Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 14

EXGAP140 – EXGAP149

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans

Avril 2011

EXGAP140 – ERM, 2004, série 4.

On considère deux tangentes différentes t_1 et t_2 à la parabole d'équation : $y^2 = 2ax,\ a \in \mathbb{R}$.
On demande de démontrer que l'ordonnée du point d'intersection entre t_1 et t_2 est la moyenne arithmétique des ordonnées des points tangents.

Nous résoudrons le cas où les deux points de tangences ont une ordonnée positive.
Le lecteur est prié de faire les autres cas.

La pente en un point d'absisse x est donné par : $y' = \left(\sqrt{2ax}\right)' = \dfrac{a}{\sqrt{2ax}} = \dfrac{a}{y}$

Soit les deux points de tangences : $\begin{cases} T_1 = (x_1, y_1) = \left(\dfrac{y_1^2}{2a}, y_1\right) \\ T_2 = (x_2, y_2) = \left(\dfrac{y_2^2}{2a}, y_2\right) \end{cases}$

Les deux tangentes ont pour équations : $\begin{cases} t_1 \equiv y - y_1 = \dfrac{a}{y_1}\left(x - \dfrac{y_1^2}{2a}\right) \\ t_2 \equiv y - y_2 = \dfrac{a}{y_2}\left(x - \dfrac{y_2^2}{2a}\right) \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{y_1}x - y = -\dfrac{y_1}{2} \\ \dfrac{a}{y_2}x - y = -\dfrac{y_2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2ax - 2y_1 y = -y_1^2 & (1) \\ 2ax - 2y_2 y = -y_2^2 & (2) \end{cases}$$

On obtient l'ordonnée du point d'intersection des tangentes en faisant $(1) - (2)$

$$-2(y_1 - y_2)y = -\left(y_1^2 - y_2^2\right) \Rightarrow \boxed{y = \frac{y_1 + y_2}{2}}$$

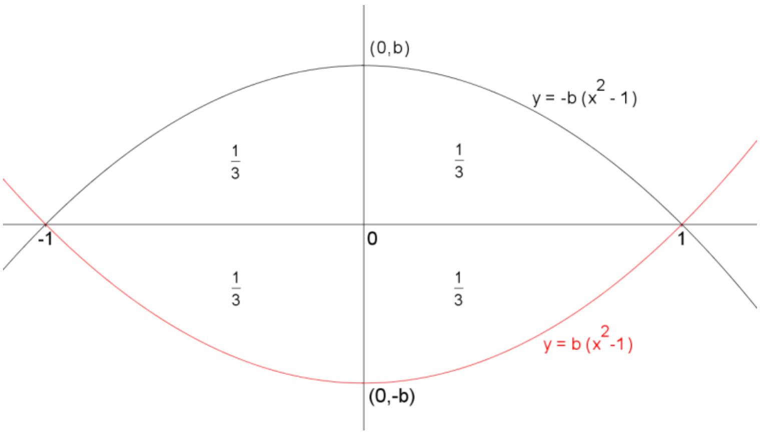
---

22 avril 2011

EXGAP141 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 1.

Dans le système de coordonnées cartésien XY, on considère une parabole $\mathcal{A}$ d'axe Y passant par le point $(x,y)=(0,-b)$ avec $b>0$ et une autre parabole $\mathcal{B}$, qui est l'image de $\mathcal{A}$ par une symétrie orthogonale d'axe X. Les paraboles se coupent. La distance entre les deux points d'intersection est de 2 unités. La surface du domaine d'intersection (le domaine en forme d'oeil entre les paraboles) est de 4/3 d'unités carrées.
Donnez les équations catésiennes des deux paraboles.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$\int_0^1 -b\left(x^2-1\right)dx=-b\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1=-b\left(\frac{1}{3}-1\right)=\frac{2b}{3}$$ qui doit être égal à $\frac{1}{3}$.

Donc : $b=\frac{1}{2}$

Les équations des deux paraboles sont alors

$$\mathcal{A}\equiv y=\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)$$

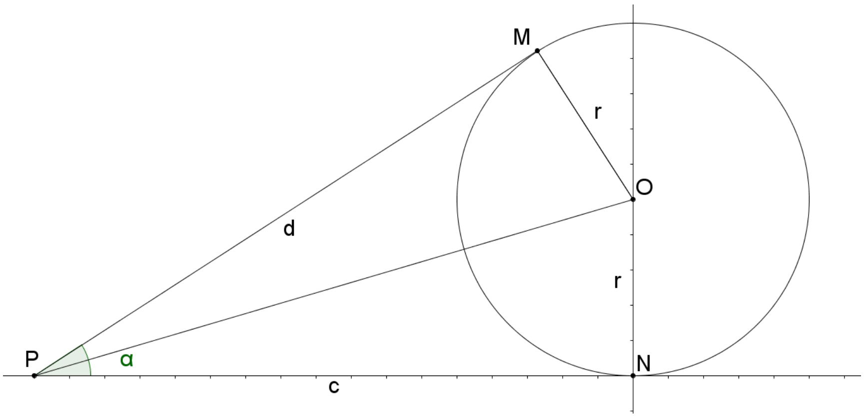
$$\mathcal{B}\equiv y=-\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)$$

Le 12 octobre 2011

EXGAP142 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2011, série 1.

Une planche est posée sur une roue de rayon r et a une extrémité en contact avec le sol.
Entre les points de contact et de la planche avec le sol, il y a une distance d.
Quelle est la pente de la droite formée par la planche?
NB : si vous utilizez une "formule toute faite" concernant les droites tangentes aux cercles, fournissez sa preuve à partir des équations cartésiennes de la droite et du cercle.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$$\text{Pente} = \tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2rd}{d^2-r^2} \quad \text{car } \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{d}$$

Par les équations : $P(-d,0) \qquad O(0,r)$

$PM \equiv y = m(x+d)$ droite passant par les points $P(-d,0)$ et de pente m.

Distance de $O(0,r)$ à la droite $PM = d$

$$\frac{|md-r|}{\sqrt{m^2+1}} = r \Rightarrow (md-r)^2 = r^2(m^2+1)$$

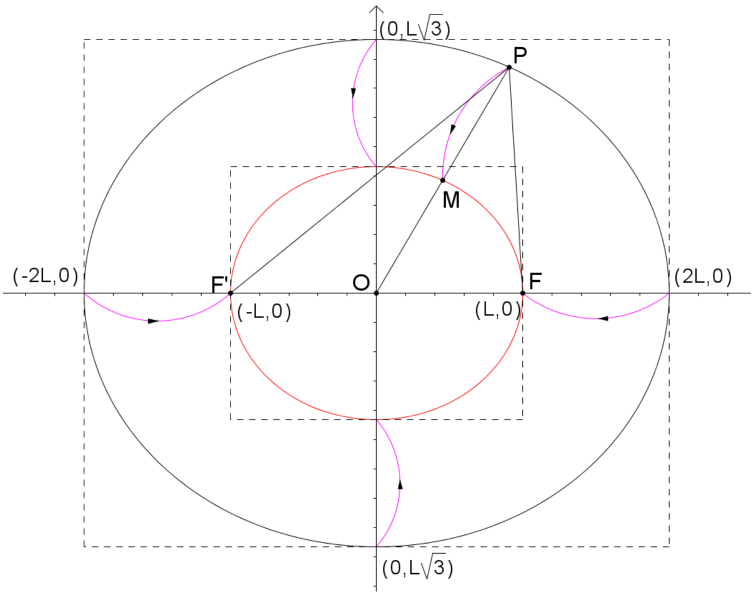
$$\Rightarrow m^2d^2 - 2mdr - m^2r^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \equiv PN \\ \boxed{m = \dfrac{2dr}{d^2-r^2}} \end{cases}$$

Le 22 septembre 2011

EXGAP143 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011, série 2.

On suppose un système de coordonnées XY. Une corde de longueur $4L$ est attachée entre deux points situés en $(x,y)=(-L,0)$ et $(x,y)=(L,0)$.
Une petite poulie mobile est placée contre la corde, et tend celle-ci au maximum.
On fait rouler la poulie le long de la corde toujours tendue au maximum.
Donnez l'équation cartésienne du lieu des points milieu entre le point $(x,y)=(0,0)$ et le centre de la poulie.

Solution proposée par Nicole Berckmans



Soit P : la poulie.

$F(L,0)$ $\quad$ $F'(-L,0)$ $\quad$ Longueur de la corde $=4L=2a$

Ellipse $\equiv \dfrac{x^2}{4L^2}+\dfrac{y^2}{3L^2}=1$ $\quad$ car $c=L$ et $b^2=a^2-c^2$

Soit H = homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{2}$.

$H(P)=M=\dfrac{1}{2}P$ $\quad$ si $P(\alpha,\beta)$ alors $M\left(\dfrac{\alpha}{2},\dfrac{\beta}{2}\right)$

Or l'image d'une ellipse est une ellipse :

Si $P\in$ ellipse alors $\dfrac{\alpha^2}{4L^2}+\dfrac{\beta^2}{3L^2}=1$

Donc : $\dfrac{\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^2}{L^2}+\dfrac{\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^2}{\dfrac{3L^2}{4}}=1$ et M vérifie l'équation : $\boxed{\dfrac{x^2}{L^2}+\dfrac{y^2}{\dfrac{3L^2}{4}}=1}$

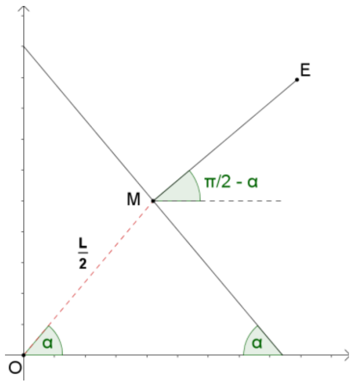
Le 25 septembre 2011

EXGAP144 – EPL, UCL, Louvain, Juillet 2011, série 2

Une échelle A de longueur L est disposée parallèlement à un mur. A mi-hauteur, une échelle B de longueur $L/2$ est connectée perpendiculairement à l'échelle A (voir dessin). On fait glisser l'échelle A le long du mur (l'extrémité en contact avec le mur descend, l'autre glisse au sol en s'écartant du mur).

Quel est le lieu géométrique de l'extrémité de l'échelle B (extrémité non en contact avec l'échelle A) ?

Exprimez vos résultats dans un système de coordonnées cartésien XY, où X et Y correspondent au sol et au mur, respectivement.



$\overrightarrow{OM} = \frac{L}{2}(\cos\alpha, \sin\alpha)$ $\qquad$ $\overrightarrow{ME} = \frac{L}{2}(\sin\alpha, \cos\alpha)$

$\overrightarrow{OE} = \frac{L}{2}(\cos\alpha + \sin\alpha, \sin\alpha + \cos\alpha)$ car $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ME}$

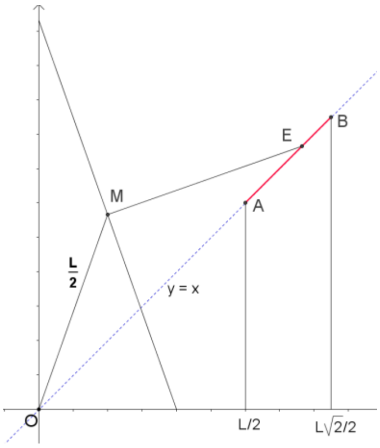
Dès lors le point E appartient à la droite $y = x$

Etudions la variation de $f(\alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha$ pour $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$\frac{df}{d\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha = 0$ en $\alpha = \frac{\pi}{4}$

α	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\frac{df}{d\alpha}$		$+$	0	$-$	
$f(\alpha)$		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}.2$	$\searrow$	

Le lieu est donc le segment de droite AB



Le 25 juin 2010

EXGAP145 – EPL , UCL, Louvain, septembre 2011.

L'on cherche l'équation cartésienne du lieu des sommets des paraboles d'axe parallèle à X, passant par $(x, y) = (0,1)$ et tangentes à la droite d'équation $y = -x$.
Ce lieu ne correspond pas nécessairement à une figure géométrique connue.
Le résultat peut se donner sous la forme $a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 x^2 + a_4 y^2 + a_5 xy = 0$.
Donner les valeurs des six constantes a_i sous forme d'une petite table.

NB1: il est clair que toutes ces valeurs peuvent être multipliées par un facteur commun.
NB2: tous les points du lieu satisfont cette équation cartésienne mais tous les points satisfaisant cette équation n'appartiennent pas nécessairement à ce lieu.

Solution proposée par Nicole Berckmans

Soit le sommet $S = (S_1, S_2)$

L'équation générale de la parabole : $P \equiv (y - S_2)^2 = K(x - S_1)$

- $(0,1) \in P$ ssi $(1 - S_2)^2 = -KS_1 \qquad (1)$
- La droite $y = -x$ coupe la parabole en un point double.

  $P \cap (y = -x) \Rightarrow (-x - S_2)^2 = K(x - S_1)$

  $\Leftrightarrow x^2 + 2(2S_2 - K)x + S_2^2 + KS_1 = 0$

  Cette équation possède 1 et 1 seule racine.

  Donc $\Delta = (2S_2 - K)^2 - 4(S_2^2 + KS_1) = 0 \Rightarrow K = 4(S_1 + S_2) \quad (2)$
- Eliminons K entre (1) et (2); on obtient

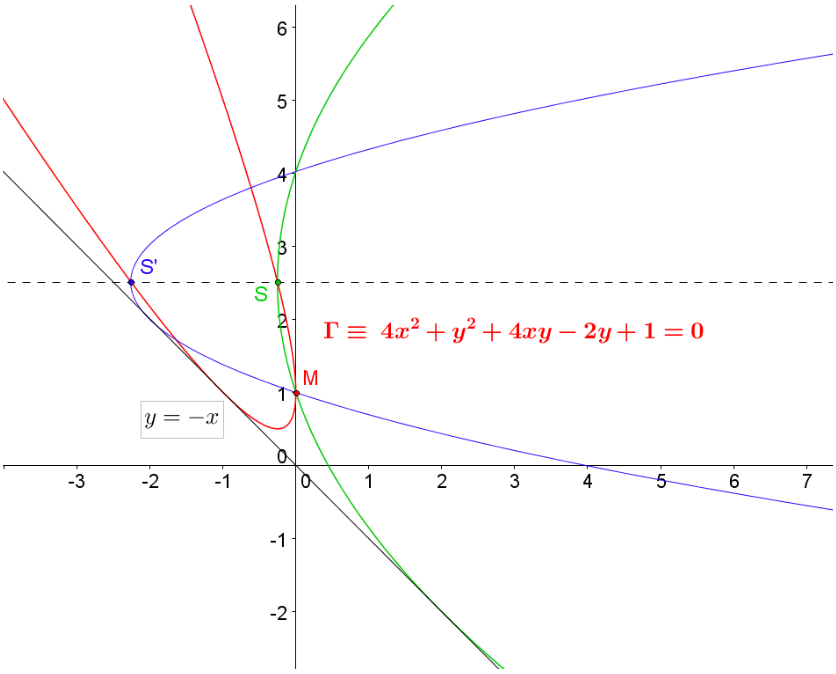
  $(1 - S_2)^2 = -4(S_1 + S_2)S_1$
- On en déduit que (S_1, S_2) vérifie l'équation

  $(1 - y)^2 = -4(x + y)x$ C'est l'équation du lieu.

  C'est-à-dire $\Gamma \equiv 4x^2 + y^2 + 4xy - 2y + 1 = 0$

  $\Rightarrow a_0 = 1;\ a_1 = 0;\ a_2 = -2;\ a_3 = 4;\ a_4 = 1;\ a_5 = 4$

Note : On peut montrer que pour une valeur donnée de S_2, il existe deux paraboles répondant aux conditions demandées. (Voir graphique)



12 janvier 2012.

EXGAP146 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2011.

On se place dans un repère orthonormé. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère le cercle C_λ de centre $(\lambda, 0)$ tangent à l'axe Y et le cercle Γ_λ de centre (λ, λ) tangent à l'axe X.
Démontrer que le lieu des points de C_λ et Γ_λ est une union de deux droites, et donner les équations cartésiennes de celles-ci.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Le point de coordonnées (x, y) appartient au lieu si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} (x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 \\ (x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2 \\ \lambda(\lambda - 2y) = 0, \end{cases} \qquad (*)$$

la deuxième équation du dernier système s'obtenant en retranchant la première équation de la deuxième dans le premier système. Il reste donc à éliminer le paramètre λ.

Supposons avoir λ, x, y vérifiant le système. Si $\lambda = 0$, alors $x = y = 0$. Sinon, $\lambda = 2y$ et la première équation donne

$$\begin{aligned} (x-2y)^2 + y^2 = 4y^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-2y)^2 = 3y^2 \\ &\Leftrightarrow \quad x - 2y = \sqrt{3}y \text{ ou } x - 2y = -\sqrt{3}y \end{aligned}$$

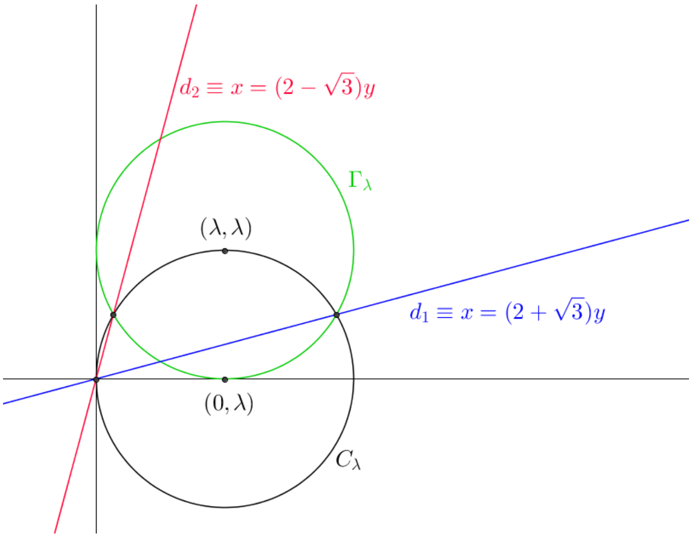
Comme $(0,0)$ vérifie aussi ces équations, on conclut donc qu'un point du lieu est nécessairement sur l'une des droites d_1 ou d_2 d'équation cartésienne

$$d_1 \equiv x = (2+\sqrt{3})y \quad d_2 \equiv x = (2-\sqrt{3})y.$$

Réciproquement, si x, y sont les coordonnées cartésiennes d'un point de d_1 ou d_2, alors $(x-2y)^2 = 3y^2$ ou encore

$$(x-2y)^2 + y^2 = 4y^2.$$

En posant $\lambda = 2y$, on obtient que λ, x, y vérifient le système (*), donc que (x, y) sont bien les coordonnées cartésiennes d'un point du lieu.



20 juillet 2010

EXGAP147 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2011.

On se place dans un repère orthonormé du plan et on donne les points $A(-a,0)$ et $B(a,0)$ $(\text{avec } a>0)$. On considère un cercle $\mathscr{C}$ variable passant par A et B. On demande de déterminer le lieu des points de $\mathscr{C}$ en lesquels la tangente à $\mathscr{C}$ est parallèle à l'axe des ordonnées $(\text{c'est-à-dire, l'axe } Y)$

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
http://www.facsa.ulg.ac.be/cms/index.php?page=questions-des-sessions-precedentes

Le centre d'un cercle passant par deux points donnés est situé sur la médiatrice du segment joignant les deux points (car le triangle formé par les deux points et le centre est isocèle). Il s'ensuit que le cercle $\mathcal{C}$ décrit dans l'énoncé a pour équation cartésienne

$$x^2 + (y-\lambda)^2 = a^2 + \lambda^2,$$

où λ est un paramètre réel.

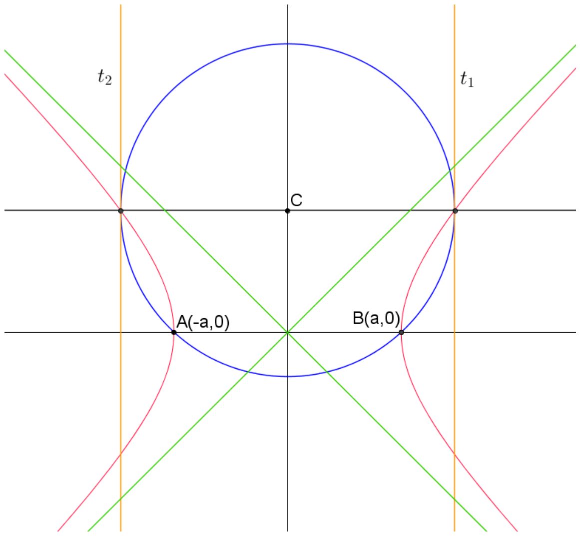
Cela étant, un point P appartient au lieu si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que les coordonnées cartésiennes (x, y) de P vérifient

$$\begin{cases} x^2 = a^2 + \lambda^2 \\ y = \lambda. \end{cases}$$

L'élimination de λ conduit alors au fait qu'un point P appartient au lieu si et seulement si ses coordonnées cartésiennes vérifient l'équation

$$x^2 - y^2 = a^2,$$

qui est celle d'une hyperbole équilatère centrée à l'origine.



20 avril 2012

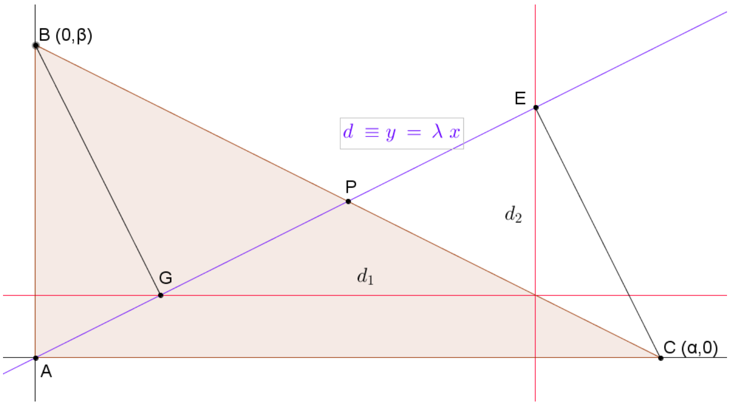
EXGAP148 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2011.
FACSA, ULG, Liège, septembre 2012.

On donne le triangle ABC rectangle en A et une droite d qui passe par A.
On appelle G la projection orthogonale B sur d et E celle de C sur d.
On donne également la parallèle d_1 à AC menée par G et la parallèle d_2 à AB menée par E.

a) Démontrer que les droites d_1, d_2 et BC sont concourantes.

b) Déterminer le lieu géométrique du point de d_1 et de d_2 lorsque d varie

---



Soit $d \equiv y = \lambda x$ et donc de coefficient directeur $\overrightarrow{v_d} = (1,\lambda)$.

Le vecteur unitaire sur d est donc : $\overrightarrow{1_d} = \dfrac{(1,\lambda)}{\sqrt{1+\lambda^2}}$

On a alors :

$$\overrightarrow{AE} = \left(\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{1_d}\right).\overrightarrow{1_d} = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\lambda^2}}(1,\lambda) \Rightarrow d_2 \equiv x = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\overrightarrow{AG} = \left(\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{1_d}\right).\overrightarrow{1_d} = \frac{\beta\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}(1,\lambda) \Rightarrow d_1 \equiv y = \frac{\beta\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

On vérifie alors facilement que BC, d_1 et d_2 sont concourantes.

$$\text{En effet : } \begin{cases} BC \equiv \dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} = 1 & (1) \\ d_1 \equiv y = \dfrac{\beta\lambda^2}{\sqrt{1+\lambda^2}} & (2) \\ d_2 \equiv x = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\lambda^2}} & (3) \end{cases}$$

On remplace dans $(1) \Rightarrow \dfrac{\alpha}{\alpha\sqrt{1+\lambda^2}} + \dfrac{\beta\lambda^2}{\beta\sqrt{1+\lambda^2}} = 1$

Il ressort immédiatement de ce qui précède que le lieu $d_1 \cap d_2$ est le segment BC

Résolution proposée par Dominique Duez

$d \equiv y = ax \; ou \; x = \frac{y}{a}$

$BG \equiv y = -\frac{1}{a}x + b, CE \equiv y = -\frac{1}{a}x + \frac{c}{a}$

$BC \equiv y = -\frac{b}{c}x + b$

$P = (x_E, y_G)$

$G = BG \cap d \rightarrow -\frac{1}{a}\frac{y}{a} + b = y \rightarrow y_G = \frac{ba^2}{a^2+1}$

$E = CE \cap d \rightarrow -\frac{1}{a}x + \frac{c}{a} = ax \rightarrow x_E = \frac{c}{a^2+1}$

Vérifions si P satisfait l'équation de BC :

$\frac{ba^2}{a^2+1} = -\frac{b}{c}\frac{c}{a^2+1} + b = -\frac{b}{a^2+1} + b$

$ba^2 = -b + b(a^2+1) = ba^2$

<u>Alternative</u> :

Calculons l'équation des deux droites génératrices de P d1 et d2 en fonction du paramètre a:

$d_1 \equiv y = y_G = \frac{ba^2}{a^2+1} \rightarrow a^2 = \frac{-y}{y-b}$

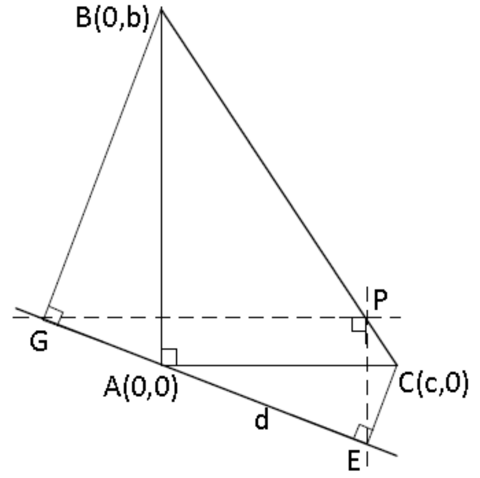
$d_2 \equiv x = x_E = \frac{c}{a^2+1} \rightarrow a^2 = \frac{c-x}{x}$

Le lieu des points P est donné par l'équation

$\frac{-y}{y-b} = \frac{c-x}{x} \; ou \; -xy = (y-b)(c-x) ou \; y = -\frac{b}{c}x + b$

Ce qui est l'équation de la droite BC.

Il faut toutefois restreindre le lieu du point P au segment BC car les angles droits $B\hat{G}A$ (respectivement $C\hat{E}A$) montrent que le lieu du point G (resp. E) est un cercle de diamètre BA (resp. CA). L'intersection des parallèles de ces deux lieux est compris dans le périmètre ABCD, D=(c,b)



Le 5 juillet 2012.

EXGAP149 – EPL, UCL, LLN, juillet 2012 série 1.

Soit une ellipse dont le grand axe est deux fois plus long que le petit axe. Cette ellipse est décrite dans la plan XY, son grand axe se trouve sur l'axe Y avec y positif et elle passe par l'origine. Un cercle se trouve à l'intérieur de l'ellipse et il épouse l'ellipse à l'origine.
Cela ceut dire que si, dans le vosinage de $(x, y) = (0,0)$, les deux figures sont représentées par les fonctions $y = f(x)$, leurs dérivées premières et secondes sont identiques en $x = 0$.

a) Faites un dessin approximatif de l'ellipse et du cercle.

b) Quel est le rapport entre le diamètre du cercle et le grand axe de l'ellipse?

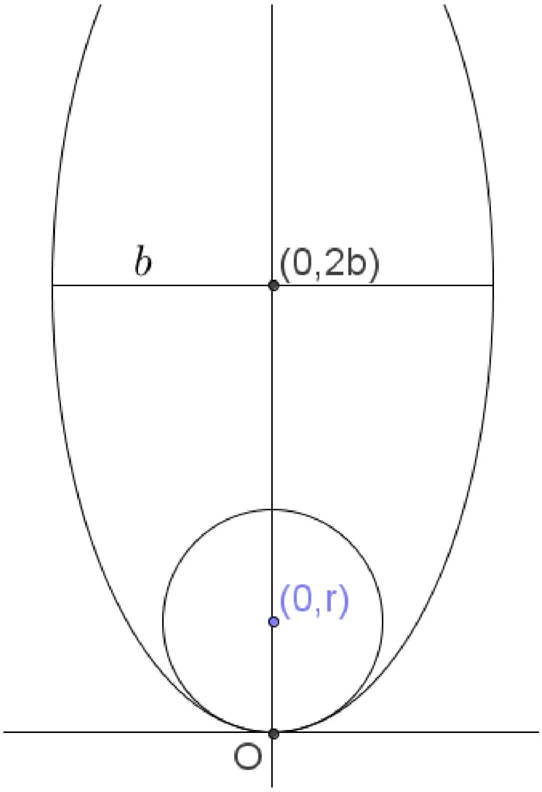
Attention : ne pas confondre rayon et diamètre, grand axe et demi grand axe.

Solution proposée par Nicole Berckmans

Ellipse	Cercle
$\frac{x^2}{b^2}+\frac{(y-2b)^2}{4b^2}=1$	$x^2+(y-r)^2=r^2$
$y=2b-2\sqrt{b^2-x^2}$	$y=r-\sqrt{r^2-x^2}$
$\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{\sqrt{b^2-x^2}}$	$\frac{dy}{dx}=\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}$
s'annule en $x=0$	s'annule en $x=0$
$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2b^2}{(b^2-x^2)\sqrt{b^2-x^2}}$	$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{r^2}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-x^2}}$
$y''(0)=\frac{2}{b}$	$y''=\frac{1}{r}$

$$\boxed{\frac{2}{b}=\frac{1}{r}}$$

$$\boxed{\frac{\text{diamètre du cercle}}{\text{grand axe de l'ellipse}}=\frac{2r}{4b}=\frac{1}{4}}$$



Le 11 juillet 2012.