

Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 6

EXGAP060 – EXGAP069

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

Avril 04

EXGAP060 – Louvain, juillet 2000, série 2.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé OXY , on considère deux droites mobiles AC et BD .

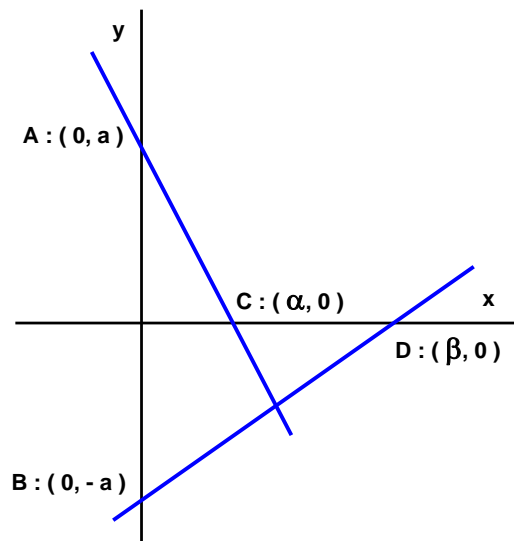
AC passe par le point fixe $A(0, a)$ et le point mobile C sur OX .

BD passe par le point fixe $B(0, -a)$ et le point mobile D sur OX .

C et D sont liés par le fait que $CD = k OD$ où k est une constante.

(CD et OD sont des vecteurs ou des segments orientés).

- Déterminer analytiquement l'équation cartésienne du lieu des points M d'intersection des droites AC et BD .
- Analyser et commenter ce lieu
- Dessiner les différents éléments et le lieu avec $a = 4$ cm ; $k = 1.2$

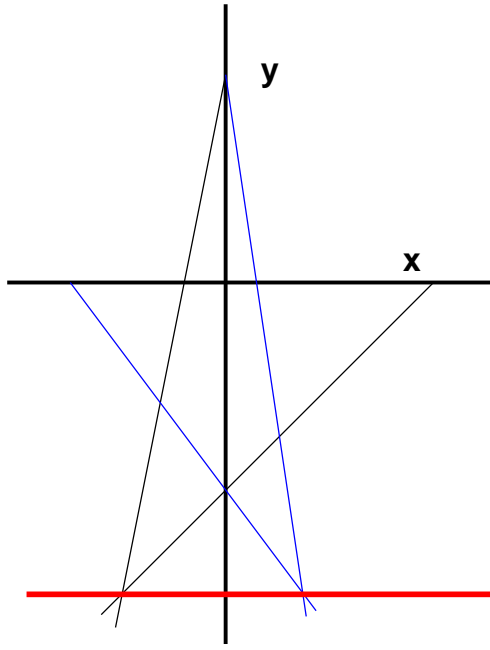


$$\beta - \alpha = k\beta \rightarrow \beta = \frac{\alpha}{1-k}$$

$$\begin{cases} AC \equiv \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{a} = 1 \\ BD \equiv \frac{1-k}{\alpha}x - \frac{y}{a} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{\alpha} = 1 - \frac{y}{a} \\ \frac{x}{\alpha} = \frac{1}{1-k} \left(1 + \frac{y}{a}\right) \end{cases} \rightarrow y = \frac{ak}{k-2}$$

C'est une droite parallèle à l'axe des x

$$\text{Si } a = 4 \text{ et } k = 1.2 \rightarrow y = -6$$

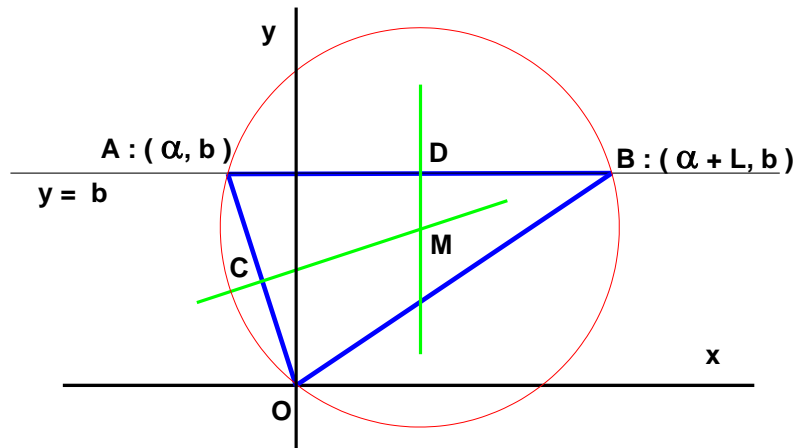


EXGAP061 – Louvain, septembre 2000.

Soit un triangle variable OAB dont le sommet O est à l'origine et le côté AB (de longueur constante L) sur la droite $y = b$.

Déterminer l'équation cartésienne du lieu du centre du cercle circonscrit à ce triangle, ainsi que sa nature.

- Si $L = 2b$, écrire l'équation explicite $y = f(x)$ du lieu.
- Dessiner le lieu dans le cas 2, avec $b = 4$ cm.



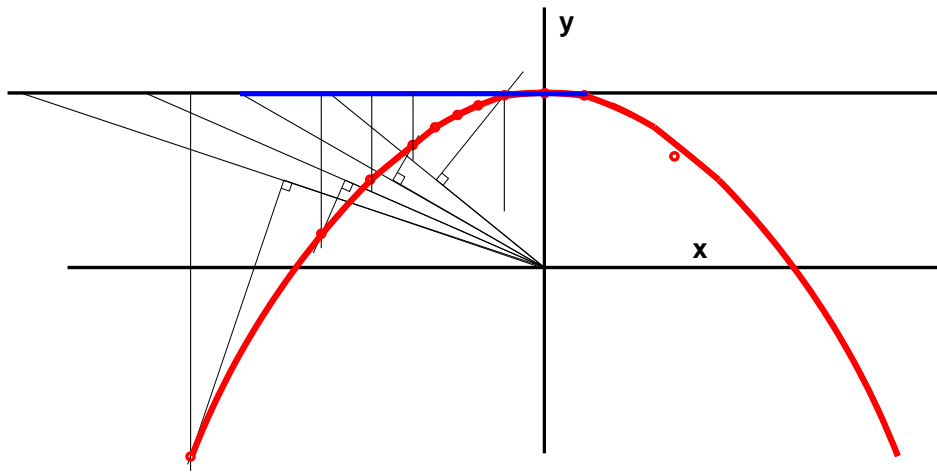
Le point M , centre du cercle circonscrit au triangle ABO , est déterminé par l'intersection des médiatrices CM et DM

$$\begin{cases} CM \equiv y - \frac{b}{2} = -\frac{\alpha}{b} \left(x - \frac{\alpha}{2} \right) \\ DM \equiv x = \alpha + \frac{L}{2} \end{cases} \rightarrow y - \frac{b}{2} = -\frac{x - \frac{L}{2}}{b} \left(x - \frac{L}{2} \right)$$

$$\rightarrow \boxed{y = -\frac{x^2}{2b} + \frac{L^2}{8b} + \frac{b}{2}} \quad \text{C'est l'équation d'une parabole d'axe } Oy$$

$$\text{Si } L = 2b \rightarrow \boxed{y = -\frac{x^2}{2b} + b} \quad \text{Le sommet est } (0, b)$$

$$\text{Si } b = 4 \rightarrow y = -\frac{x^2}{8} + 4$$



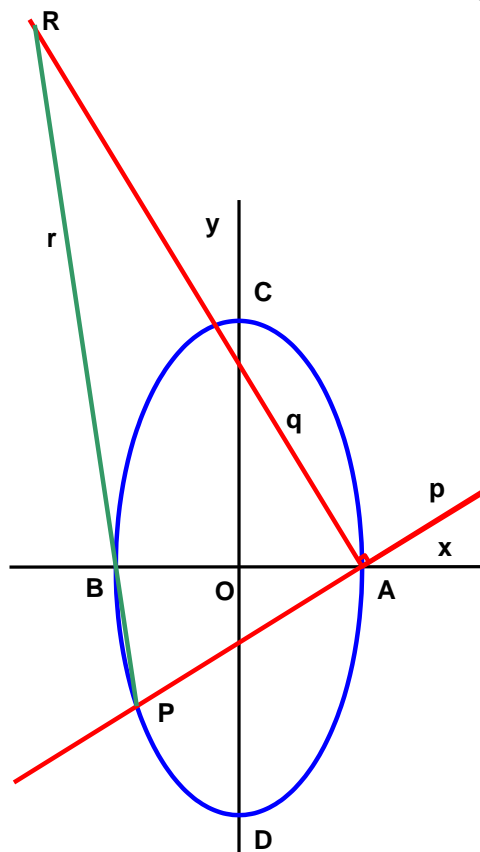
EXGAP062 – Louvain, juillet 2001, série 1.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les éléments suivants :

- Quatre points dont les coordonnées sont :
 $A: (a,0)$ $B: (-a,0)$
 $C: (0,2a)$ $D: (0,-2a)$
- Une ellipse e qui passe par ces quatre points,
- Deux droites mobiles p et q qui forment un angle droit mobile qui pivote autour de A
- Le point P qui est la seconde intersection de la droite p avec l'ellipse e
- Une troisième droite r qui passe par B et P .

On vous demande

1. De dessiner, avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème.
2. D'écrire l'équation de l'ellipse e ,
3. De déterminer les coordonnées du point P ,
4. De déterminer le lieu des intersections des droites q et r .



a) Equation de l'ellipse : $e \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{4a^2} = 1 \rightarrow 4x^2 + y^2 = 4a^2$ (1)

b) $p \equiv y = m(x - a)$ (2)

On remplace dans (1) pour obtenir les coordonnées de P

$$\rightarrow 4x^2 + (m(x - a))^2 = 4a^2 \rightarrow (4 + m^2)x - 2am^2x + a^2(m^2 - 4) = 0$$

On sait que $x = a$ est une solution de cette équation

Horner :	x^2	x	x^0
	$4 + m^2$	$-2am^2$	$a^2(m^2 - 4)$
	a	$4a + am^2$	$4a^2 - a^2m^2$
	$4 + m^2$	$4a - am^2$	0

$$\rightarrow (x - a)[(4 + m^2)x^2 + a(4 - m^2)] = 0 \rightarrow x_p = a \frac{m^2 - 4}{m^2 + 4}$$

On remplace dans (2) pour obtenir $y_p \rightarrow y_p = -\frac{8am}{m^2 + 4}$

c) $q \equiv y = -\frac{1}{m}(x - a)$ (3)

L'équation de r s'obtient en exprimant que la droite passe par B et P .

$$r \equiv \frac{y - 0}{-\frac{8am}{m^2 + 4} - 0} = \frac{x + a}{a \frac{m^2 - 4}{m^2 + a} + a} \rightarrow y = -\frac{4}{m}(x + a)$$
 (4)

On élimine m entre (3) et (4) \rightarrow le lieu recherché : $x = -\frac{5}{3}a$

C'est une droite parallèle à l'axe des y .

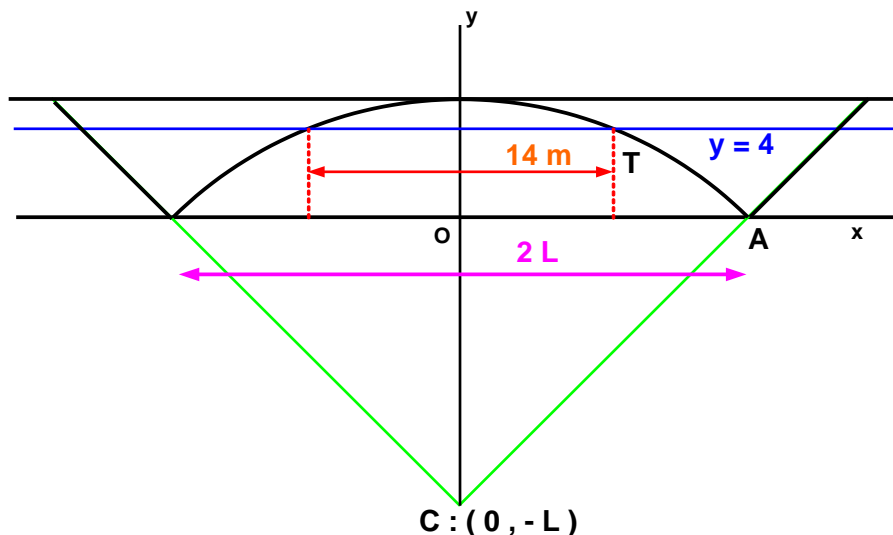
EXGAP063 – Louvain, juillet 2001, série 2.

On souhaite effectuer le dimensionnement d'un pont. Les contraintes architecturales et techniques sont les suivantes :

- Le pont se compose d'un arc de cercle dont les extrémités sont au niveau du sol et le sommet au milieu du pont,
- Un tablier horizontal repose sur l'arc de cercle.
- L'ouvrage d'art est coincé entre deux remblais dont la pente est 45° et qui sont le prolongement des rayons extrêmes de l'arc de cercle,
- La largeur à la base du pont vaut $2L$

On vous demande :

1. De dessiner, avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème,
2. De déterminer la valeur L afin que quatre véhicules d'une hauteur de 4 m et d'une largeur de 3.5 m (soit une largeur totale de 14 m donc !) puissent être placés sous l'ouvrage d'art.



Le triangle COA est rectangle isocèle, car la pente des remblais est de 45°

$\rightarrow OA = \sqrt{2} L$. C'est le rayon du cercle de centre $C : (0, -L)$

Le schéma définit le système de coordonnées.

Les quatre véhicules pourront se placer sous le pont si le point T , tel que définit sur le schéma, a pour coordonnées $(7, 4)$

Ce point T est l'intersection du cercle et de la droite $y = 4$

$$\rightarrow x^2 + (y + L)^2 = 2L^2 \rightarrow 7^2 + (4 + L)^2 = 2L^2 \rightarrow L^2 - 8L - 65 = 0$$

$$\rightarrow (L - 13)(L + 5) = 0 \rightarrow \boxed{L = 13 \text{ m}}$$

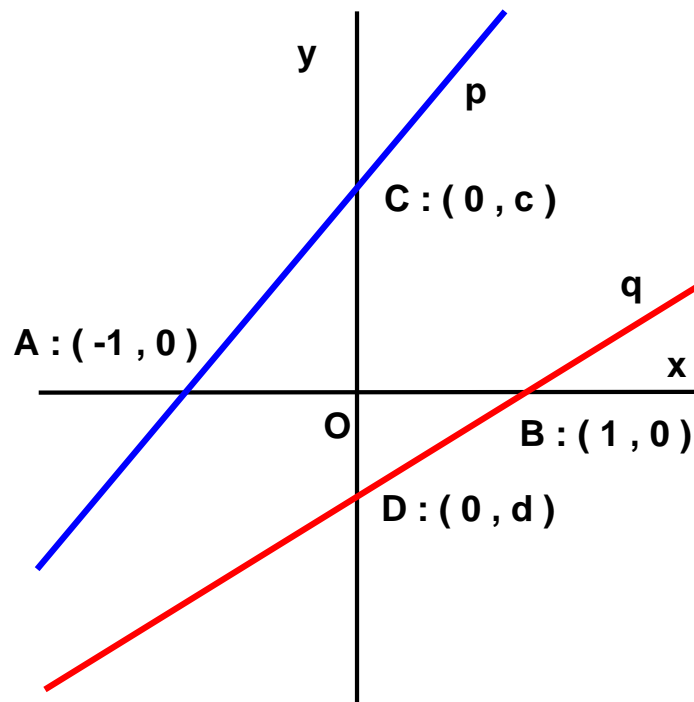
EXGAP064 – Louvain, septembre 2001.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé OXY , on considère les éléments suivants :

- Quatre points dont les coordonnées sont :
 $A:(-1,0)$ $B=(1,0)$ $C:(0,c)$ $D:(0,d)$
- La droite p passant par A et C
- La droite q passant par B et D

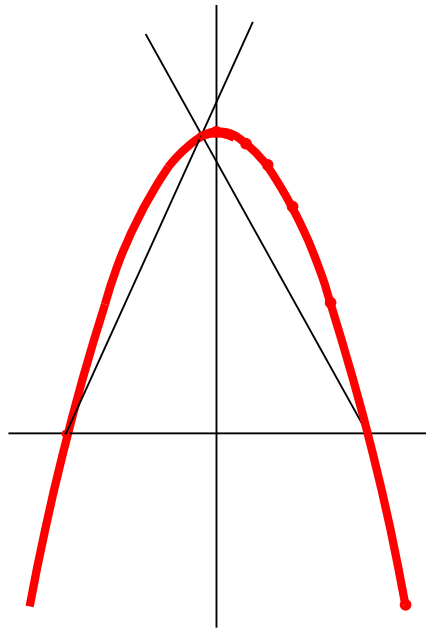
On vous demande :

1. De dessiner, avec le plus de soin possible, les différents éléments du problème,
2. D'écrire les équations des droites p et q en fonction des paramètres c et d
3. De déterminer le lieu de l'intersection des droites p et q si la somme de c et d vaut 4
4. De dessiner soigneusement ce lieu et de décrire la nature de la courbe obtenue.



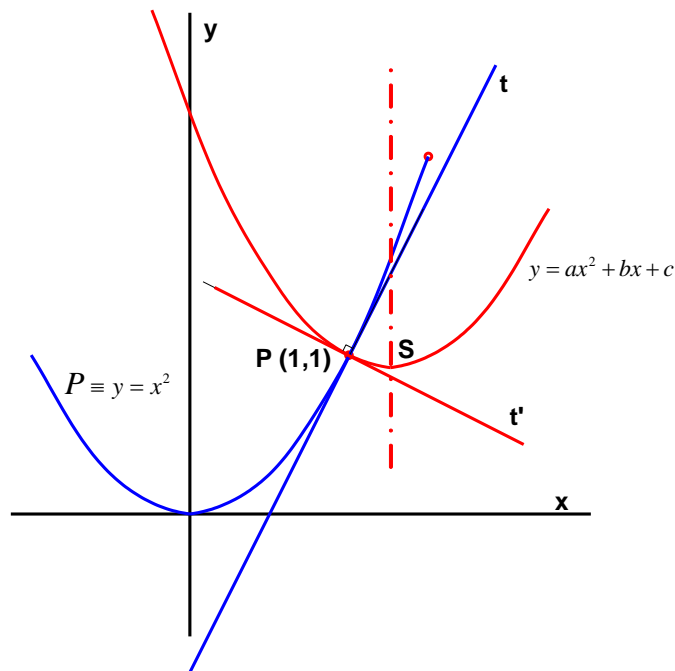
$$\begin{cases} p \equiv \frac{x}{-1} + \frac{y}{c} = 1 \\ q \equiv \frac{x}{1} + \frac{y}{d} = 1 \\ c + d = 4 \end{cases} \rightarrow \text{On \u00e9limine } c \text{ et } d \rightarrow \boxed{y = 2 - 2x^2}$$

C'est une parabole d'axe Oy et de sommet : $(0, 2)$



EXGAP065 – Liège, juillet 2002.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé Oxy , on note P la parabole d'équation $y = x^2$ et P le point de P d'abscisse 1. Quel est le lieu des sommets des paraboles d'axe parallèle à Oy et orthogonales à P en P (dire que deux paraboles sont orthogonales en P signifie qu'elles passent par P et que leurs tangentes en P sont perpendiculaires) ?



Soit $y = ax^2 + bx + c$ (1) l'équation d'une parabole orthogonale à P .

Elle passe par $P(1,1) \rightarrow a + b + c = 1$ (2)

Equation de $t \equiv y - 1 = 2(x - 1)$

Equation de $t' \equiv y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 1)$

Equation de t' dérivée de (1) $\equiv y - 1 = (2a + b)(x - 1)$

Par conséquent : $2a + b = -\frac{1}{2}$ (3)

Coordonnées du sommet de la parabole (1) : $\begin{cases} x = -\frac{b}{2a} & (4) \\ y = -\frac{b^2}{4a} + c & (5) \end{cases}$

Il reste à éliminer a, b et c entre (2), (3), (4) et (5)

$$\left. \begin{array}{l} (2) \rightarrow b = -\frac{1+4a}{2} \\ (4) \rightarrow b = -2ax \end{array} \right\} \rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4(x-1)} & (6) \\ b = -\frac{x}{2(x-1)} & (7) \end{cases}$$

$$\text{De (5), (6), (7)} \rightarrow y = -\frac{\left(\frac{x}{2(x-1)}\right)^2}{4 \frac{1}{4(x-1)}} \rightarrow c = y + \frac{x^2}{4(x-1)} \quad (8)$$

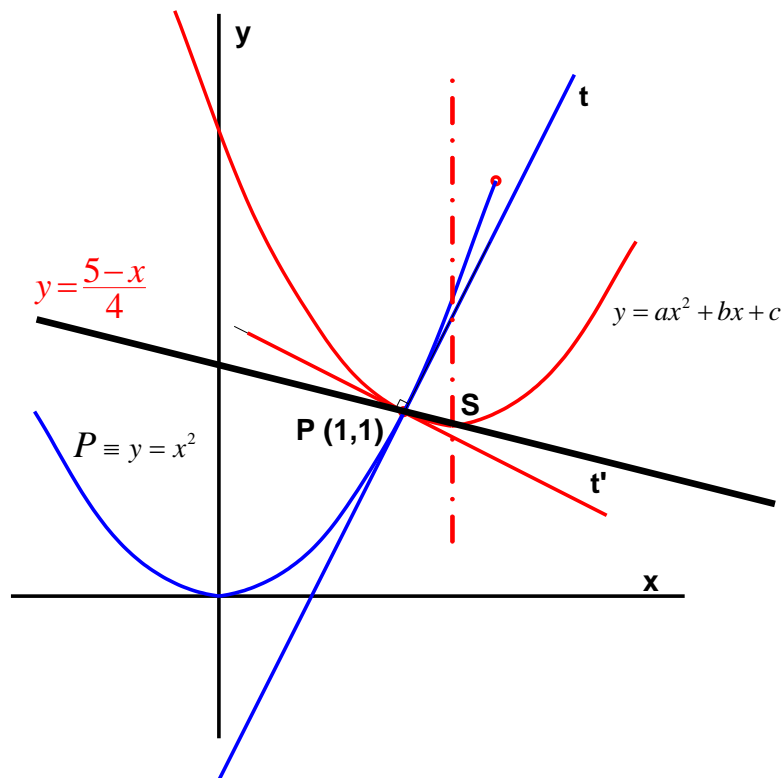
On remplace a, b, c dans (2) en utilisant (6), (7), (8)

$$\frac{1}{4(x-1)} - \frac{x}{2(x-1)} + y + \frac{x^2}{4(x-1)} = 1$$

$$\rightarrow x^2 + 4xy - 6x - 4y + 5 = 0$$

$$\rightarrow y = \frac{x^2 - 6x + 5}{4(1-x)} = \frac{(x-1)(x-5)}{4(1-x)} = \frac{1}{4}(5-x)$$

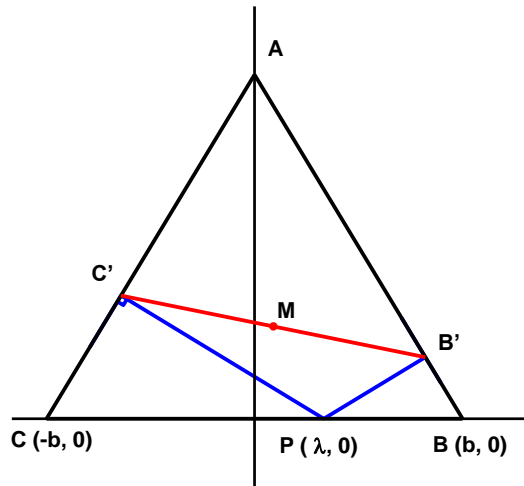
C'est une droite qui passe par P



EXGAP066 – Liège, septembre 2002.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé Oxy , on considère les points $A(0, a)$, $B(b, 0)$ et $C(-b, 0)$ formant un triangle isocèle ($a, b > 0$). On considère un point $P(\lambda, 0)$ variable sur Ox .

1. Quelles sont les coordonnées des pieds B' et C' des perpendiculaires abaissées de P sur AB et AC respectivement.
2. Quel est le lieu du milieu de $[B', C']$ lorsque P parcourt le segment $[B, C]$?
3. Quelle est l'équation de la droite perpendiculaire à $B'C'$ menée par P ? Montrer qu'elle passe par un point fixe quand P parcourt l'axe Ox .



$$1) \begin{cases} AB \equiv y = -\frac{a}{b}(x-b) \\ PB' \equiv y = \frac{b}{a}(x-\lambda) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{B'} = \frac{b(a^2 + \lambda b)}{a^2 + b^2} \\ y_{B'} = \frac{ab(b-\lambda)}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} AC \equiv y = \frac{a}{b}(x+b) \\ PC' \equiv y = -\frac{b}{a}(x-\lambda) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_{C'} = \frac{b(b\lambda - a^2)}{a^2 + b^2} \\ y_{C'} = \frac{ab(\lambda + b)}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

$$2) \text{ Donc : } \begin{cases} x_M = \frac{x_{B'} + x_{C'}}{2} = \frac{b^2 \lambda}{a^2 + b^2} \\ y_M = \frac{y_{B'} + y_{C'}}{2} = \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \end{cases}$$

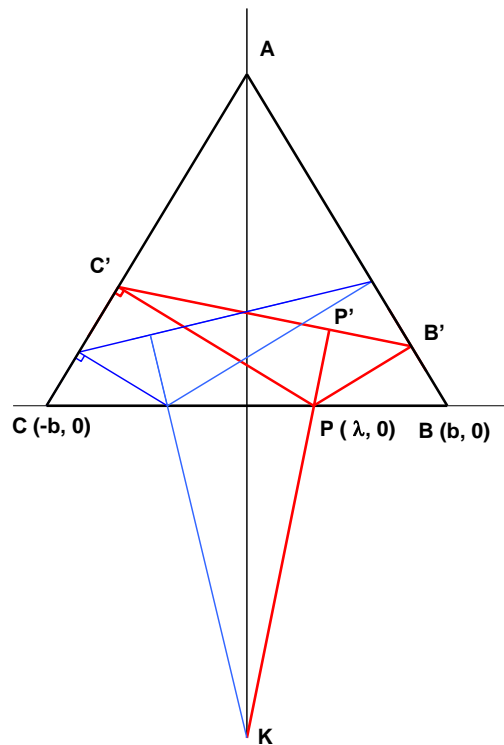
On constate que y_M est indépendant de λ . Le lieu cherché est donc

$$\text{une droite parallèle à l'axe des } x: y = \frac{ab^2}{a^2 + b^2}$$

P parcourt BC .

$$P \text{ en } B \rightarrow M \left(\frac{b^3}{a^2 + b^2}, \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \right)$$

$$P \text{ en } C \rightarrow M \left(-\frac{b^3}{a^2 + b^2}, \frac{ab^2}{a^2 + b^2} \right)$$



3) Coefficient angulaire de $B'C'$

$$\frac{\frac{ab(b-\lambda)}{a^2+b^2} - \frac{ab(\lambda+b)}{a^2+b^2}}{\frac{b(a^2+\lambda b)}{a^2+b^2} - \frac{b(b\lambda-a^2)}{a^2+b^2}} = -\frac{\lambda}{a}$$

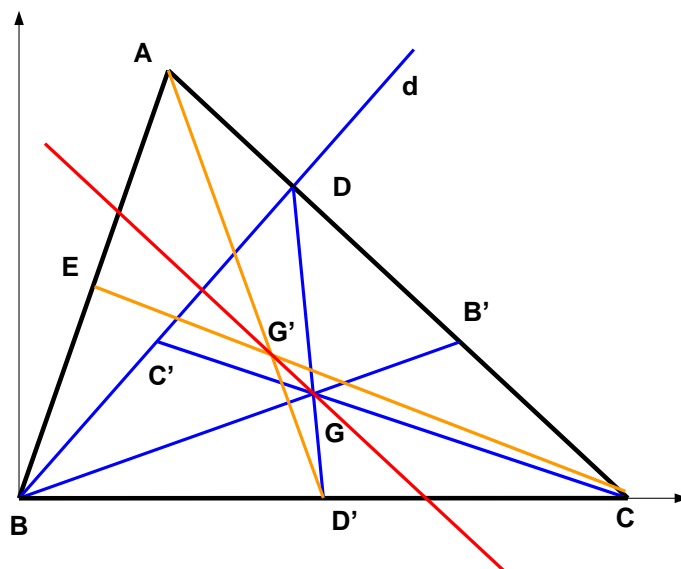
$$\rightarrow PP' \equiv y = \frac{a}{\lambda}(x - \lambda)$$

Si $x = 0$, $y = -a$. L'ordonnée à l'origine est indépendante de λ .

Les perpendiculaires sont donc concourantes en $K(0, -a)$

EXGAP067 – Liège, juillet 2003.

On considère un triangle ABC . Par B , on mène une droite d variable qui coupe AC en D . Déterminer l'équation cartésienne du lieu géométrique du centre de gravité du triangle ABD .



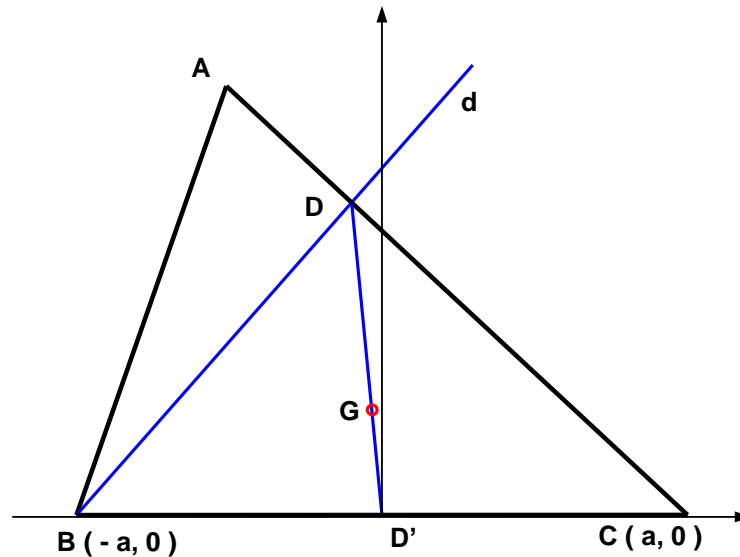
Méthode synthétique

Soit G' le centre de gravité du triangle ABC . $D'C'$ passe par E et est parallèle à AC (car C' est le milieu de BD , et E le milieu de AB)

La version affine forte du théorème de Pappus, nous permet de dire immédiatement que GG' est parallèle à AC .

Le lieu est donc une droite parallèle à AC passant par le centre de gravité du triangle ABC .

(Voir : Géométrie - Yves Ladegaillerie - Edition Ellipses 2003, p 116 et 122)



Méthode analytique

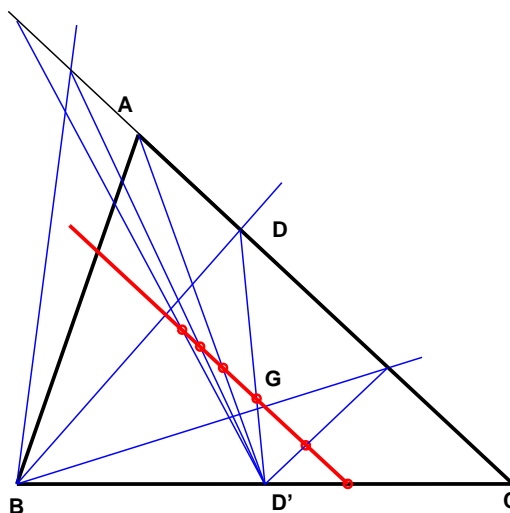
Mettons le repère en D' . Soit $|BC| = 2a$

Soit m le coefficient angulaire de AB , et μ celui de d

$$\begin{cases} BD \equiv y = \mu(x+a) \\ AC \equiv y = m(x-a) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_D = a \frac{m+\mu}{m-\mu} \\ y_D = am \left(\frac{m+\mu}{m-\mu} - 1 \right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{1}{3} x_D = \frac{a}{3} \cdot \frac{m+\mu}{m-\mu} \\ y_G = \frac{1}{3} y_D = \frac{am}{3} \left(\frac{m+\mu}{m-\mu} - 1 \right) \end{cases}$$

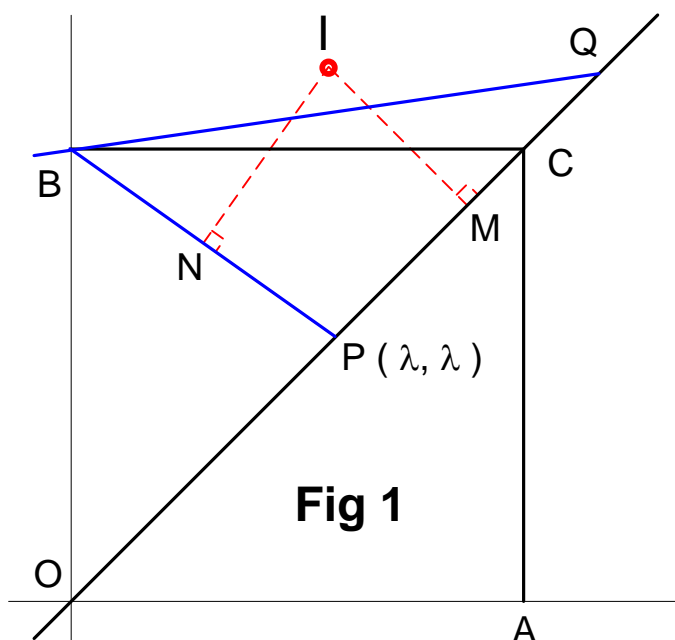
On élimine μ , et on obtient : $y = mx - \frac{m}{3}$ qui est bien l'équation d'une droite parallèle à AC .



EXGAP068 – Bruxelles, juillet 2004

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y , on donne les points fixes $A(6,0)$, $B(0,6)$ et $C(6,6)$. Deux points P et Q , sont mobiles sur la droite OC . L'abscisse de Q vaut le double de l'abscisse de P .

1. Déterminez le lieu géométrique (nature et équation) du centre du cercle circonscrit :
 - a. Au triangle BPQ
 - b. Au triangle OBP
 - c. Au triangle CBP
2. Représentez le lieu trouvé pour le triangle BPQ en prenant le centimètre comme unité de mesure.



Soit M le milieu de PC , N le milieu de BP . Le centre du cercle circonscrit I est situé à l'intersection des médiatrices élevées en M et N .

On a $P(\lambda, \lambda) \rightarrow Q(2\lambda, 2\lambda); M\left(\frac{3\lambda}{2}, \frac{3\lambda}{2}\right), N\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda+6}{2}\right)$

$\rightarrow m_{BP} = \frac{\lambda-6}{\lambda} \rightarrow m_{NI} = \frac{\lambda}{6-\lambda} \rightarrow NI \equiv y - \frac{\lambda+6}{2} = \frac{\lambda}{6-\lambda} \left(x - \frac{\lambda}{2}\right)$

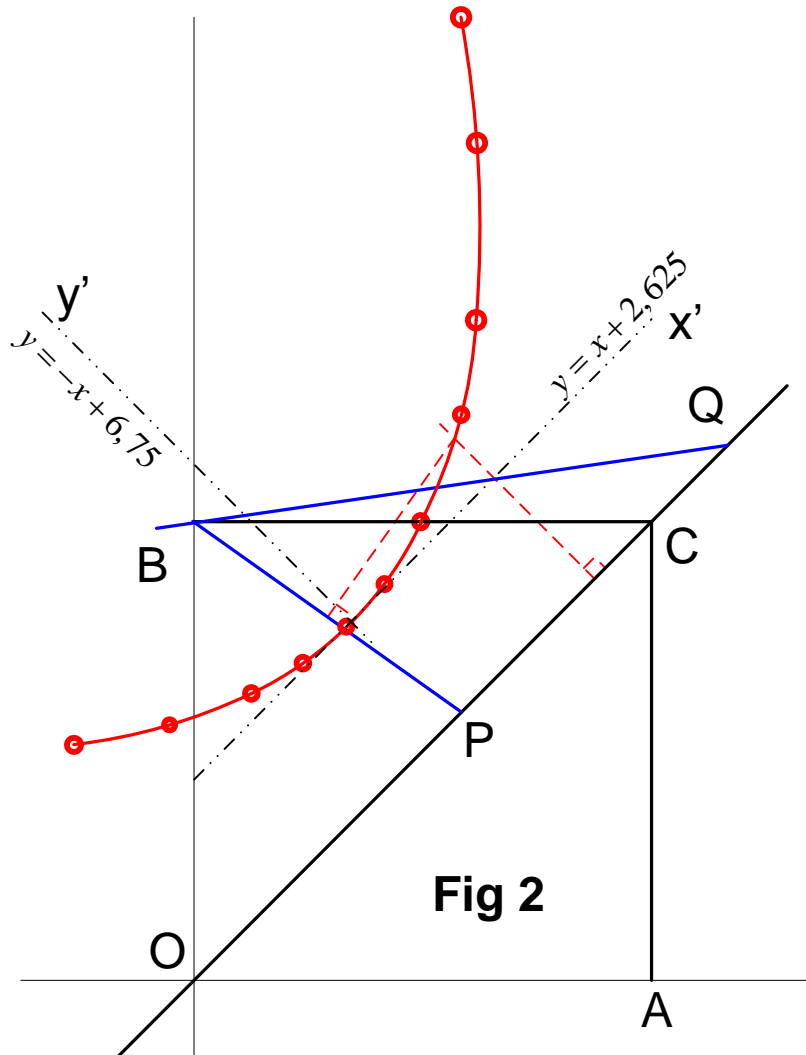
D'autre part : $m_{MI} = -1 \rightarrow MI \equiv y - \frac{3\lambda}{2} = -\left(x - \frac{3\lambda}{2}\right) \rightarrow \lambda = \frac{y+x}{3}$

On remplace dans l'équation de $NI \rightarrow y - \frac{\frac{y+x}{3} + 6}{2} = \frac{\frac{y+x}{3}}{6 - \frac{y+x}{3}} \left(x - \frac{y+x}{6}\right)$

On obtient : $x^2 + 2xy + y^2 - 27y + 81 = 0.$

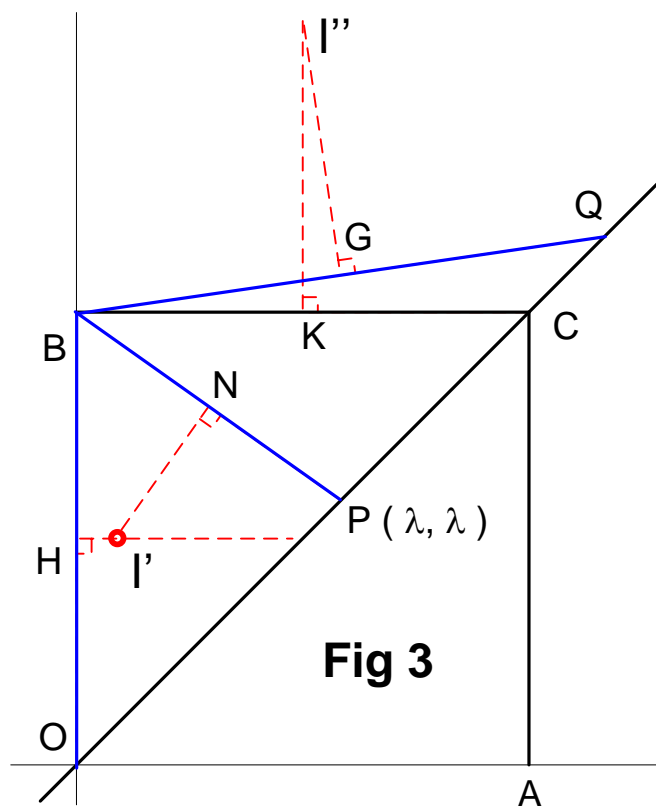
Comme $B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \times 1 \times 1 = 0$ (Rappel : On se réfère à la forme : $Ax^2 + Bxy + Cy^2$)

C'est une parabole. (Voir à la fin pour des compléments)



Pour le triangle OBP , le centre I' est l'intersection de HI' et NI' .
 Or il est immédiat que HI' , médiatrice de OB est indépendante de λ .
 HI' est donc le lieu cherché : $y = 3$

De même pour le triangle CBQ , KI'' est indépendant de λ , et est donc
 le lieu cherché : $x = 3$



Compléments

Bien que ce ne soit pas demandé dans la question cherchons les axes et le sommet de la parabole.

Les pentes m des axes d'une conique $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ sont données par $Bm^2 + 2(A - C)m - B = 0 \rightarrow 2m^2 + 2(1-1)m - 2 = 0 \rightarrow m = -1$

On pourrait donc réduire la parabole en faisant tourner les axes d'un angle de 45° .
Ce qui nous permettrait alors de trouver facilement l'axe et le sommet.

Utilisons une méthode plus simple.

Trouvons la tangente à la parabole parallèle à la direction 1.

Le point de tangence est le sommet cherché. L'axe sera la droite passant par le sommet et de direction -1 .

Les équations des tangentes à une conique, parallèles à une direction donnée, s'obtiennent par la formule.

$$(f'_x + mf'_y)^2 - 4(A + Bm + Cm^2)f(x, y) = 0$$

$$\text{On a } \begin{cases} f'_x = 2x + 2y \\ f'_y = 2x + 2y - 27 \end{cases}$$

$$\rightarrow (4x + 4y - 27)^2 - 4(4)(x^2 + 2xy + y^2 - 27y + 81) = 0$$

$$\rightarrow y = x + 2,625$$

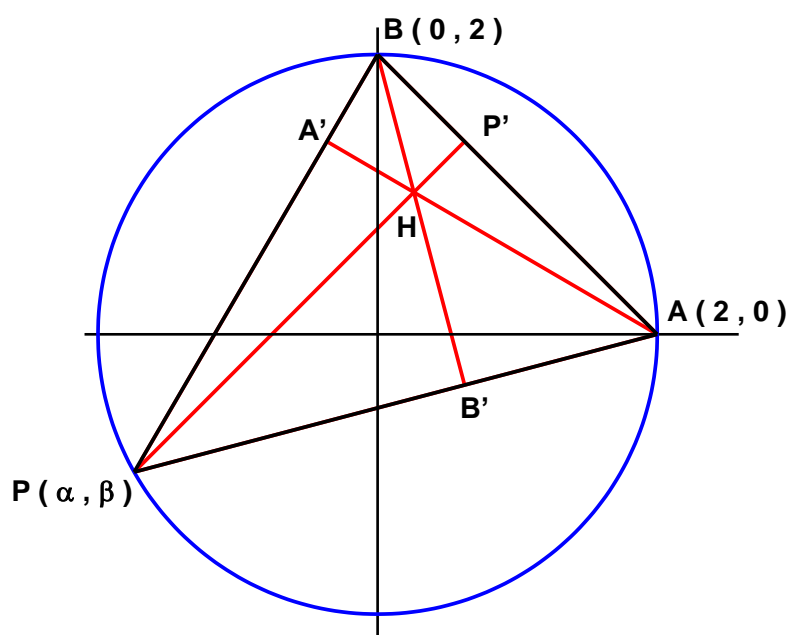
Pour obtenir les coordonnées du sommet, on remplace dans l'équation de la conique y par $x + 2,625$. Ce qui donne $x = 2,0625 \rightarrow y = 4,6875$.

Et finalement, l'équation de l'axe est : $y - 4,6875 = -(x - 2,0625) \rightarrow y = -x + 6,75$

EXGAP069 – Bruxelles, juillet 2003.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine O et d'axes X et Y , on donne le cercle d'équation $X^2 + Y^2 = 4$. On appelle respectivement A et B les points d'intersection du cercle avec les axes OX et OY . Soit H l'orthocentre (point d'intersection des hauteurs) du triangle ABP où P est un point qui parcourt le cercle donné.

- Etablissez une équation cartésienne du lieu parcouru par le point H
- Quelle est la nature de ce lieu ?



Première méthode

On écrit les équations de deux des hauteurs, et le lieu est donné par le système formé par ces équations en tenant compte que le point P décrit le cercle.

C'est parti :

$$m_{AB} = -1 \rightarrow m_{PP'} = 1 \rightarrow PP' \equiv y - \beta = x - \alpha \rightarrow \beta = y - x + \alpha \quad (1)$$

$$m_{PB} = \frac{2-\beta}{-\alpha} \rightarrow m_{AA'} = \frac{\alpha}{2-\beta} \rightarrow AA' \equiv y = \frac{\alpha}{2-\beta}(x-2) \rightarrow \beta = 2 - \alpha \frac{x-2}{y} \quad (2)$$

$$\text{De (1) et (2)} \rightarrow y - x + \alpha = 2 - \alpha \frac{x-2}{y} \rightarrow \alpha = \frac{y(2-y+x)}{x-2+y} \quad (3)$$

$$\text{On remplace } \alpha \text{ dans (1): } \rightarrow \beta = y - x + \frac{y(2-y+x)}{x-2+y} = \frac{x(y-x+2)}{x-2+y} \quad (4)$$

$$\text{Or } P \text{ satisfait l'équation du cercle } \rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 4 \quad (5)$$

Il reste à éliminer α et β entre (3), (4) et (5). Après des calculs fastidieux et assez longs, on trouve :

$$(-x+y-2)(-x+y+2)(x^2-4x+y^2-4y+4) = 0$$

Les deux premiers facteurs sont des lieux parasites.

Le lieu qui nous intéresse est :

$$x^2 - 4x + y^2 - 4y + 4 = 0 \rightarrow \boxed{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4}$$

C'est un cercle de centre $(2,2)$ et de rayon 2.

Deuxième méthode

On peut éviter tous ces calculs laborieux, si on se souvient d'une propriété de l'orthocentre d'un triangle : Son symétrique par rapport à un côté du triangle est sur le cercle circonscrit au triangle (Voir EXGSP 064).

Par conséquent H décrit le cercle symétrique du cercle donné par rapport à la corde AB .

$$\text{Son équation est : } (x-x')^2 + (y-y')^2 = 4$$

Et comme ce cercle passe par A et B , l'équation du cercle est :

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$$

Cette exercice montre une fois de plus qu'il ne faut pas foncer trop vite.

Prenez la peine de réfléchir, avant d'agir.

