Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 18

EXGAP190 – EXGAP199

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Octobre 2017

EXGAP190 – POLYTECH, UMons, Mons, juillet 2017.

Soit la parabole de sommet $S(0,-2)$ et de foyer $F(0,-1)$.

1) Exprimer l'équation de la parabole.

2) Calculer la valeur de l'angle α entre les deux tangentes à la parabole passant par le point A de coordonnées $(-5,0)$

Solution proposée par Fabienne Zoetard

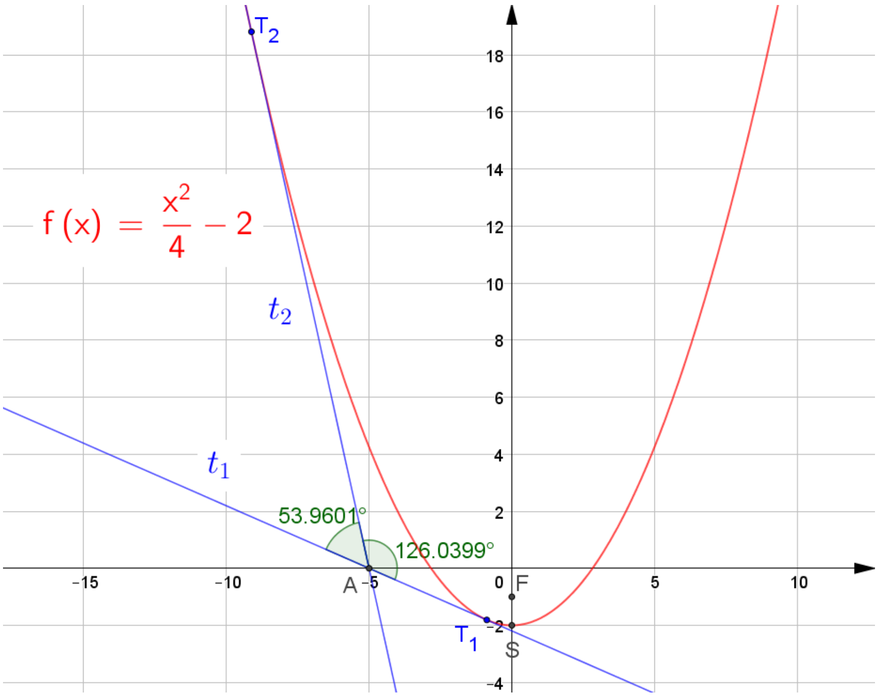


Figure 1

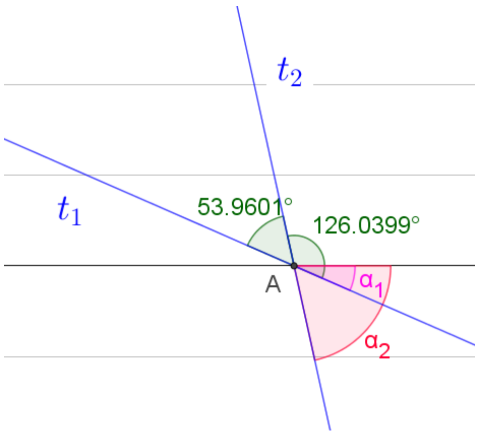


Figure 2

1) L'équation réduite d'une parabole d'axe Oy et de sommet $(0,0)$ est $y=\dfrac{x^2}{2p}$ où p est le double de la distance entre le foyer et le sommet. ici $p=2 \Rightarrow y=\dfrac{x^2}{4}$. Il reste à faire une translation vers le bas de 2, ce qui donne l'équation de la parabole : $\mathscr{P} \equiv y=\dfrac{1}{4}x^2-2$.

2) Si $T(a,b)$ est un point de tangence alors l'équation de la tangente est

$$t \equiv y-b=y'(a)(x-a) \Rightarrow y-b=\frac{1}{2}a(x-a)$$

Pour déterminer a et b, il suffit d'exprimer que $T \in \mathscr{P}$ et que $A \in t$

$$\begin{cases} T \in \mathscr{P} \Rightarrow b=\dfrac{1}{4}a^2-2 \\ A \in t \Rightarrow 0-b=\dfrac{1}{2}a(-5-a) \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{4}a^2-2=\frac{1}{2}a(5+a) \Rightarrow a^2+10a+8=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=-5-\sqrt{17} \simeq -9.1231 \Rightarrow b=\dfrac{17-5\sqrt{17}}{2} \simeq -18.8077 \\ a=-5+\sqrt{17} \simeq -0.8769 \Rightarrow b=\dfrac{17-5\sqrt{17}}{2} \simeq -1.8078 \end{cases}$$

- $\left(-5+\sqrt{17},\dfrac{17+5\sqrt{17}}{2}\right)$ détermine la tangente t_1 de pente $m_1=\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2} \simeq -0.4384$
  et d'équation $t_1 \equiv -0.4384x-2.1922$
- $\left(-5-\sqrt{17},\dfrac{17-5\sqrt{17}}{2}\right)$ détermine la tangente t_2 de pente $m_2=\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2} \simeq -4.5616$
  et d'équation $t_2 \equiv -4.5616x-22.8078$

Pour déterminer l'angle entre les deux tangentes, on peut appliquer trois méthodes.

<u>Méthode 1</u>

$$\tan\alpha=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|=\left|\frac{\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}-\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}}{1+\dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}\times\dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}}\right|=\frac{\sqrt{17}}{3} \Rightarrow \alpha=53.9601^\circ \text{ ou } 126.0399^\circ$$

si on considère l'angle aigu.

<u>Méthode 2</u>

On utilise les pentes ce qui détermine des angles qu'il faut combiner de façon judicieuse (voir figure 2)

$$\begin{cases} m_1=-0.4384 \Rightarrow \alpha_1=-23.6749^\circ \\ m_2=-4.5616 \Rightarrow \alpha_2=-77.6350^\circ \end{cases} \Rightarrow \alpha=\alpha_1-\alpha_2=-23.6749^\circ+77.6350^\circ=53.9601^\circ$$

<u>Méthode 3</u>

On calcule l'angle entre les deux vecteurs $\overrightarrow{(1,m_1)}$ et $\overrightarrow{(1,m_2)}$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{(1,m_1)}\bullet\overrightarrow{(1,m_2)}}{\left\|\overrightarrow{(1,m_1)}\right\|\times\left\|\overrightarrow{(1,m_2)}\right\|}=\frac{1+(-0.4384)\times(-4.5616)}{\sqrt{1+0.4384^2}\times\sqrt{1+4.5616}}=0.5883 \Rightarrow \alpha=53.9601^\circ$$

EXGAP191 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2017

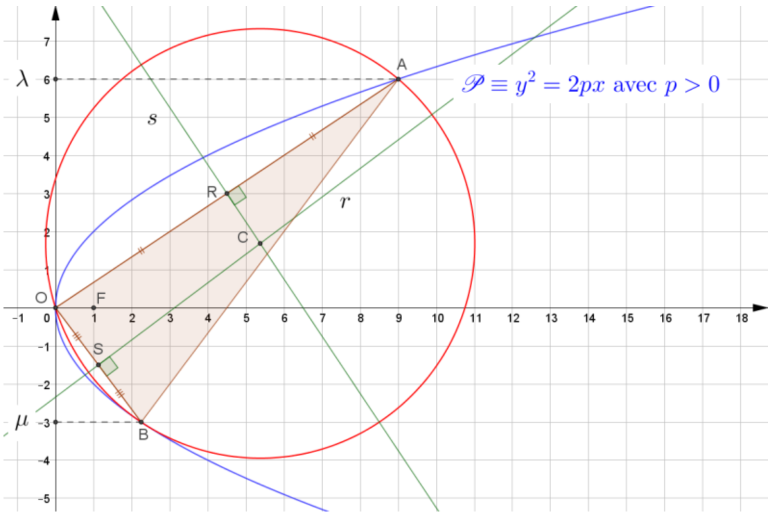
Dans le plan euclidien rapporté au systèmes d'axes orthonormés Oxy, on considère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y^2 = 2px$, avec $p > 0$, et des points variables A et B de cette parabole, tels que l'ordonnée de A est $\lambda \in \mathbb{R}^+$ et celle de B est $\mu \in \mathbb{R}^-$.

(a) Déterminez, en fonction des paramètres λ et μ, les coordonnées du centre C du cercle circonscrit au triangle OAB.

(b) Déterminez la relation que doivent vérifier λ et μ pour que la droite AB passe par le foyer F de $\mathscr{P}$

(c) En utilisant $\alpha = \lambda + \mu$ comme paramètre, établissez des équations paramètriques du lieu parcouru par C lorsque A et B se déplacent sur $\mathscr{P}$ de sorte que la droite AB passe par F.

(d) Donnez une équation cartésienne de la nature de ce lieu.



(a) En fonction de λ et μ, les coordonnées de A et B ainsi que de R, milieu de OA, et S, milieu de OB sont :

$$A\left(\frac{\lambda^2}{2p},\lambda\right) \quad B\left(\frac{\mu^2}{2p},\mu\right) \quad R\left(\frac{\lambda^2}{4p},\lambda\right) \quad S\left(\frac{\mu^2}{4p},\mu\right)$$

La pente de OA et de sa médiatrice r sont : $m_{OA}=\dfrac{\lambda}{\dfrac{\lambda^2}{2p}}=\dfrac{2p}{\lambda}\Rightarrow m_r=-\dfrac{\lambda}{2p}$

L'équation de la médiatrice est alors : $r\equiv y-\dfrac{\lambda}{2}=-\dfrac{\lambda}{2p}\left(x-\dfrac{\lambda^2}{4p}\right)$

$$\Rightarrow r\equiv y=-\frac{\lambda}{2p}x+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^3}{8p} \qquad (1)$$

Par analogie, on déduit que la médiatrice s de OB est :

$$\Rightarrow s\equiv y=-\frac{\mu}{2p}x+\frac{\mu}{2}+\frac{\mu^3}{8p} \qquad (2)$$

Les coordonnées du centre du cercle circonscrit est donné par l'intersection de r et s :

$$-\frac{\mu}{2p}x+\frac{\mu}{2}+\frac{\mu^3}{8p}=-\frac{\lambda}{2p}x+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^3}{8p}\Rightarrow\frac{\lambda-\mu}{2p}x=\frac{\lambda-\mu}{2}+\frac{\lambda^3-\mu^3}{8p^2}$$

Sachant que $\lambda^3-\mu^3=(\lambda-\mu)\left(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2\right)$, on peut simplifier en divisant par $\dfrac{\lambda-\mu}{2p}$

$$\Rightarrow x=p+\frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{4p} \qquad (3)$$

On injecte (1) dans l'équation de $\mathscr{P}$ pour obtenir l'ordonnée de C :

$$y=-\frac{\lambda}{2p}\left(p+\frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{4p}\right)+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^3}{8p}=\frac{\lambda}{2}\left(-1-\frac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{4p^2}+1+\frac{\lambda^2}{4p^2}\right)$$

$$\Rightarrow y=-\frac{\lambda\mu}{8p^2}(\lambda+\mu) \qquad (4)$$

Conclusion : $\boxed{C=\left(p+\dfrac{\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2}{4p};-\dfrac{\lambda\mu}{8p^2}(\lambda+\mu)\right)}$

(b) Déterminons l'équation de AB : $m_{AB} = \dfrac{\lambda - \mu}{\dfrac{\lambda^2}{2p} - \dfrac{\mu^2}{2p}} = \dfrac{2p}{\lambda + \mu} \Rightarrow AB \equiv y - \lambda = \dfrac{2p}{\lambda + \mu}\left(x - \dfrac{\lambda^2}{2p}\right)$

Le foyer $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$ doit satisfaire cette équation :

$$-\lambda = \frac{2p}{\lambda + \mu}\left(\frac{p}{2} - \frac{\lambda^2}{2p}\right) \Rightarrow -\lambda(\lambda + \mu) = p^2 - \lambda^2 \Rightarrow \boxed{-\lambda\mu = p^2}$$

(c) Le lieu de C est déterminé par le système suivant : $\begin{cases} x = p + \dfrac{\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2}{4p} \\ y = -\dfrac{\lambda\mu}{8p^2}(\lambda + \mu) \\ -\lambda\mu = p^2 \end{cases}$

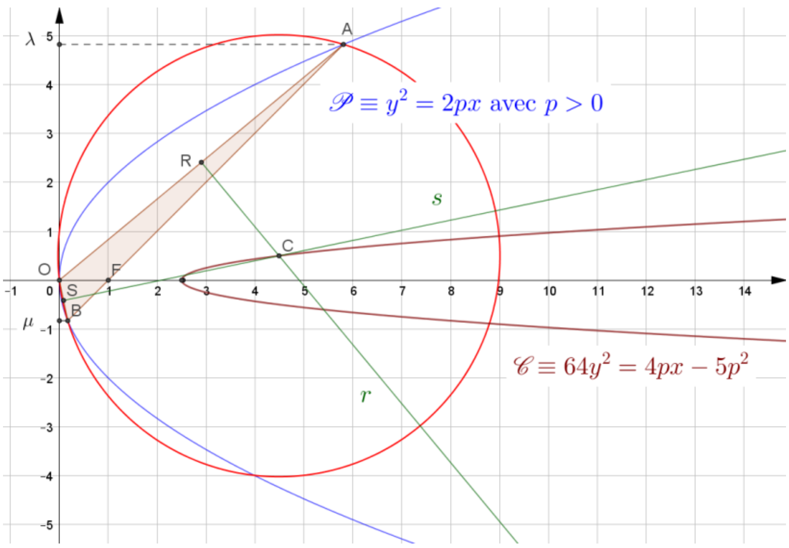
Remarquons que : $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = \lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 - \lambda\mu = (\lambda + \mu)^2 - \lambda\mu = \alpha^2 + p^2$

Les équations paramètriques du lieu de C sont alors : $\boxed{\begin{cases} x = p + \dfrac{\alpha^2 + p^2}{4p} \\ y = \dfrac{\alpha}{8} \end{cases}}$

(d) Pour obtenir l'équation cartésienne du lieu, il suffit d'éliminer α :

$$x = p + \frac{64y^2 + p^2}{4p} \Rightarrow \boxed{\mathscr{C} \equiv 64y^2 = 4px + 5p^2}$$

C'est une parabole d'axe horizontal Ox et de sommet $\left(\dfrac{5p}{4}, 0\right)$

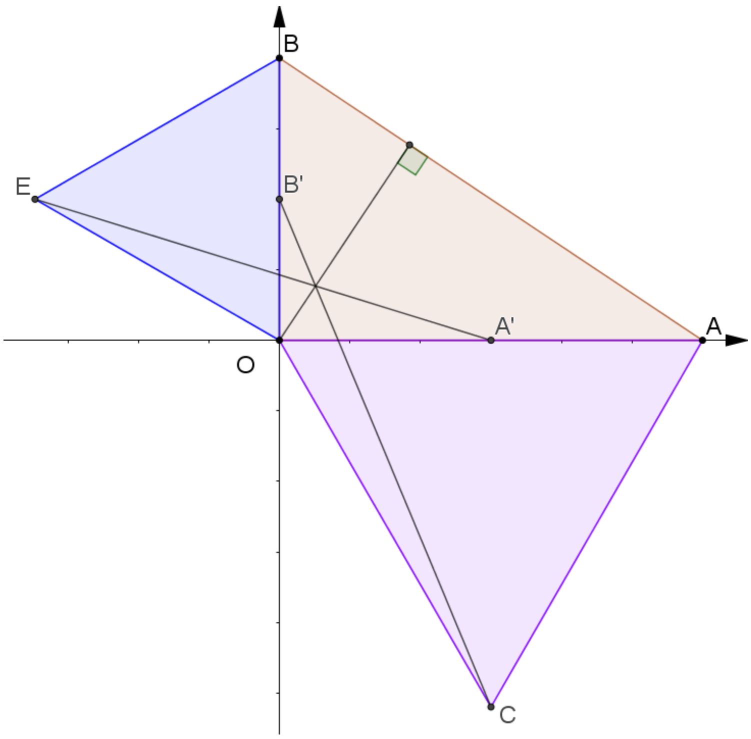


Le 17 janvier 2017

EXGAP192 – FACSA, ULiège, Liège, septembre 2017.

Sur les côtés $[OA]$ et $[OB]$, d'un triangle rectangle en O, à l'extérieur de celui-ci, on construit les triangles équilatéraux OAC et OBE. Les milieux des segments $[OA]$ et $[OB]$ sont respectivement A' et B'.
Démontrer que la hauteur du triangle OAB issue de O et les droites $A'E$ et $B'C$ sont concourantes.

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/



Choisissons un repère orthonormé de la manière suivante: O en est l'origine, la droite orientée OA est l'axe des abscisses et la droite orientée OB est l'axe des ordonnées. Dans ces conditions, les coordonnées des points A, B, A', B' sont les suivantes

$$A(a,0), \quad B(0,b), \quad A'(a/2,0), \quad B'(0,b/2),$$

avec $a > 0$ et $b > 0$.

Cela étant, recherchons les coordonnées du point C et du point E. Puisque le triangle OAC est équilatéral, l'abscisse de C est égale à $a/2$ et son ordonnée y_C vérifie

$$y_C^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

ce qui implique

$$y_C = -\frac{\sqrt{3}}{2}a$$

puisque le triangle OAC a été construit à l'extérieur. De même, puisque le triangle OBE est équilatéral, l'ordonnée de E est égale à $b/2$ et son abscisse x_E vérifie

$$x_C^2 + \frac{b^2}{4} = b^2$$

ce qui implique

$$x_E = -\frac{\sqrt{3}}{2}b$$

puisque le triangle OBE a été construit à l'extérieur.

On obtient ainsi directement les équations cartésiennes de la hauteur h du triangle OAB issue de O et des droites $A'E$ et $B'C$:

$$\begin{aligned} h &: \ ax - by = 0, \\ A'E &: \ x + \left(\sqrt{3} + \frac{a}{b}\right) y = \frac{a}{2}, \\ B'C &: \ \left(\sqrt{3} + \frac{b}{a}\right) x + y = \frac{b}{2}. \end{aligned}$$

Ces droites sont concourantes si et seulement si le système suivant est compatible

$$\begin{cases} ax - by = 0 \\ x + \left(\sqrt{3} + \frac{a}{b}\right) y = \frac{a}{2} \\ \left(\sqrt{3} + \frac{b}{a}\right) x + y = \frac{b}{2}. \end{cases}$$

Et cela a lieu si et seulement si le déterminant

$$D = det \begin{pmatrix} \frac{a}{b} & -1 & 0 \\ \sqrt{3} + \frac{b}{a} & 1 & \frac{b}{2} \\ 1 & \sqrt{3} + \frac{a}{b} & \frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

est nul. En calculant celui-ci à partir de la première ligne, on obtient

$$\begin{aligned} D &= \frac{a}{b}\left(\frac{a}{2} - \frac{b}{2}\,(\sqrt{3} + \frac{a}{b})\right) + \left(\frac{a}{2}\,(\sqrt{3} + \frac{b}{a}) - \frac{b}{2}\right) \\ &= \frac{a^2}{2b} - \frac{\sqrt{3}}{2}a - \frac{a^2}{2b} + \frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{b}{2} - \frac{b}{2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

(Une autre façon de montrer que ce système est compatible aurait été de calculer l'intersection de deux des droites, et de vérifier ensuite que les coordonnées obtenues satisfont l'équation de la troisième.)

EXGAP193 – POLYTECH, Umons, Mons, septembre 2016.

Le 28 mars 2017

EXGAP194 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Le 27 mars 2017

EXGAP195 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2016.

Le 29 mars 2017

EXGAP196 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 1.

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux

Le 10 aout 2017

EXGAP197 – EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 2.

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux

---

Le 20 aout 2016

EXGAP198 – EPB, ULB, Bruxelles juillet 2017.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Le 7 septembre 2016.

EXGAP199 – EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Solution proposée par Louis François

Le 20 octobre 2016.