Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 3

EXGAP030 – EXGAP039

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

1 avril 03

EXGAP030 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit quatre droites d'équation
d_1 : y = 0 ; d_2 : y = -8 ; d_3 : 3y = 4x ; d_4 : x = 12.

a) Établir les équations des deux circonférences C_1 et C_2 telles que :
C_1 soit tangent à d_1, d_2 et d_3
C_2 soit tangent à d_1, d_3 et d_4

b) Déterminer les coordonnées des sommets d'un carré circonscrit à C_2 et dont deux des côtés sont parallèles à la corde commune à C_1 et C_2.

Détermination de C_1:

Puisque C_1 est tangent aux deux droites parallèles d_1 et d_2,

le centre du cercle se trouve sur la droite $y = -4$.

De plus le rayon du cercle $r = 4$.

Exprimons que la distance entre le centre du cercle et la droite $d_3 = r$

$$4^2 = \frac{(4x-3(-4))^2}{4^2+3^2} \quad \rightarrow \quad x = 2 \quad \text{et} \quad x = -8$$

Le cercle déterminé par $x = -8$ n'a pas de corde commune avec C_2

(On pourra faire un schéma pour s'en convaincre).

Donc : $C_1 \equiv (x-2)^2 + (y+4)^2 = 4^2$

Détermination de C_2:

Le cercle est tangent à deux droites perpendiculaires

$d_1 \equiv y = 0 \quad \text{et} \quad d_2 \equiv x = 12$

le centre se trouve donc sur la droite $y = x - 12$.

Les coordonnées du centre sont donc $(x, y) \rightarrow (y+12, y)$.

De plus, il est clair son rayon est égale à $|y|$

Exprimons que la distance du centre à la droite d_3 *est* égale au

rayon donc à $|y|$:

$$y^2 = \frac{\left(4(y+12)-3y\right)^2}{4^2+3^2} \quad \left(\text{car } d_3 \equiv 4x - 3y = 0\right)$$

$\rightarrow \quad y^2 - 4y - 96 = 0 \quad \rightarrow y_1 = -8 \quad y_2 = 12$

$y_2 = 12$ ne correspond pas à un cercle ayant une corde commune avec C_1

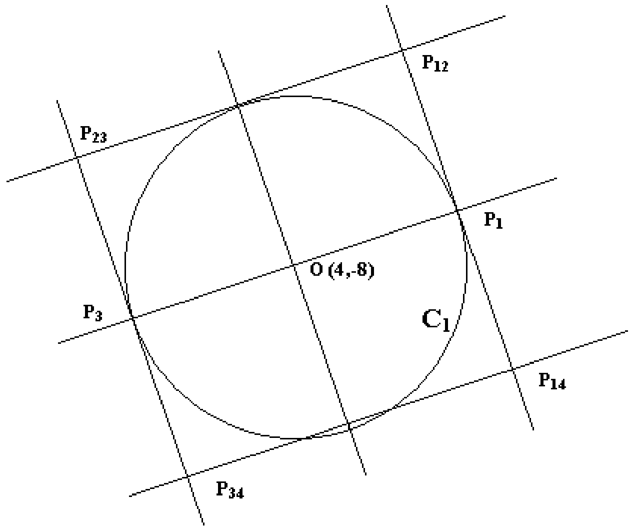
$\rightarrow \quad x = 4 \quad \rightarrow \quad$ centre:$(4,-8)$

Le cercle a pour équation :

$C_2 \equiv (x-4)^2 + (y+8)^2 = 8^2$

Pour déterminer la corde commune, il suffit de faire la différence des

équations de C_1 et de C_2 : $\rightarrow \quad y = \frac{1}{2}(x-3)$



La droite P_3P_1 est parallèle à $y=\frac{1}{2}x-10,$ dont un vecteur directeur est $\overline{V_{31}}:(2,1).$

Déterminons le vecteur translation parallèle à T_{OP_1} et de module égal au rayon du cercle C_2 :

$8^2=(2t)^2+t^2 \quad\rightarrow\quad t=3.577 \quad\rightarrow\quad \mathrm{T}_{OP_1}:(7.156,\,3.577)$

Pour passer de P_2 à P_{12}, il faut la translation perpendiculaire :

$\mathrm{T}_{P_1P_{12}}:(-3.577,\,7.156)$

La translation OP_{12} est donc :

$\mathrm{T}_{OP_{12}}:(7.156-3.577,\,3.577+7.156)=(3.579,10.733)$

Ce qui donne les coordonnées de P_{12} :

$P_{12}:(4+3.579,\,-8+10.733)=(7.579,\,2.733)$

De même, on a successivement :

$\mathrm{T}_{OP_{34}}:(-3.579,\,-10.733)\rightarrow \quad P_{34}:(0.422,\,-18.733)$

$\mathrm{T}_{OP_{23}}:(-10.733,\,3.579) \quad\rightarrow\quad P_{23}:(-6.733,\,-4.421)$

$\mathrm{T}_{OP_{14}}:(10.733,\,-3.579) \quad\rightarrow\quad P_{14}:(14.733,\,-11.579)$

Rappel:

Si $\vec{V}(a,b)$ est un vecteur, les vecteurs perpendiculaires sont :

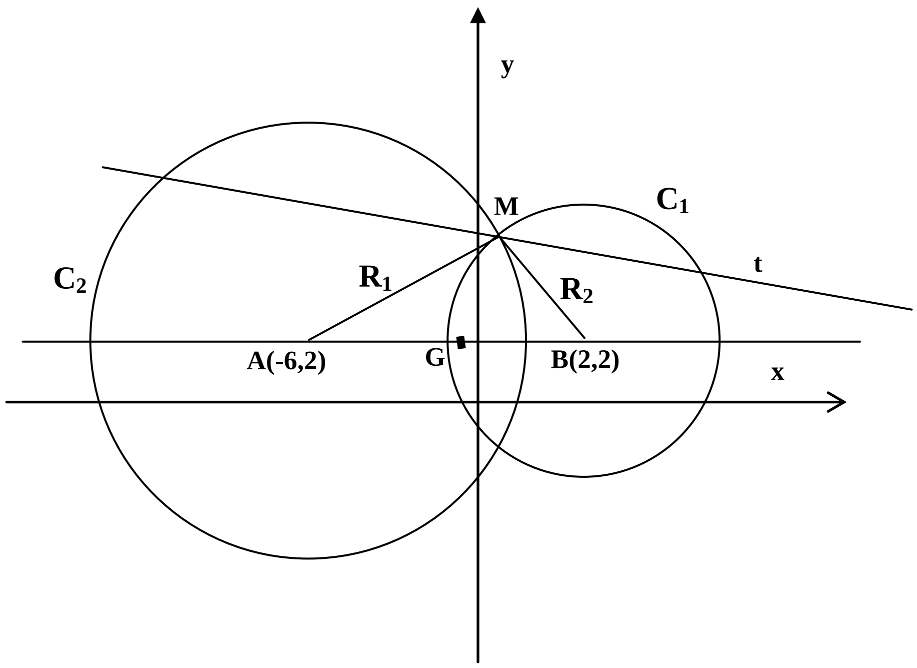
$\vec{V}\,'(-b,a)$ et $\vec{V}\,''(b,-a).$

On vérifie facilement que : $\vec{V}\vec{V}\,'=\vec{V}\vec{V}\,''=0$

EXGAP031 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit deux circonférences C1 et C2 :
C1 est telle que : - les coordonnées de son centre A(2,2)
- son rayon R1 est variable.
C2 est telle que : - les coordonnées de son centre B(-6,2)
- son rayon R2 est variable.
La condition suivante est imposée : R1 + R2 = 10

a) Déterminer le lieu des points d'intersection de ces deux circonférences.
b) Établir l'équation de la tangent en un point M de ce lieu, d'abscisse x = 1 d'ordonnée positive.
c) Montrer par le calcul que cette tangente forme un angle égal avec les segments MA et BM ; quelle est la valeur numérique de cet angle ?



a) Si $R_1 + R_2 = 10$, le lieu est une ellipse.

Soit $G(-2, 2)$ milieu de AB et aussi centre de l'ellipse

$10 = 2a \quad \rightarrow \quad a = 5$

$a^2 - b^2 = e^2 \quad$ avec $e = |GB| \rightarrow \quad b^2 = a^2 - e^2 = 5^2 - 4^2 \rightarrow b = 3$

$$\rightarrow \quad \frac{(x+2)^2}{5^2} + \frac{(y-2)^2}{3^2} = 1$$

b) Première méthode

L'ellipse : $9(x+2)^2 + 25(y-2)^2 = 225 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{5}\sqrt{21 - 4x + x^2} + 2$

$$y' = \frac{3}{5}\frac{1}{2\sqrt{21 - 4x - x^2}}(-4 - 2x) \quad \rightarrow \quad y'(1) = -0.45$$

Donc le coefficient angulaire de la tangente est -0.45.

Calculons l'ordonnée de point M

$$x = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{9}{25} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1 \quad \rightarrow \quad y = 4.4$$

Par conséquent, la tangente passe par (1,4.4)

$\rightarrow \quad 4.4 = -0.45 + p \quad \rightarrow \quad p = 4.85$

et $\quad y = -0.45x + 4.85$

Deuxième méthode

On calcule le point M comme ci-dessus. D'autre part, on a

$$\begin{cases} f_x' = 18(x+2) \\ f_y' = 50(y-2) \end{cases}$$

L'équation de la tangente est :

$$y - y_1 = -\frac{f_{x_1}'}{f_{y_1}'}(x - x_1) \quad \rightarrow \quad y - 4.4 = -\frac{18(1+2)}{50(4.4-2)}(x-1)$$

$\rightarrow \quad y = -0.45x + 4.85$

c) Utilisons les vecteurs directeurs

$\overrightarrow{AM} : (7, 2.4) = (1, 0.3429)$

$\overrightarrow{BM} : (-1, 2.4)$

$\overrightarrow{Mt} : (1, 0.45)$

$$\text{Angle } tAM \equiv \cos\theta = \frac{1 \cdot 1 - 0.3429 \cdot 0.45}{\sqrt{1^2 + 0.3429^2}\sqrt{1^2 + 0.45^2}} = 0.7296 \quad \rightarrow \quad \theta = 43.15$$

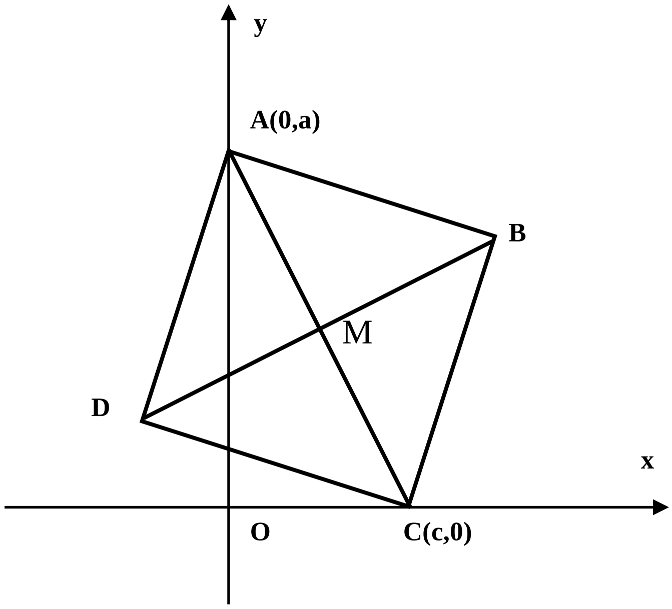
$$Angle\ tBM \equiv \cos\theta = \frac{-1.1 - 2.4 \cdot 0.45}{\sqrt{1^2 + 2.4^2}\sqrt{1^2 + 0.45^2}} = 0.7296 \quad \rightarrow \quad \theta = 43.15$$

Les angles sont égaux. Ce qui est une propriété de l'ellipse.

EXGAP032 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit un espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit un carré ABCD d'aire L²/2 constante.
les sommets A et C de ce carré se déplacent par translation le long des axes Ox et Oy (A sur Oy et C sur Ox, exclusivement du coté positif de ces axes).

a) Déterminer les lieux des sommets B et D.
b) Préciser les intervalles de variation des coordonnées B et D sur ces lieux.



Puisque l'aire du carré est $\frac{L^2}{2}$, $AC = L$ et on a la relation $a^2+c^2=L^2$

le point M a pour coordonnées $(c/2, a/2)$. On peut passer de M à B en effectuant une translation définie par un vecteur dont le module est égal à $L/2$.

$AC \equiv y=-\frac{a}{c}x+a$ dont un vecteur directeur est $(1,-a/c)$.

Un vecteur directeur de MB est donc $(a/c,1)$.

Déterminons t donc dans le vecteur $(t.a/c, t)$ de façon que son module soit égal à $L/2$.

$$t^2\left(1+\left(\frac{a}{c}\right)^2\right)=\left(\frac{L}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad t=\frac{L}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{c}\right)^2}}$$

On obtient donc les coordonnées de B :

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{2} + \dfrac{a}{c}\dfrac{L}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}} \\ y = \dfrac{a}{2} + \dfrac{L}{2}\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}} \end{cases} \quad \text{mais comme : } 1+\left(\frac{a}{c}\right)^2 = \left(\frac{L}{c}\right)^2$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{2} + \dfrac{a}{c}\dfrac{L}{2}\dfrac{1}{\frac{L}{c}} = \dfrac{c}{2} + \dfrac{a}{2} \\ y = \dfrac{a}{2} + \dfrac{L}{2}\dfrac{1}{\frac{L}{c}} = \dfrac{a}{2} + \dfrac{c}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad x = y \text{ qui est le lieu cherché.}$$

En travaillant selon la même méthode, on obtient pour D : $x = -y$

Les coordonnées extrèmes de B sont :

Si D se trouve en O : $\rightarrow \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}L, \dfrac{\sqrt{2}}{2}L\right)$

Si C se trouve en O : $\rightarrow \left(\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2}\right)$

De même D varie de $\left(-\dfrac{L}{2}, \dfrac{L}{2}\right)$ à $\left(\dfrac{L}{2}, -\dfrac{L}{2}\right)$

EXGAP033 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit deux courbes C1 et C2 d'équations implicites :

$$x^2 + y^2 - 4x - 6y - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x + 2y + 22 = 0$$

a) Déterminer de quelles courbes il s'agit.
b) Démontrer que C1 et C2 sont tangentes entre elles.
c) Déterminer les coordonnées du point de contact T entre C1 et C2.
d) Établir l'équation cartésienne de leur tangente commune.

a) Pour les deux courbes $A = C \rightarrow$ ce sont deux cercles.

$$C_1 \quad \begin{cases} f_x' = 2x - 4 = 0 & \rightarrow \quad x_0 = 2 \\ f_y' = 2y - 6 = 0 & \rightarrow \quad y_0 = 3 \quad \rightarrow \quad C_1 \equiv (x-2)^2 + (y-3)^2 = 7^2 \\ r = \sqrt{4+9+36} = 7 & \end{cases}$$

$$C_2 \quad \begin{cases} f_x' = 2x - 10 = 0 & \rightarrow \quad x_0 = 5 \\ f_y' = 2y + 2 = 0 & \rightarrow \quad y_0 = -1 \quad \rightarrow \quad C_1 \equiv (x-5)^2 + (y+1)^2 = 2^2 \\ r = \sqrt{25+1-22} = 2 & \end{cases}$$

b) Calculons la distance entre les deux centres:

$$|O_1O_2|^2 = (2-5)^2 + (3+1)^2 = 25 \quad \rightarrow \quad |O_1O_2| = 5$$

ce qui est la différence des rayons. Les deux cercles sont donc tangents.

c) La corde commune (qui est içi la tangente commune) est obtenue en faisant la différence des équations des deux cercles:

$$6x - 8y - 58 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3x-29}{4} \quad \text{(Ceci répond à la question d)}$$

Remplaçons dans C_1 : $x^2 + \left(\frac{3x-29}{4}\right)^2 - 4x - 6\frac{3x-29}{4} - 36 = 0$

$$25x^2 - 310x + 961 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(x - \frac{31}{5}\right)^2 = 0$$

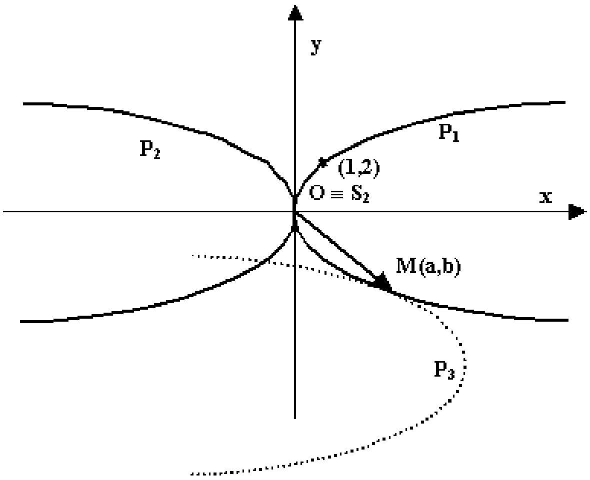
Equation dont on peut vérifier que le Δ est nul

$$\rightarrow \quad x = \frac{31}{5} \quad \rightarrow \quad y = \frac{3\frac{31}{5} - 29}{4} = -\frac{13}{5}$$

Point de tangence : $T\left(\frac{31}{5}, -\frac{13}{5}\right)$

EXGAP034 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E^2, muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit une parabole P_1 dont le sommet est à l'origine, qui passe par le point (1,2) et l'axe est la droite y = 0.
Soit P_2 la parabole symétrique de P_1 par rapport à la droite x = 0.
Soit P_3 une troisième parabole résultant d'une translation de P_2 selon un vecteur S_2M :
S_2 et le sommet de la parabole P_2
M est un point de coordonnées (a,b).
Déterminer la relation qui doit exister entre a et b pour que P_1 et P_3 soient tangente entre elles.



P_1 : $x = \lambda y^2$ passe par (1,2) $\to 1 = \lambda 4 \to \lambda = 1/4$

$P_1 \equiv y^2 = 4x$

$P_2 \equiv y^2 = -4x$

Le sommet S_2 est confondu avec l'origine O.

Donc la translation définie le vecteur $\overrightarrow{S_2M}$ peut être définie par :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \to \begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

Remplaçons dans l'équation de P_2, et changeons x' en x, et y' en y.

$P_3 \equiv (y-b)^2 = -4(x-a)$

P_1 et P_3 sont tangentes, donc :

$P_1 \cap P_3 = 0 \quad \to \quad (y-b)^2 = -4(\frac{y^2}{4} - a)$

$y^2 - 2by + b^2 = -y^2 + 4a$

$2y^2 - 2by + b^2 - 4a = 0$

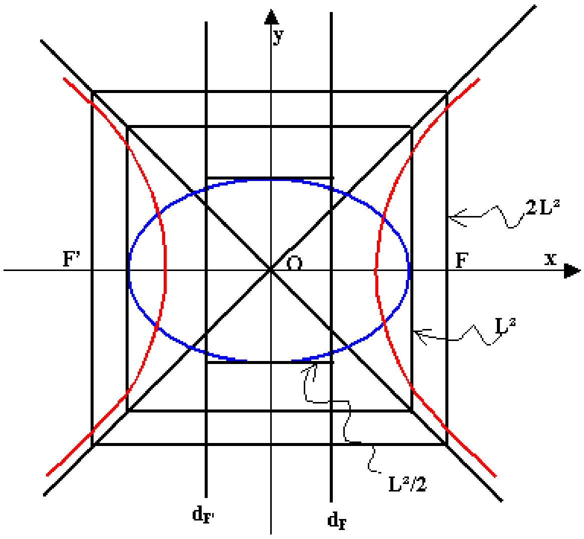
$\Delta = 0 \quad \to \quad 4b^2 - 4.2.(b^2 - 4a) = 0 \quad \to \quad b^2 - 2b^2 + 8a = 0$

$\to \quad b^2 = 8a$

Ce qui est aussi l'équation d'une parabole.

EXGAP035 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E^2, muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit une ellipse et une hyperbole centrées en O et admettant Ox et Oy comme axes de symétrie.
Les tangentes à l'ellipse, parallèles à l'axe Oy, coupent les asymptotes de l'hyperbole en quatre points, sommets d'un carré d'aire L^2.
Les droites parallèles à l'axe Oy et passant par les foyers de l'hyperbole coupent ses asymptotes en quatre points, sommets d'un carré d'aire $2L^2$.
Les tangentes à l'ellipse, parallèles à l'axe Ox, coupent les directrices de l'hyperbole en quatre points, sommets d'un carré d'aire $L^2/2$.
Déterminer les équations de l'ellipse et de l'hyperbole.



$$E \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

On a immédiatement par construction : $a=\frac{L}{2}$ et $b=\frac{L}{2\sqrt{2}}$

$$\rightarrow \frac{x^2}{\frac{L^2}{4}}+\frac{y^2}{\frac{L}{2\sqrt{2}}}=1 \rightarrow x^2+2y^2=\frac{L^2}{4}$$

$$H \equiv \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

Demi distance des foyers : $e=\sqrt{a^2+b^2} \rightarrow \frac{\sqrt{2}L}{2}=\sqrt{a^2+b^2}$

Directrice : $x=\frac{a^2}{e}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \rightarrow \frac{L}{2\sqrt{2}}=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \rightarrow \frac{L}{2\sqrt{2}}=\frac{a^2}{\frac{\sqrt{2}L}{2}}$

$\rightarrow a^2=\frac{L^2}{4} \rightarrow b^2=\frac{L^2}{4}$ Car on a une hyperbole équilatère.

$$H \equiv x^2-y^2=\frac{L^2}{4}$$

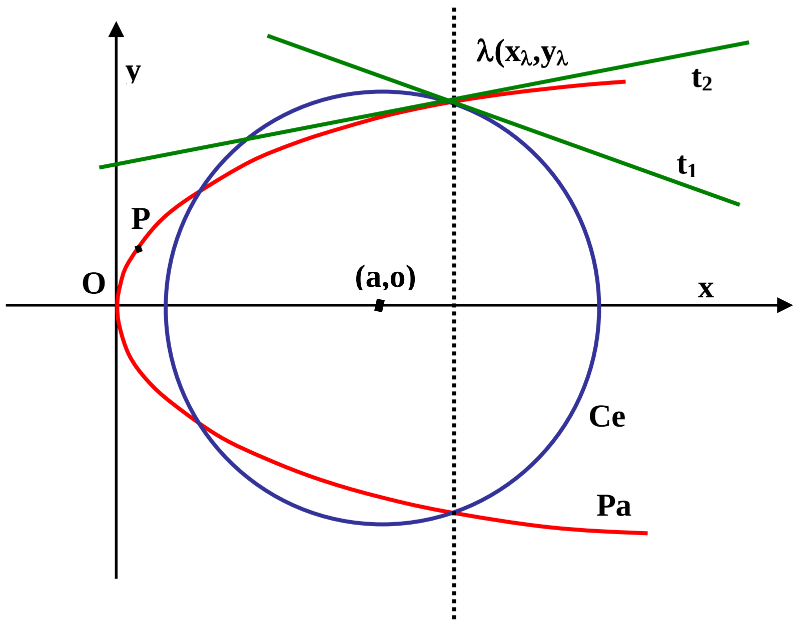
EXGAP036 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E^2, muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.

a) Soit une parabole d'axe de symétrie Ox. Cette parabole passa par l'origine et par le point P(1,1).
   Déterminer l'équation de la tangente en P à la parabole.
b) Dans l'ensemble des circonférences de centres (a,0) et de rayon a, est-il possible d'en trouver une qui coupe orthogonalement la parabole ?

NB :

a) a est un paramètre.
b) Deux courbes se coupent orthogonalement si leurs tangentes au point commun sont perpendiculaires entre elles.



a) Parabole. Elle passe par (1,1) $\rightarrow \quad y^2 = x$

(Note par conséquent : $x > 0$)

Tangente en $P(1,1)$: $y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \rightarrow y'(1) = \dfrac{1}{2}$

$\rightarrow \quad y - 1 = \dfrac{1}{2}(x-1) \quad \rightarrow \quad 2y = x + 1$

b) Tangente à la parabole au point λ : $y - y_\lambda = \dfrac{1}{2\sqrt{x_\lambda}}(x - x_\lambda)$

Cercle:

$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \quad (a > 0)$

$\rightarrow \quad y = \sqrt{a^2 - (x-a)^2} = \sqrt{x(2a-x)} \quad \rightarrow \quad \underline{a > \dfrac{1}{2}}$

Tangente au cercle:

Coefficient angulaire : $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x(2a-x)}}(2a - 2x) = \dfrac{a-x}{\sqrt{x(2a-x)}}$

La tangente passe par λ : $y - y_\lambda = \dfrac{a - x_\lambda}{\sqrt{x_\lambda(2a - x_\lambda)}}(x - x_\lambda)$

La condition d'orthogonalité est : $\dfrac{a - x_\lambda}{\sqrt{x_\lambda(2a - x_\lambda)}} = -2\sqrt{x_\lambda}$

Or le point λ appartient aussi à la corde commune :

$$\begin{cases} y^2 = x \\ (x-a)^2 + y^2 = a^2 \end{cases} \rightarrow \quad x(x + 1 - 2a) = 0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \quad \text{(trivial)} \\ x = 2a - 1 \end{cases}$$

donc $\quad x_\lambda = 2a - 1,$ et on remplace dans la condition d'orthogonalité :

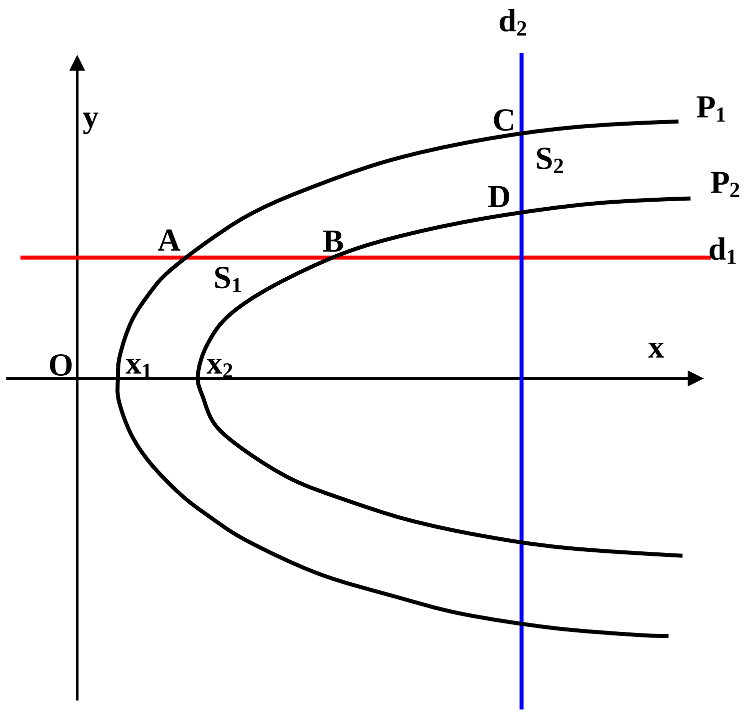
$\dfrac{a - 2a + 1}{\sqrt{(2a-1)(2a-2a+1)}} = -2\sqrt{2a-1} \quad \rightarrow \quad 1 - a = -2(2a-1)$

$\rightarrow \quad 3a = 1 \quad \rightarrow \quad \underline{a = \dfrac{1}{3}}$

Ce qui est impossible car imcompatible avec la condition d'existence du cercle : $a > \dfrac{1}{2}$

EXGAP037 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit 2 paraboles P_1 et P_2 admettant Ox comme axe de symétrie.
Les intersections de ces paraboles avec une droite d_1 variable, parallèle à Ox, déterminent sur cette droite un segment S_1 (variable avec la droite).
Déterminer le lieu du point milieu de ce segment S_1.
Les intersections de ces paraboles avec une droite d_2 variable, celle-là parallèle à Oy, déterminent sur cette autre droite un segment S_2 (variable avec la droite).
Quelle condition faut-il imposer à P_1 et à P_2 pour que le lieu du point milieu du segment S_2 soit une parabole ?



$P_1 \equiv y^2 = a_1(x - x_1)$
$P_2 \equiv y^2 = a_2(x - x_2)$
$d_1 \equiv y = y_1$

$A = P_1 \cap d_1 \rightarrow \quad y_1{}^2 = a_1(x_A - x_1) \quad \rightarrow \quad x_A = \dfrac{y_1{}^2 - a_1 x_1}{a_1}$

$B = P_2 \cap d_1 \rightarrow \quad y_1{}^2 = a_2(x_A - x_2) \quad \rightarrow \quad x_B = \dfrac{y_1{}^2 - a_2 x_2}{a_2}$

Coordonnées de M milieu de AB :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y_1{}^2 - a_1 x_1}{a_1} + \dfrac{y_1{}^2 - a_2 x_2}{a_2}\right) = \dfrac{a_1 + a_2}{2a_1 a_2}\, y_1{}^2 - \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y_M = y_1 \end{cases}$$

On obtient le lieu de M en éliminant y_1. Donc en changeant $x_M \rightarrow x$ et $y_M \rightarrow y$

$$y^2 = \frac{2a_1 a_2}{a_1 + a_2}\left(x + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right)$$

Ce qui est l'équation d'une parabole d'axe Ox.

$d_2 \equiv x = x_3$
$C = P_1 \cap d_2 \quad \rightarrow \quad y_C{}^2 = a_1(x_3 - x_1)$
$D = P_2 \cap d_2 \quad \rightarrow \quad y_D{}^2 = a_2(x_3 - x_2)$

N milieu de CD : $y_N = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_1(x_3 - x_1)} + \sqrt{a_2(x_3 - x_2)}\right)$

$\rightarrow$ le lieu : $y = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_1(x - x_1)} + \sqrt{a_2(x - x_2)}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a_1}\sqrt{x - x_1} + \sqrt{a_2}\sqrt{x - x_2}\right)$

Pour que ce lieu soit une parabole c'est-à-dire de la forme $y = \lambda\sqrt{x}$
il faut que les deux racines en x soient égales $\rightarrow \quad x_1 = x_2 = x_0$
Ce qui implique que les sommets des deux paraboles soient confondus.
L'équation du lieu devient :

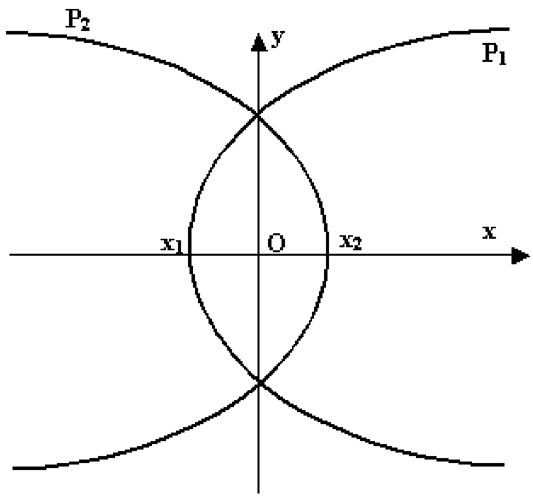
$$y = \frac{1}{2}\sqrt{x - x_0}\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}\right) \quad \rightarrow \quad 4y^2 = \left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}\right)^2 (x - x_0)$$

$$\rightarrow \quad y^2 = \frac{1}{4}\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}\right)^2 (x - x_0)$$

Parabole d'axe de symétrie Ox.

EXGAP038 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit une parabole P_1 d'axe de symétrie Ox.
La parabole P_2 est l'image de la parabole P_1 par réflexion d'axe parallèle à Oy.
Les deux paraboles se coupent orthogonalement.
Calculer la distance de leur sommet.



Choississons l'axe parallèle à Oy comme étant Oy. (Aucune influence sur la réponse).

$P_1 \equiv y^2 = 2p(x - x_1)$

$P_2 \equiv y^2 = -2p(x - x_2) \quad or \quad x_1 = -x_2 \quad \rightarrow \quad P_2 \equiv y^2 = -2p(x + x_1)$

Calculons les dérivées :

$$y_1' = \frac{p}{\sqrt{2p(x - x_1)}} \quad \text{et} \quad y_2' = -\frac{p}{\sqrt{-2p(x + x_1)}}$$

or en $x = 0 \quad y_1' = -\frac{1}{y_2'}$ puisque les paraboles sont orthogonales.

$$\rightarrow \quad \frac{p}{\sqrt{-2px_1}} = \frac{\sqrt{-2px_1}}{p} \quad \rightarrow \quad p^2 = 2px_1 \quad \rightarrow \quad x_1 = -x_2 = \frac{p}{2}$$

La distance est donc égale à p et les équations des paraboles est

$P_1 \equiv y^2 = 2p(x - c)$

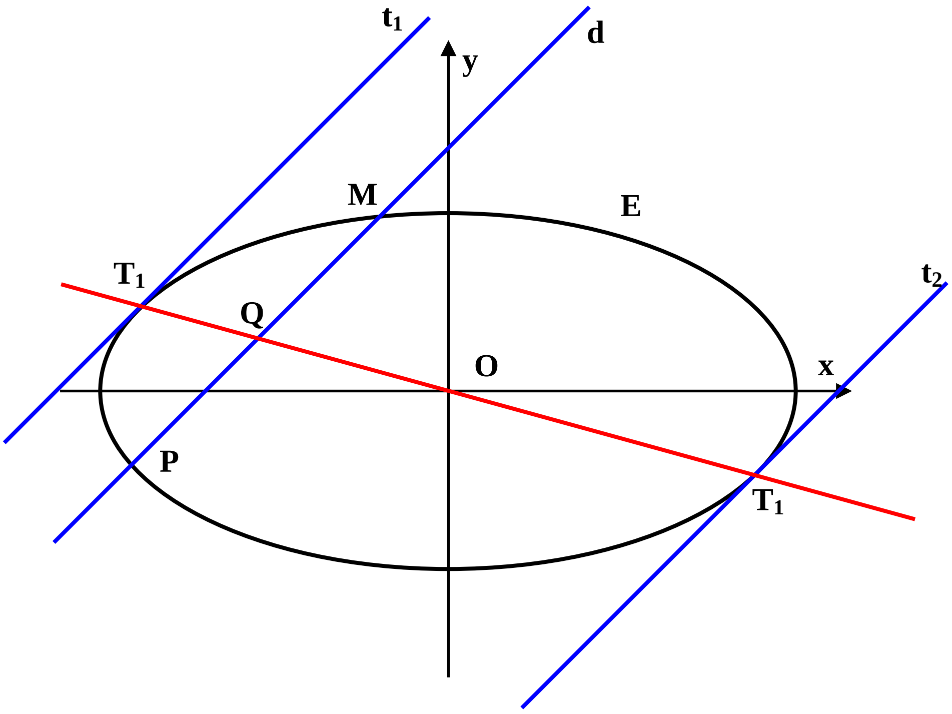
$P_2 \equiv y^2 = -2p(x - c - p)$

où c est une constante arbitraire.

EXGAP039 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit une ellipse, une corde et les deux tangentes à l'ellipse parallèles à la corde.
Démontrer que

a) La droite qui joint les points de tangence est un diamètre (c'est-à-dire passe par le centre de l'ellipse).
b) Le diamètre coupe la corde en son milieu.



Première méthode

$E \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

$d \equiv y = mx + p$

$E \cap d \equiv b^2x^2 + a^2(mx+p)^2 - a^2b^2 = 0$

$\to \quad (b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mpx^2 + a^2p^2 - a^2b^2 = 0 \qquad (1)$

Equation du second degré dont le Δ doit être nul :

$\Delta = (a^2mp)^2 - (b^2 + a^2m^2)(a^2p^2 - a^2b^2) = 0 \quad \to \quad p^2 = b^2 + a^2m^2$

c'est à dire : $p = \pm\sqrt{b^2 + a^2m^2}$ et donc :

$t_1 \equiv y = mx + \sqrt{b^2 + a^2m^2}$

$t_1 \equiv y = mx - \sqrt{b^2 + a^2m^2}$

Comme l'équation (1) a son $\Delta = 0$, on en déduit les coordonnées x des points T_1 et T_2 :

$x = \pm\dfrac{a^2m}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}$

Ce qui montre que x_{T_1} est symétrique de x_{T_2}. Et comme l'ellipse est également symétrique on en déduit que T_1 et T_2 sont diamètralement opposés. Autrement dit que T_1T_2 est un diamètre.

Calculons l'équation de T_1T_2

Remplaçons x dans l'équation de l'ellipse :

$b^2\left(\dfrac{a^4m^2}{b^2 + a^2m^2}\right) + a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \quad \to \quad y^2 = b^2 - b^2\left(\dfrac{a^2m^2}{b^2 + a^2m^2}\right)$

$\to \quad y^2 = \dfrac{b^4 + b^2a^2m^2 - b^2a^2m^2}{b^2 + a^2m^2} = \dfrac{b^4}{b^2 + a^2m^2} \quad \to \quad y = \pm\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}$

La pente *de* T_1T_2 est donc $\quad m_{T_1T_2} = -\dfrac{y}{x} = -\dfrac{\dfrac{b^2}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}}{\dfrac{a^2m}{\sqrt{b^2 + a^2m^2}}} = -\dfrac{b^2}{a^2m}$

Signe $-$ puisque les pentes de la corde et du diamètre sont de signes contraires.

L'équation du diamètre est donc : $\underline{y = -\dfrac{b^2}{a^2m}x}$

Il est facile de montrer que Q est le milieu de MP.

$$Q \equiv \begin{cases} y = -\dfrac{b^2}{ma^2}x \\ y = mx + p \end{cases} \rightarrow \quad x_Q = -\frac{pma^2}{a^2m^2 + b^2}$$

Or le milieu de MP a pour coordonnée en $x : \dfrac{1}{2}(x_M + x_P)$

x_M et x_P sont solutions de l'équation (1), et on a immédiatement

$$x_M + x_P = -\frac{2a^2mp}{a^2m^2 + b^2}$$

Par conséquent le diamètre coupe la corde en son milieu.

Deuxième méthode

L'ensemble des diamètres est donné par : $\underline{f_x' + m\ f_y' = 0}$

Dans le cas de l'ellipse : $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

$$\begin{cases} f_x' = 2b^2x \\ f_y' = 2a^2y \end{cases} \rightarrow \quad y = -\frac{b^2}{ma^2}x$$

Rappel :

L'équation $f_x' + m\ f_y' = 0$ est valable pour toutes les coniques :

$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + DX + Ey + F = 0$

Un diamètre a pour équation : $y = -\dfrac{A}{Cm}x$