Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 4

EXGAP040 – EXGAP049

http://www.matheux.be.tf

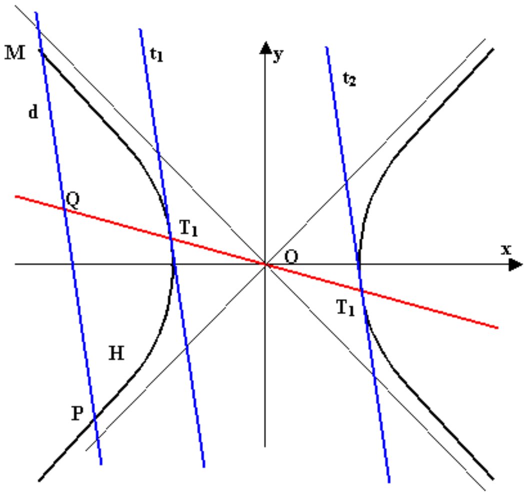
Jacques Collot

1 avril 03

EXGAP040 – Exemple.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Soit une hyperbole et une droite d qui coupe l'hyperbole en deux points distincts M et P.
Soit les droites t et t' tangentes à l'hyperbole en T1 et T2 et parallèle à la droite d.

a) La droite d' qui joint les points de tangence est un diamètre (c'est-à-dire passe par le centre de l'ellipse).
b) Le diamètre coupe la droite d. en son milieu



Equation du diamètre T_1T_2

$d \equiv y = mx + p$

$H \equiv \; b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0$

$$\begin{cases} f_x' = 2b^2x \\ f_y' = -2a^2y \end{cases} \quad \rightarrow \quad f_x' + mf_y' = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{b^2}{ma^2}x$$

qui est l'équation d'une droite passant par l'origine.

Coordonnée x de Q

$$\begin{cases} y = \dfrac{b^2}{ma^2}x \\ y = mx + p \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{b^2}{ma^2}x = mx + p \quad \rightarrow \quad x_Q = \frac{ma^2p}{b^2 - m^2a^2}$$

Coordonnées de M et P

$$\begin{cases} b^2x^2 - a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \\ y = mx + p \end{cases} \quad \rightarrow \quad b^2x^2 - a^2(mx+p)^2 - a^2b^2 = 0$$

$(b^2 - m^2a^2)x^2 - 2a^2mpx - a^2b^2 = 0$

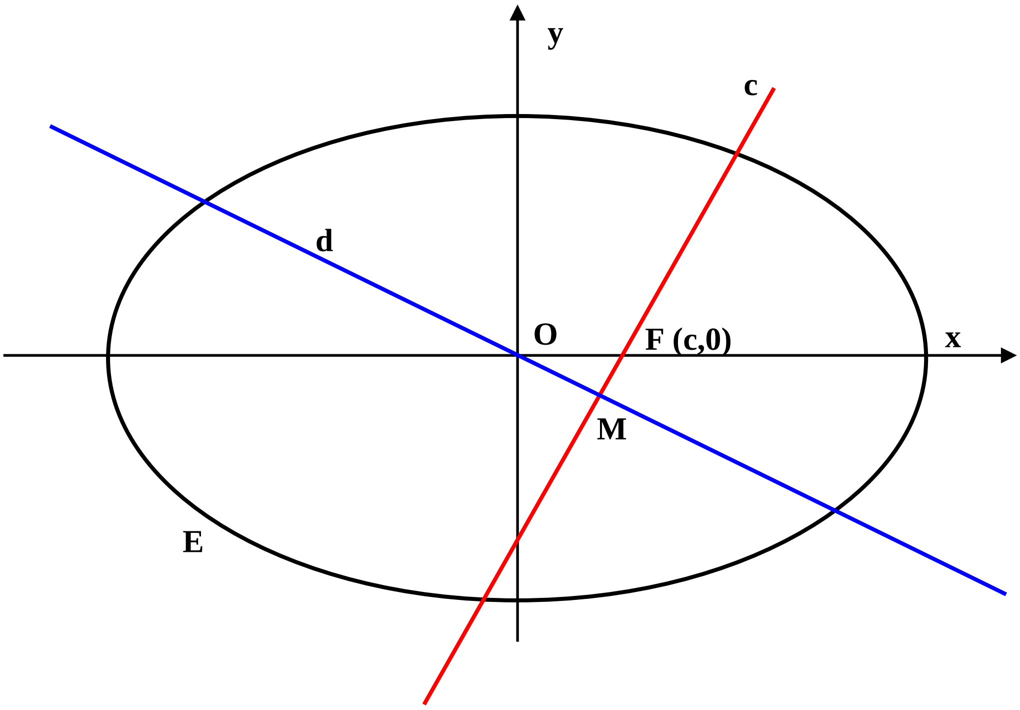
x_M et x_P sont solutions de cette équation. De plus,

$$x_M + x_P = \frac{2a^2mpx}{b^2 - m^2a^2} = 2x_Q$$

Le diamètre coupe donc la corde en son milieu.

EXGAP041 – Exemple.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Trouver le lieu du milieu d'une corde focale d'une ellipse .
NOTE : Une corde focale passe par un foyer.



$$E \equiv a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0$$

$$c \equiv y - m(x - c) = 0$$

$$d \equiv \frac{1}{2}\left(f_x' + mf_y' \right) = b^2x + a^2my = 0$$

Eliminons m :

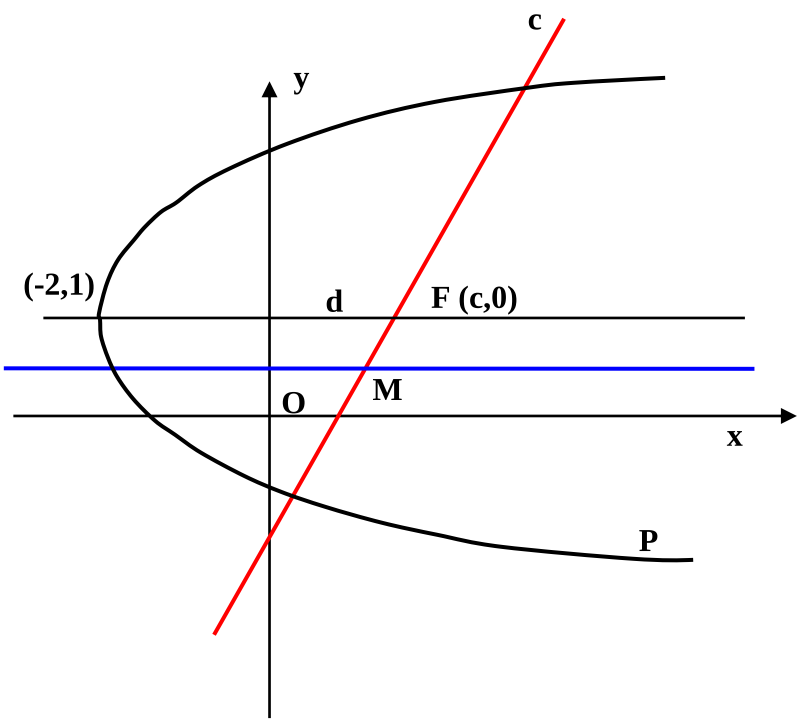
$$L \equiv a^2y^2 + b^2x^2 - b^2cx = 0$$

C'est une ellipse passant par le foyer F et le centre de l'ellipse donnée.

Il existe une solution symétrique pour le foyer F'.

EXGAP042 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy. Déterminer le lieu des milieux des cordes focales d'une parabole P de sommet (-2,1) et d'axe de symétrie parallèle à Ox.



Une parabole étant une ellipse dont un des foyers est rejeté à l'infini, utilisons la propriété que le diamètre conjugué à une corde focale coupe la corde focale en son milieu, ici le point M.

$$P \equiv (y-1)^2 - 2p(x+2) = 0$$

$$c \equiv y-1 = m(x+2-\frac{p}{2}) = 0$$

$$d \equiv \frac{1}{2}\left(f_x' + m f_y' \right) = -p + m(y-1) = 0$$

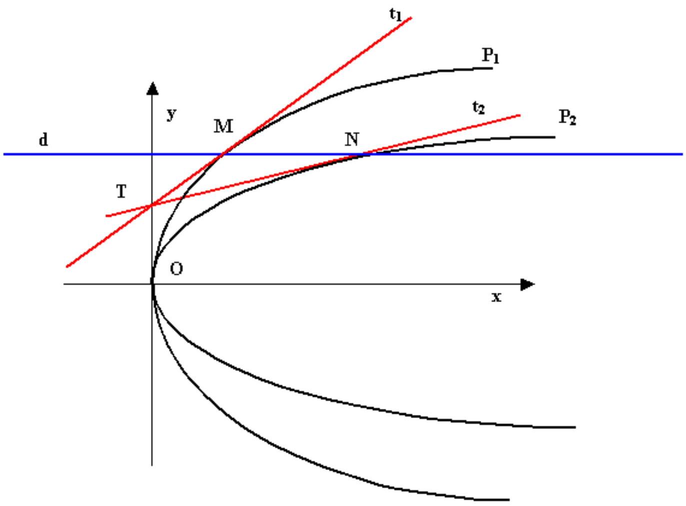
Eliminons m :

$$L \equiv (y-1)^2 = p(x+2) - \frac{p^2}{2}$$

C'est une parabole de même axe que la parabole donnée.

EXGAP043 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Une droite mobile parallèle à Ox coupe en M et N deux paraboles d'axes de symétrie Ox, dont les sommets sont confondus à l'origine des axes et dont les foyers ont une abscisse positive.
Déterminer le lieu du point d'intersection T des tangentes menées en M et N à ces paraboles.
Démontrer que la position du point T reste indépendante du choix des abscisses des foyers des paraboles.



$$d \equiv y = \lambda$$

$$P_1 \equiv y^2 = 2p_1 x$$

$$P_2 \equiv y^2 = 2p_2 x$$

$$M : \left(\frac{\lambda^2}{2p_1}, \ \lambda \right)$$

$$\begin{cases} f_x' = -2p_1 \\ f_y' = 2y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f_{x_M}' = -2p_1 \\ f_{y_M}' = 2\lambda \end{cases} \rightarrow t_1 \equiv y - \lambda = \frac{p_1}{\lambda}\left(x - \frac{\lambda^2}{2p_1} \right)$$

De même : $t_2 \equiv y - \lambda = \dfrac{p_2}{\lambda}\left(x - \dfrac{\lambda^2}{2p_2} \right)$

Le lieu de T est donné par : $\dfrac{p_1}{\lambda}\left(x - \dfrac{\lambda^2}{2p_1} \right) = \dfrac{p_2}{\lambda}\left(x - \dfrac{\lambda^2}{2p_2} \right)$

$\rightarrow \quad p_1 x - \dfrac{\lambda^2}{2} = p_2 x - \dfrac{\lambda^2}{2} \quad \rightarrow \quad x = 0 \quad$ Axe Oy

Coordonnées de T :

$x_T = 0 \quad y_T - \lambda = -\dfrac{p_1}{\lambda}\dfrac{\lambda^2}{2p_1} = -\dfrac{\lambda}{2} \quad \rightarrow \quad y = \dfrac{\lambda}{2}$

Le point T est donc indépendant des foyers.

EXGAP044 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit l'espace euclidien E^2, muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy. Former l'équation du lieu géométrique des points dont les distances aux poins (-3, 0) et (3, 0) ont une différence constante en valeur absolue égale à 5.
Écrivez les équations des tangentes et des normales au lieu en ses points d'abscisse –7.

C'est une hyperbole de centre (0, 0).

La différence aux foyers $= 5 \rightarrow \quad 2a = 5 \quad \rightarrow \quad a^2 = \dfrac{25}{4}$

La distance du centre à un foyer $= 3 \rightarrow 3 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \rightarrow \quad b^2 = \dfrac{11}{4}$

$$\rightarrow \quad H \equiv \frac{x^2}{\frac{25}{4}} - \frac{y^2}{\frac{11}{4}} = 1 \quad \rightarrow \quad 44x^2 - 100y^2 - 275 = 0$$

$$\begin{cases} f_x' = 88x \\ f_y' = -200y \end{cases} \quad \rightarrow \quad \frac{f_x'}{f_y'} = -\frac{88x}{200y}$$

D'autre part si $x = 7 \rightarrow \quad 44.49 - 100y^2 - 275 = 0 \quad \rightarrow \quad y = \pm 4,337$

L'équation d'une tangente en un point P est :

$$y - y_P = \frac{f_{x_P}'}{f_{y_P}'}(x - x_p) \quad \rightarrow$$

$$t_1 \equiv y - 4,337 = -\frac{88.7}{200.4,337}(x+7) \quad \rightarrow \quad y - 4,337 = -0,71\,(x+7)$$

$$t_1 \equiv y + 4,337 = -\frac{88.7}{200.(-4,337)}(x+7) \quad \rightarrow \quad y + 4,337 = +0,71\,(x+7)$$

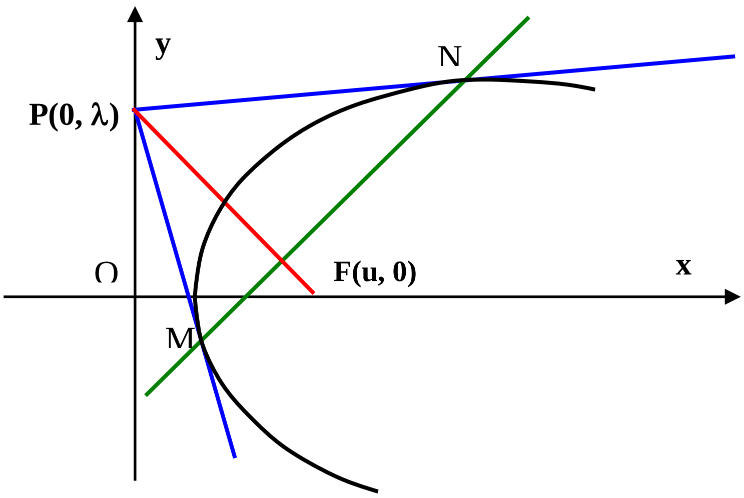
Et les normales :

$$n_1 = y - 4,337 = 1,408\,(x+7)$$

$$n_2 = y + 4,337 = -1,408\,(x+7)$$

EXGAP045 – Lupsin et Graas.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy. Démontrer que la corde de contact des tangentes issues d'un point P situé sur une directrice d'une conique est perpendiculaire à la droite qui joint P au foyer.



Si la directrice est l'axe Oy, alors les coniques sont de la forme :

$(x-u)^2 + y^2 = \mu x^2$ (Voir note)

ou $(1-\mu)x^2 + y^2 - 2ux + u^2 = 0$

$P\ :\ (0, \lambda,)$ en coordonnées homogènes.

$\rightarrow\quad MN \;\equiv\; 0.f_x' + \lambda.f_y' + 1.f_z' = 2\lambda y - 2ux + 2u^2 = 0$

$$\rightarrow\quad m_{MN} = \frac{u}{\lambda}$$

Or la droite $PF \equiv uy + \lambda x - u\lambda = 0$

$$\rightarrow\quad m_{PF} = -\frac{\lambda}{u}$$

$\rightarrow\quad MN \perp PF$

NOTE

L'équation focale d'une parabole est : $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$

L'équation focale d'une ellipse ou d'une parabole est :

$(x-c)^2+y^2=\frac{c^2}{a^2}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)^2$

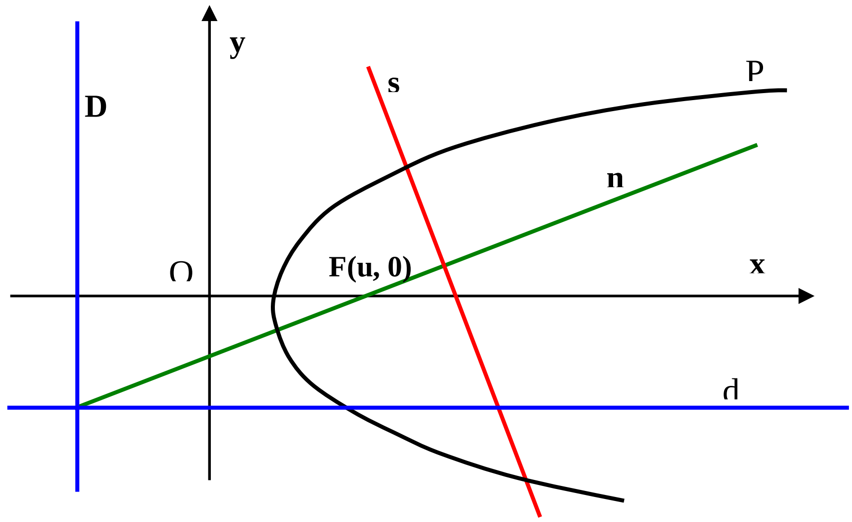
Si la directrice est confondue avec l'axe des x, alors $p=0$ (pour la parabole) et $a=0$ pour l'ellipse et l'hyperbole.

Dans tous les cas, l'équation focale est de la forme :

$(x-u)^2+y^2=\mu x^2$

EXGAP046 – Lupsin et Graas.

Soit l'espace euclidien E², muni d'une origine O et d'un repère orthonormé xy.
Démontrer que la perpendiculaire abaissée du foyer sur une corde d'une parabole rencontre le diamètre conjugué à la corde sur la directrice



$P \equiv y^2 - 2px = 0$

$D \equiv 2x + p = 0$

$s \equiv y - \lambda x - \beta = 0$

$d \equiv \lambda y - p = 0$ (Voir note)

$n \equiv 2\lambda y + 2x - p = 0$

$D,\ n$ et s sont concourantes car :

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & p \\ \lambda & 0 & -p \\ 2\lambda & 2 & -p \end{vmatrix} = 2\lambda p \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

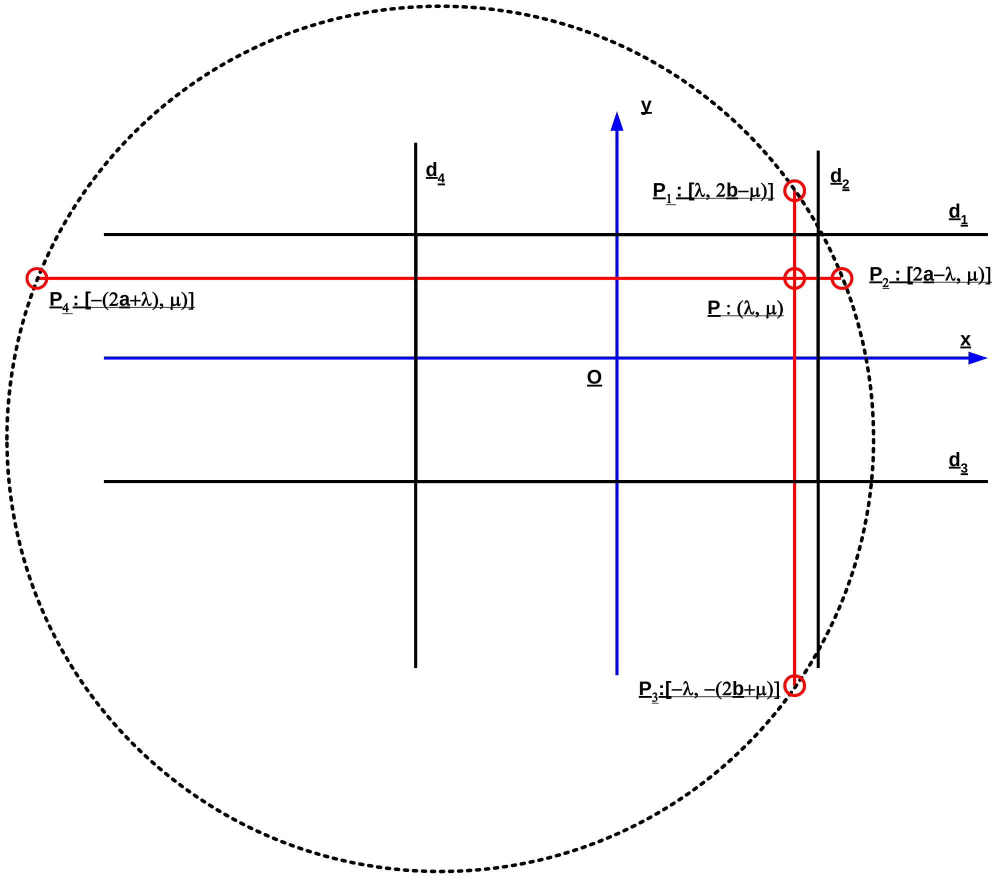
NOTE

Le diamètre conjugué à une corde de pente λ est donné par : $f_x' + \lambda f_y' = 0$

ici: $\begin{cases} f_x' = -2p \\ f_y' = 2y \end{cases} \rightarrow\ -2p + 2\lambda y = 0 \ \rightarrow\ \lambda y - p = 0$

EXGAP047 – **Liège, juillet 2001.**

On donne quatre droites distinctes d1, d2, d3 et d4 « formant rectangle », c'est-à-dire telles que d1//d3, d2//d4 et d1⊥d2.
Quelle est le lieu des points P dont les symétriques orthogonaux P1, P2, P3 et P4 par rapport aux droites respectives d1, d2, d3 et d4 sont sur un même cercle ?
On précisera notamment la nature géométrique du lieu.



Considérons que le rectangle est de dimensions $2a \times 2b$.
Mettons un repère orthonormé d'axes x et y au centre du rectangle.
Soit (λ, μ), les coordonnées du point P.
Les coordonnées des symétriques sont :
$P_1[\lambda, 2b-\mu]$ $P_2[2a-\lambda, \mu]$ $P_3[-\lambda, -(2b+\mu)]$ $P_4[-(2a+\lambda), \mu]$
Ces points satisfont à l'équation d'un cercle de rayon R et d'équation :
$(x-p)^2+(y-q)^2=R^2$
On obtient le système suivant :

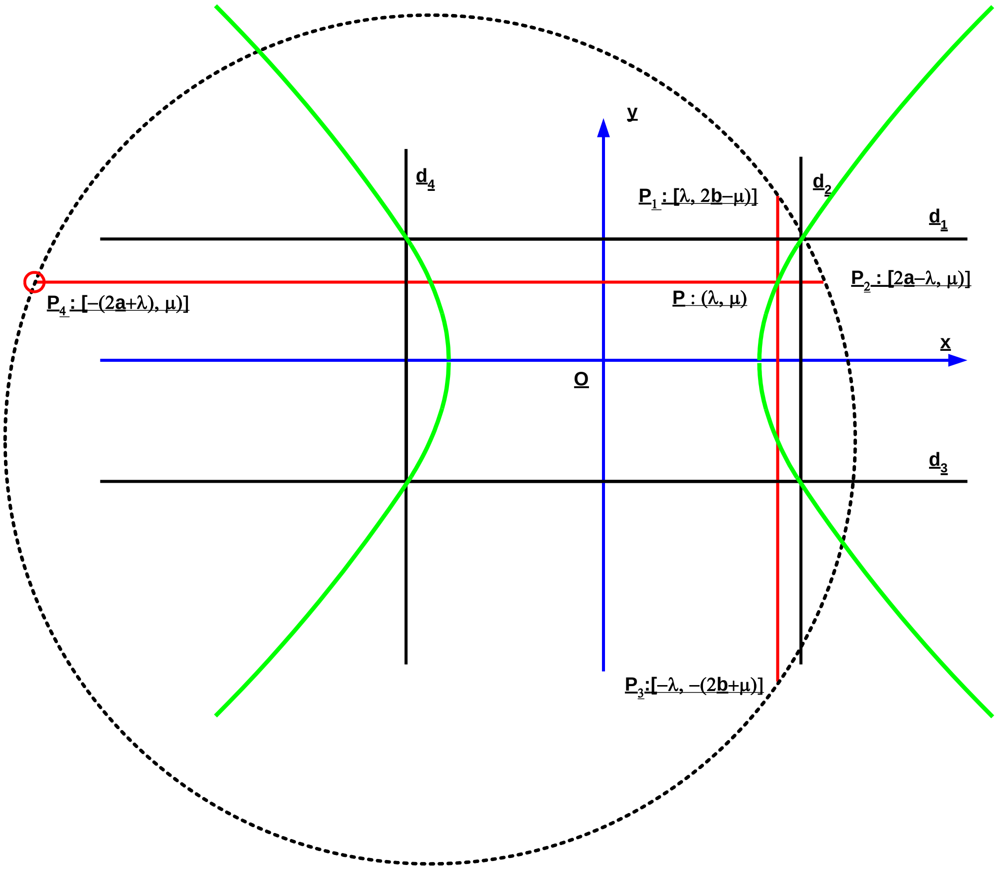
$$\begin{cases} (\lambda-p)^2+(2b-\mu-q)^2=R^2 & (1) \\ (2a-\lambda-p)^2+(\mu-q)^2=R^2 & (2) \\ (\lambda-p)^2+(-2b-\mu-q)^2=R^2 & (3) \\ (-2a-\lambda-p)^2+(\mu-q)^2=R^2 & (4) \end{cases}$$

Faisons $(1)-(3)$:
$(2b-\mu-q+2b+\mu+q)(2b-\mu-q-2b-\mu-q)=0$
$\rightarrow\ 8b(\mu+q)=0 \ \rightarrow\ \mu=-q$
Faisons $(2)-(4)$:
$(2a-\lambda-p+2a+\lambda+p)(2a-\lambda-p-2a-\lambda-p)=0$
$\rightarrow\ 8a(\lambda+p)=0 \ \rightarrow\ \lambda=-p$

Remplaçons dans les équations (1) et (2)

$$\begin{cases} 4\lambda^2+4b^2=R^2 \\ 4a^2+4\mu^2=R^2 \end{cases} \rightarrow\ \lambda^2-\mu^2=a^2-b^2$$

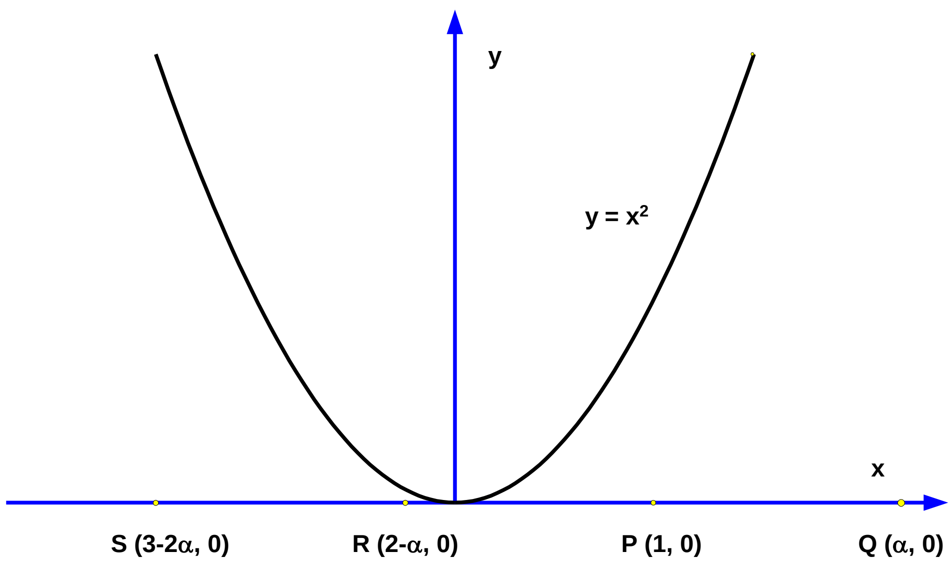
L'équation du lieu cherché est donc : $\boxed{x^2-y^2=a^2-b^2}$
a) si $a^2>b^2$: hyperbole équilatère. Les deux foyers sont sur l'axe des x.
b) si $a^2<b^2$: hyperbole équilatère. Les deux foyers sont sur l'axe des y.
c) si $\mathrm{a}^2=b^2$: le rectangle devient un carré et l'hyperbole dégnére en deux droites qui sont les diagonales du carré.


y
d_4
P_1 : [λ, 2b−μ)]
d_2
d_1
P_2 : [2a−λ, μ)]
P_4 : [−(2a+λ), μ)]
P : (λ, μ)
x
O
d_3
P_3:[−λ, −(2b+μ)]

EXGAP048 – Liège, septembre 2001.

Dans un repère orthonormé, on considère une parabole d'équation $y = x^2$ et le point P(1, 0).
Si Q est un point de l'axe Ox, on note R le symétrique de Q par rapport à P et S le symétrique de P par rapport à R.

a) Si Q est de coordonnées (α, 0) quelles sont les coordonnées de R ?
b) Pour quelle(s) valeur(s) de α les points Q et S coïncident-ils ?
c) Quelles sont les équations des tangentes à la parabole issues de Q ?
d) Quelles sont les équations des tangentes à la parabole issues de S ?
e) Quel est le lieu des points communs aux tangentes à P menées par Q et S et ne passant pas par le sommet de la parabole ?



$a)\ |PQ| = |RP| = \alpha - 1$

$Or\quad RP = RO + OP = RO + 1 \ \rightarrow\ \boxed{OR = 2 - \alpha}$

$b)\ \ OS = OR + RS = 2 - \alpha - \alpha + 1 = 3 - 2\alpha$

Q et S coïncideront quant : $\alpha = 3 - 2\alpha \ \rightarrow\ \boxed{\alpha = 1}$

$c)$ Tangentes issues de Q :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = m(x - \alpha) \end{cases} \ \rightarrow\ x^2 - mx + m\alpha = 0$$

Il faut que : $\Delta = m^2 - 4m\alpha = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} m = 0 \\ m = 4\alpha \end{cases}$

Les tangentes sont donc : $\boxed{y = 0}$ $\quad et \quad$ $\boxed{y = 4\alpha(x - \alpha)}$

$d)$ Tangentes issues de S :

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = mx + m(2\alpha - 3) \end{cases} \ \rightarrow\ x^2 - mx + m(2\alpha - 3) = 0$$

Il faut que : $\Delta = m^2 + 4m(2\alpha - 3) = 0 \ \rightarrow\ \begin{cases} m = 0 \\ m = 4(3 - 2\alpha) \end{cases}$

Les tangentes sont donc : $\boxed{y = 0}$ $\quad et \quad$ $\boxed{y = 4(3 - 2\alpha)(x + 2\alpha - 3)}$

$e)$ Le lieu est donné par :

$$\begin{cases} y = 4\alpha(x - \alpha) \\ y = 4(3 - 2\alpha)(x + 2\alpha - 3) \end{cases} \rightarrow 4\alpha(x - \alpha) = 4(3 - 2\alpha)(x + 2\alpha - 3)$$

$\rightarrow\ x(1 - \alpha) = (\alpha - 1)(\alpha - 3)$

En vertu du point b), on peut simplifier par $1 - \alpha$

$\rightarrow\ x = 3 - \alpha$

Le lieu est donc une parabole d'équation:

$y = 4\alpha(x - \alpha) \ \rightarrow\ \boxed{y = 4(3 - x)(2x - 3)}$

EXGAP049 – Mons, questions posées entre 1995 et 1998

On donne une conique d'équation :

$$(x-2)(y-3)=12$$

On demande :

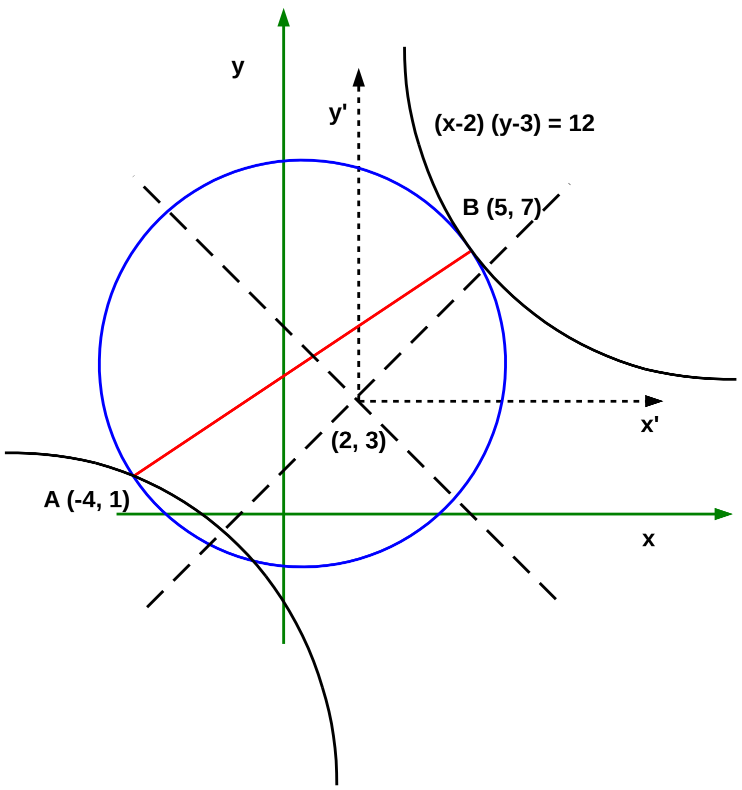
a) D'en préciser la nature

b) D'en donner les coordonnées du centre

c) De donner l'équation de son ou de ses axe(s) de symétrie.

d) On coupe cette conique par la droite d d'équation 3y = 2x +11. Calculer les coordonnées des points d'intersections (A et B) de d avec la conique.

e) D'écrire l'équation du lieu des points d'où l'on voit le segment AB sous un angle droit.



$a)$ Il s'agit d'une hyperbole équilatère.

$b)$ Son centre est le point $(2,\ 3)$. Par rapport à un repère $(x',\ y')$ centré en $(2,\ 3)$, son équation est : $x'.y'=12$

$c)$ Les axes de symétrie sont $y'=x'$ et $y'=-x'$ dans le repère $(x',\ y')$.

$\rightarrow$ Dans le repère (x,y), $\begin{cases} y=x+1 \\ y=-x+5 \end{cases}$

$d)$ Intersection avec $d \equiv 3y=2x+11$

$$\begin{cases} xy-2y-3x-6=0 \\ 3y=2x+11 \end{cases} \rightarrow x^2-x-20=0 \rightarrow \begin{cases} x=5 \rightarrow y=7 \\ x=-4 \rightarrow y=1 \end{cases}$$

$e)$ C'est un cercle de centre O et de rayon égal à $AB/2$

Coordonnées du centre $O\left[(5\text{-}4)/2,(7+1)/2\right]$ soit $[1/2,\ 4]$

$$R^2=\frac{AB^2}{4}=\frac{\left(5-(-4)\right)^2+(7-1)^2}{4}=\frac{117}{4}$$

Equation du cercle : $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y-4)^2=\frac{117}{4}$