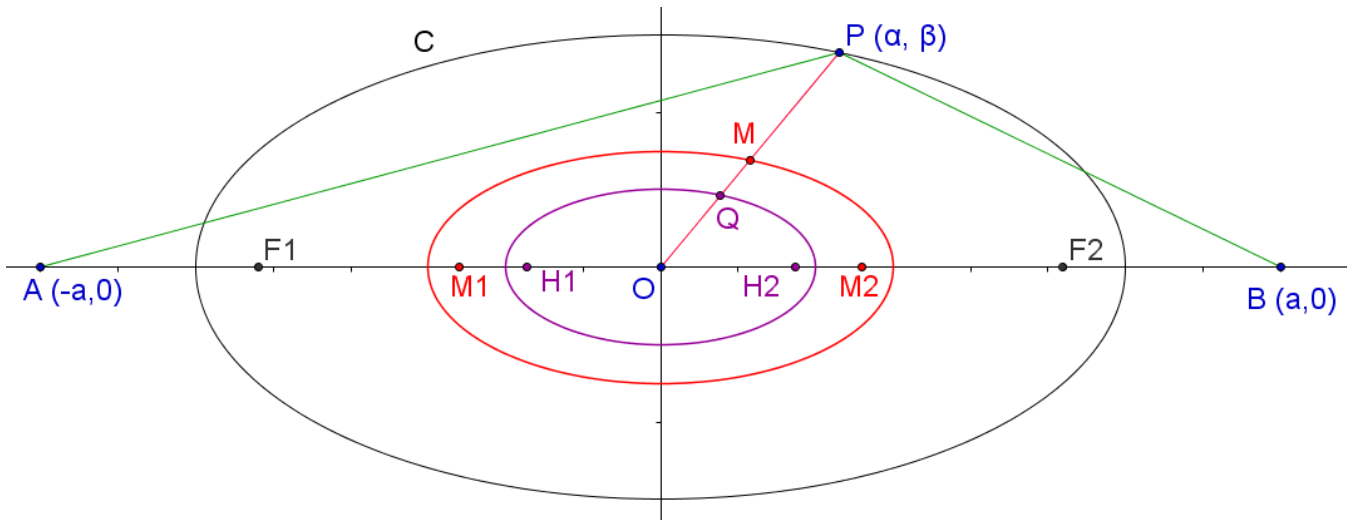
$b)$ Les foyers de l'ellipse C sont : $F_1(-3\sqrt{3},0)$ et $F_2(3\sqrt{3},0)$. $\to \boxed{\alpha=3\sqrt{3}}$

$c)$ Q est le centre de gravité du triangle $PAB,$ la question a donc été résolue au point $a)$

$d)$ Les coordonnées de M sont : $\begin{cases} x_M=\frac{\alpha}{2} \\ y_M=\pm\frac{1}{4}\sqrt{36-\alpha^2} \end{cases} \to \boxed{\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1}$

C'est une ellipse de centrée à l'origine, de demi grand axe $a=3,$ de demi petit axe $b=\frac{3}{2}$

et de foyers $M_1\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$ et $M_2\left(\frac{3\sqrt{3}}{2},0\right)$



Le 25 juin 2010

EXGAP134 – FACSA, ULiège, Liège, Juillet 2018.

Un segment de longueur constante se déplace dans le plan, de manière telle que ses estrémités A et B s'appuient sur les deux côtés d'un angle droit donné.

On demande

(a) de déterminer le lieu d'un point P quelconque du segment (en précisant la nature de ce lieu.

(b) de représenter graphiquement ce lieu lorsque P est le milieu du segment.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/

(a) On se place dans un repère orthonormé dont les axes correspondent aux côtés de l'angle droit donné. Dans ce repère, les points A et B possèdent les coordonnées $A : (\alpha, 0)$ et $B : (0, \beta)$, avec $\alpha, \beta \geq 0$. La longueur $|AB|$ étant constante, on peut choisir sans perte de généralité l'unité du repère égale à cette longueur, ce qui impose la contrainte $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

Cette contrainte permet d'exprimer β en fonction de α, et dès lors d'exprimer les coordonnées de A et de B en termes du seul paramètre α. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} &A : (\alpha, 0) \\ &B : (0, \sqrt{1 - \alpha^2}), \end{aligned}$$

avec $\alpha \in [0, 1]$.

Si P est un point donné du segment $[AB]$, alors ses coordonnées (x_P, y_P) satisfont l'équation paramétrique de la droite AB:

$$\begin{aligned}(x_P, y_P) &= (\alpha, 0) + \lambda\overrightarrow{AB} \\ &= (\alpha, 0) + \lambda\left((0, \sqrt{1-\alpha^2}) - (\alpha, 0)\right) \\ &= ((1-\lambda)\alpha,\ \lambda\sqrt{1-\alpha^2}),\end{aligned}$$

avec $\lambda \in [0, 1]$ constant.

Pour obtenir une équation cartésienne du lieu, il suffit alors d'éliminer le paramètre α du système

$$\begin{cases} x_P = (1-\lambda)\alpha \\ y_P = \lambda\sqrt{1-\alpha^2} \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases}$$

On obtient l'équation

$$\lambda^2 x_P^2 + (1-\lambda)^2 y_P^2 = \lambda^2(1-\lambda)^2,$$

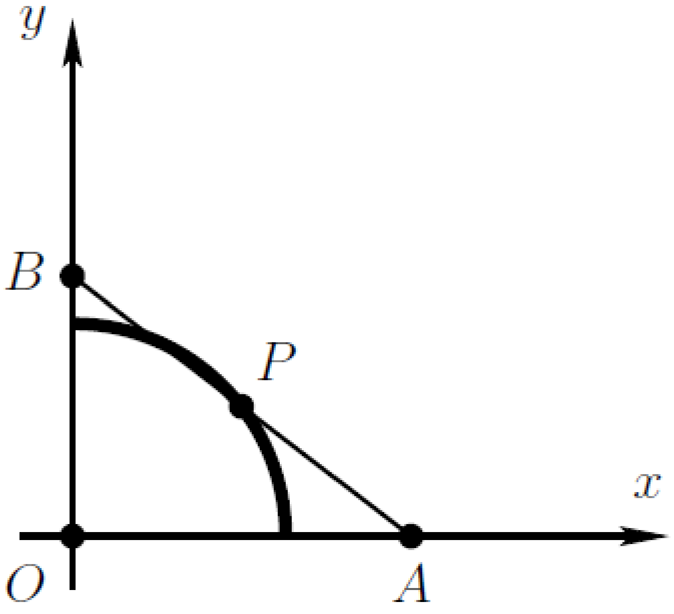
qui est celle d'une ellipse dont les axes sont parallèles à ceux du repère. (Cette ellipse dégénère en un segment de droite dans les cas particuliers $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.) Étant donné que les contraintes imposées à α et λ correspondent à $x_P \geq 0$ et $y_P \geq 0$, le lieu recherché est l'arc de cette ellipse limité au premier quadrant du repère.

(b) Il y a plusieurs façons de résoudre le problème pour ce cas particulier. Le plus simple consiste à poser $\lambda = \frac{1}{2}$ dans l'équation obtenue au point (a). Cette équation devient alors

$$x_P^2 + y_P^2 = \frac{1}{4},$$

qui montre que le lieu est l'arc du cercle de rayon $\frac{1}{2}$ centré sur l'origine O du repère correspondant au premier quadrant.

Il était également possible de résoudre le problème par la géométrie synthétique. Le triangle OAB étant rectangle en O, son hypoténuse $[AB]$ est un diamètre de son cercle circonscrit, ce qui entraîne $|OP| = |AP| = |BP| = \frac{1}{2}|AB|$. La longueur $|AB|$ étant constante, $|OP|$ l'est aussi, dont on déduit que P se déplace sur un arc de cercle de rayon $\frac{1}{2}|AB|$ centré en O.



Le 25 juin 2010

EXGAP135 – EPL , UCL, Louvain, juillet 2010 série 1.

Dans le plan xy, donnez l'abscisse cartésienne de la parabole dont l'axe de symétrie est parallèle à l'axe x, dont l'abscisse du sommet est $x=-1$, qui passe par l'origine o et qui, en o, est tangente à la droite d'équation $x=y$.

Solution proposée par Christophe Leclère

La parabole étant parallèle à l'axe des x, elle a pour équation: $x=ay^2+by+c$.
Comme elle passe par l'origine, on peut immédiatement déduire que : $c=0$.

Le sommet de la parabole se situe en $y=-\dfrac{b}{2a}$, où on trouve

$$x=\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}=-\frac{b^2}{4a}=-1 \text{ et donc et donc } a=\frac{b^2}{4}.$$

L'équation de la parabole peut donc se réécrire $x=\dfrac{b^2}{4}y^2+by$ ou encore $x=\left(\dfrac{b}{2}y+1\right)^2-1.$

Cette dernière version permet d'obtenir les équations de chacune des branches de la parabole :

$$\left(\frac{b}{2}y+1\right)^2=x+1\left(\text{pour}\geq-1\right)\quad\Rightarrow\quad\frac{b}{2}y=-1\pm\sqrt{x+1}\quad\Rightarrow\quad y=\frac{2}{b}\left(-1\pm\sqrt{x+1}\right)$$

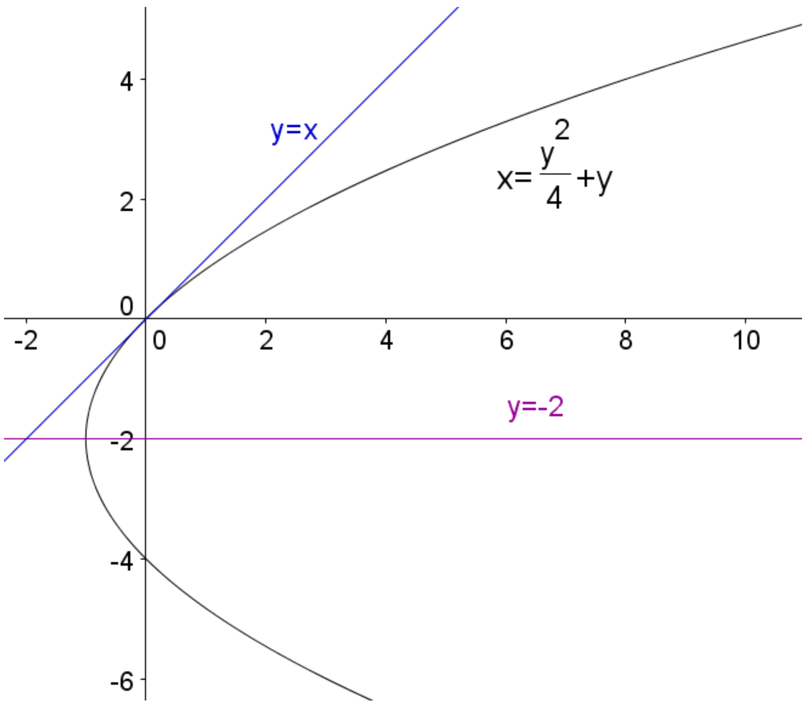
La branche qui passe par l'origine est $y=\dfrac{2}{b}\left(-1+\sqrt{x+1}\right)$.

En dérivant l'expression pour calculer le coefficient angulaire de la tangente, on obtient

$$y'(x)=\frac{2}{b}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}=\frac{1}{b\sqrt{x+1}}$$

Comme $y'(0)=1$, on trouve $b=1$.

Au final, l'équation de la parabole est donc : $\boxed{x=\dfrac{y^2}{4}+y}$



13 décembre 2010

EXGAP136 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010 série 2.

Les équations cartésiennes de deux paraboles sont données par $y = x^2$ et $y = (x-b)^2 + a$.
Trouvez b pour que les deux paraboles se croisent en formant un angle droit
(les tangentes aux paraboles au point d'intersection forment un angle droit), d'abord pour
$a = 0$ ensuite pour $a = 1$. Dans le deuxième cas, le résultat peut être présenté sous une forme
non simplifiée (quoique la plus simple possible)

<u>1er cas : $a = 0$</u>

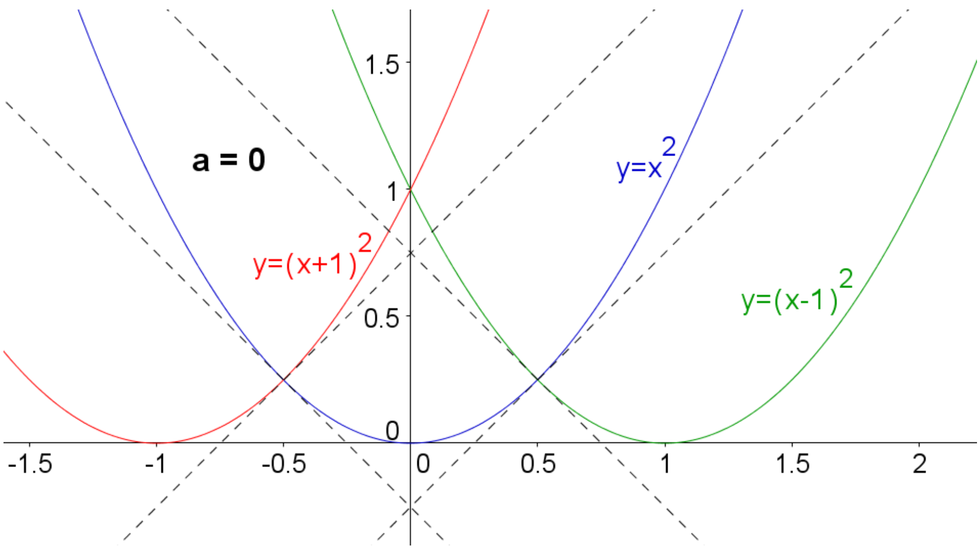
Soit α l'abscisse du point d'intersection des deux paraboles.

$$\rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = (x-b)^2 \end{cases} \rightarrow \alpha^2 = \alpha^2 - 2\alpha b + b^2 \rightarrow \alpha = \frac{b}{2}$$

En ce point, les tangentes sont perpendiculaires, donc $m_{t_1} = -\dfrac{1}{m_{t_2}}$

$$\rightarrow \begin{cases} y = x^2 \rightarrow y' = 2x \rightarrow m_{t_1} = 2\alpha = b \\ y = (x-b)^2 \rightarrow y' = 2(x-b) \rightarrow m_{t_2} = 2(\alpha - b) = 2\left(\dfrac{b}{2} - b\right) = -b \end{cases}$$

$\rightarrow b = -\dfrac{1}{b} \rightarrow b^2 = 1 \rightarrow \boxed{b = \pm 1}$. Il y a donc deux solutions



<u>2ème cas : $a=1$</u>

Soit α l'abscisse du point d'intersection des deux paraboles.

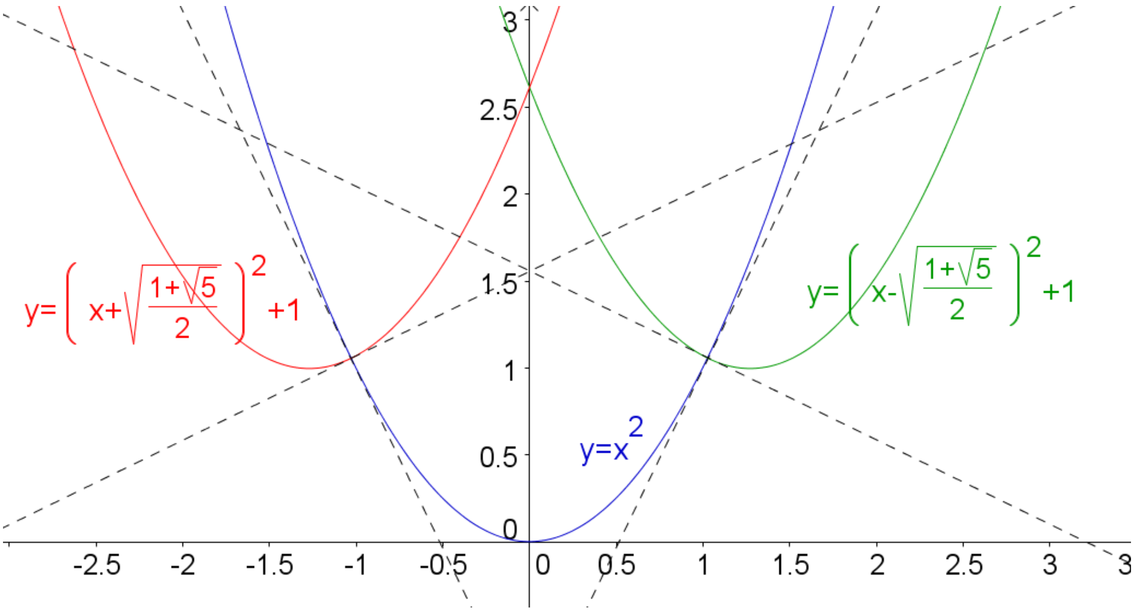
$$\rightarrow\begin{cases} y=x^2 \\ y=(x-b)^2+1 \end{cases}\rightarrow \alpha^2=\alpha^2-2\alpha b+b^2+1\rightarrow \alpha=\frac{b^2+1}{2b}$$

En ce point, les tangentes sont perpendiculaires, donc $m_{t_1}=-\dfrac{1}{m_{t_2}}$

$$\rightarrow\begin{cases} y=x^2 \rightarrow y'=2x \rightarrow m_{t_1}=\dfrac{b^2+1}{b} \\ y=(x-b)^2+1\rightarrow y'=2(x-b)\rightarrow m_{t_2}=2(\alpha-b)=2\left(\dfrac{b^2+1}{2b}-b\right)=\dfrac{1-b^2}{b} \end{cases}$$

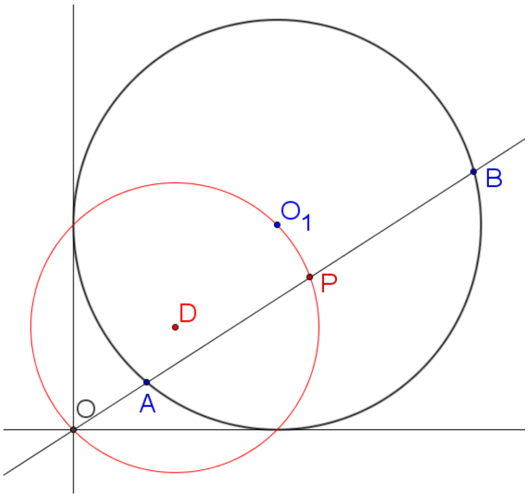
$\rightarrow \dfrac{b^2+1}{b}=-\dfrac{1}{\frac{1-b^2}{b}}\rightarrow b^4-b^2+1=0\rightarrow b^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (On rejete la solution négative)

$\rightarrow \boxed{b=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}}$. Il y a donc aussi deux solutions



EXGAP137 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2010 série 2.

Soit le cercle dont l'équation cartésienne est donnée par $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$.
On imagine une droite D passant par l'origine et ayant deux points d'intersection avec le cercle et l'on prend le point P situé au milieu de ces deux points (la position du point P dépendra bien-entendu de la pente α de D). Donnez l'équation cartésienne du lieu des points P qui répondent à la définition ci-dessus (α n'apparaît pas dans la réponse !).
A quelle forme géométrique précise ce lieu correspond-il ?



La droite a pour équation $D \equiv y=\alpha x$

Remplaçons y par cette valeur dans l'équation du cercle :

$$(x-R)^2+(\alpha x-R)^2=R^2 \to (1+\alpha^2)x^2-2R(1+\alpha)x+R^2=0$$

Pour une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$, le milieu des solutions est donné par $-\dfrac{b}{2a}$

L'abscisse du point P est alors : $x=\dfrac{R(1+\alpha)}{(1+\alpha^2)}$ or $\alpha=\dfrac{y}{x}$

$$\to x=\frac{R\left(1+\frac{y}{x}\right)}{\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)} \to x\frac{x^2+y^2}{x^2}=R\frac{x+y}{x} \to x^2+y^2-Rx-Ry=0$$

$$\to x^2-Rx+\frac{R^2}{4}+y^2-Ry+\frac{R^2}{4}=\frac{R^2}{2} \to \boxed{\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+\left(y-\frac{R}{2}\right)^2=\frac{R^2}{2}}$$

Le lieu est donc un cercle de centre $\left(\dfrac{R}{2},\dfrac{R}{2}\right)$, de rayon $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$, qui passe par l'origine et limité aux points de tangence $(R,\ 0)$ et $(0,\ R)$.

Solution proposée par Nicole Berckmans

Il suffit de remarquer que comme P est le milieu de la corde $AB,$ alors l'angle O_1PO est un angle droit et donc OO_1 est un diamètre.

Le lieu est donc un cercle de centre $\left(\frac{R}{2},\frac{R}{2}\right)$, de rayon $\frac{R\sqrt{2}}{2}$, qui passe par l'origine et limité aux points de tangence $(R,\ 0)$ et $(0,\ R)$.

---

15 août 2010. (Modifié le 30 janvier 2011 Nicole Berckmans)

EXGAP138 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2010.

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O, et on considère les points P d'abscisse 1, Q d'ordonnée 1 tels que les droites OP et OQ soient perpendiculaires.
Déterminer le lieu de la projection orthogonale M de l'origine O sur la droite PQ

Solution proposée par David Hamoir

Soient les coordonnées de $P:(1,\alpha)$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Equation de la droite } OP \equiv y=\alpha x \\ \text{Equation de la droite } OQ \equiv -\dfrac{1}{\alpha}x\end{array}\right\} \rightarrow \text{Coordonnées de } Q=(-\alpha,1)$$

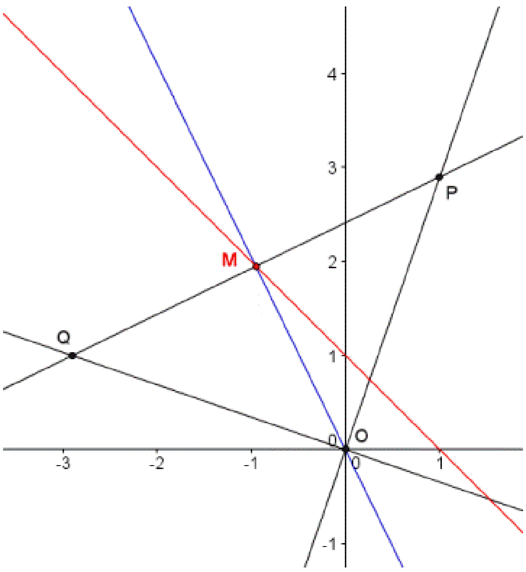
Nous en déduisons l'équation de la $PQ \equiv y=\dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}x+\dfrac{\alpha^2+1}{\alpha+1}$.

Et l'équation de la perpendiculaire à PQ passant par l'origine : $y=-\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1}x$

Les coordonnées de M, intersection de la droite PQ et de la perpendiculaire :

$$M=\begin{cases} x=\dfrac{1-\alpha}{2} \\ y=\dfrac{1+\alpha}{2}\end{cases}$$

L'équation du lieu de M s'obtient en éliminant α : $\boxed{y=-x+1}$



---

21 septembre 2010

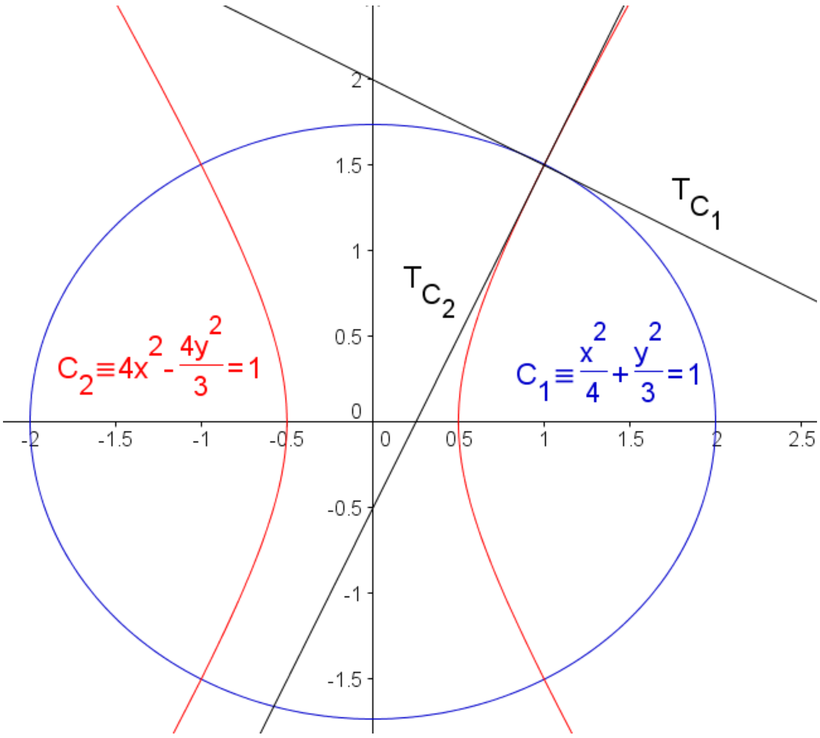
EXGAP139 – EPL, UCL, Louvain, Septembre 09.

Dans le plan XY, soient les points P_1 et P_2 de coordonnées respectives $(-1,0)$ et $(1,0)$.
Soit C_1 le lieu des points dont la somme des distances à P_1 et P_2 est 4.
Soit C_2 le lieu des points dont la différence à P_1 et P_2 est ± 1.
Avec quel angle ces deux lieux se coupent-ils? Justifiez votre réponse en détail.

Indications :

1) Déterminez à quels types de courbes C_1 et C_2 appartiennent.
2) Donnez les équations cartésiennes de C_1 et C_2.
3) L'angle avec lequel deux courbes se coupent est l'angle que forment leurs tangentes au point d'intersection des courbes.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$1-2)$ C_1 est une ellipse : $2a=4;\ \ 2c=2;\ \ b^2=a^2-c^2=3 \qquad \Rightarrow C_1 \equiv \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \qquad (1)$

C_2 est une hyperbole : $2a=1;\ \ 2c=2;\ \ b^2=c^2-a^2=\dfrac{3}{4} \Rightarrow C_2 \equiv 4x^2-\dfrac{4y^2}{3}=1 \qquad (2)$

3) $C_1 \cap C_2 = \left\{\left(1,\dfrac{3}{2}\right);\left(1,-\dfrac{3}{2}\right);\left(-1,\dfrac{3}{2}\right);\left(-1,-\dfrac{3}{2}\right)\right\}$

Cherchons les coefficients angulaires des tangentes en $\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$

Utilisons les dérivées :

$$(1) \rightarrow \frac{2x}{4}+\frac{2yy'}{3}=0 \Rightarrow y'=-\frac{3x}{4y}=-\frac{3\times 1}{4\times\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2}$$

$$(2) \rightarrow 8x-\frac{8yy'}{3}=0 \Rightarrow y'=\frac{3x}{y}=\frac{3\times 1}{\frac{3}{2}}=2$$

Les deux tangentes sont perpendiculaires.

Il en est de même aux autres points d'intersection.