Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 7

EXGAP070 – EXGAP079

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

Avril 04

EXGAP070 – FACS, ULB, Bruxelles septembre 2003.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé d'origine *O* et d'axes *X* et *Y*, on donne la parabole d'équation $Y^2 = 32X$. On appelle *F* son foyer. Une droite variable *d* passant par *F* coupe la parabole aux points *A* et *B*. Soit *C* le centre du cercle circonscrit au triangle *OAB*.

a) Etablissez une équation cartésienne du lieu parcouru par le point *C*.
b) Quelle est la nature de ce lieu ?

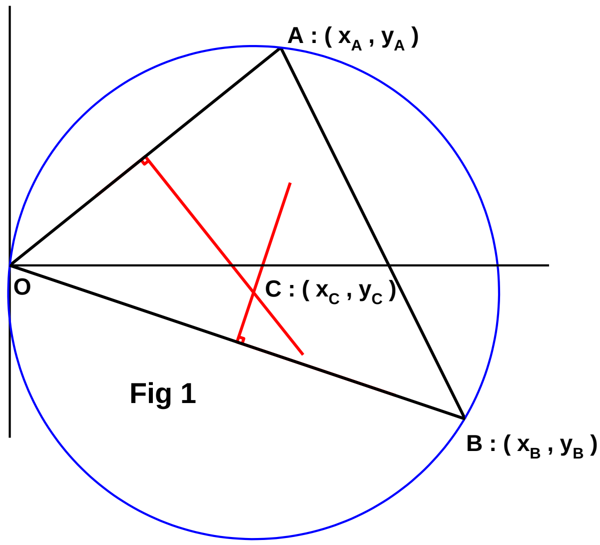


Fig 1

Calcul préparatoire

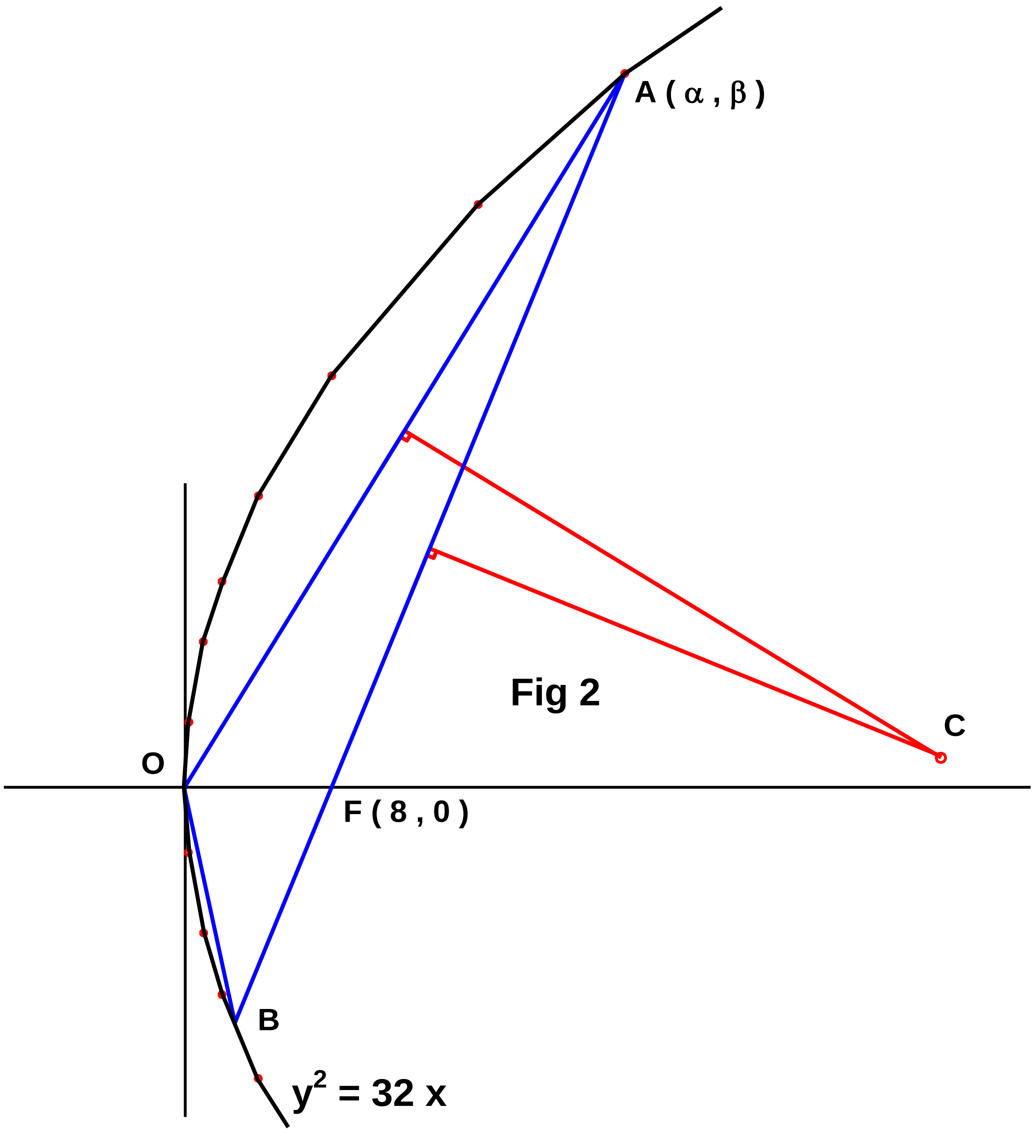
Etablissons les formules donnant les coordonnées du centre du cercle circonscrit à un triangle dont on connaît les coordonnées des sommets, un des sommet étant situé à l'origine : C est à égale distance des sommets (Fig 1).

$$\left|\overrightarrow{OC}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CA}\right|^2 = \left|\overrightarrow{CB}\right|^2$$

$$\rightarrow \begin{cases} (x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 = x_C^2 + y_C^2 \\ (x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = x_C^2 + y_C^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_A x_C + y_A y_C = \dfrac{1}{2}\left(x_A^2 + y_A^2\right) \\ x_B x_C + y_B y_C = \dfrac{1}{2}\left(x_B^2 + y_B^2\right) \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{y_B\left(x_A^2 + y_A^2\right) - y_A\left(x_B^2 + y_B^2\right)}{x_A y_B - x_B y_A} \\ y_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{x_A\left(x_B^2 + y_B^2\right) - x_B\left(x_A^2 + y_A^2\right)}{x_A y_B - x_B y_A} \end{cases} \qquad (1)$$

Nous nous servirons de ces formules plus tard.


A (α , β)
Fig 2
C
O
F (8 , 0)
B
y2 = 32 x

Résolution

Le foyer a pour coordonnées : $F(8,0)$.

Soit $A(\alpha,\beta)$ qui parcourt la parabole.

$$AB \equiv y = \frac{\beta}{\alpha-8}(x-8) \qquad \text{avec} \qquad \beta = \sqrt{32\alpha}$$

$$\rightarrow AB \equiv y = \frac{\sqrt{32\alpha}}{\alpha-8}(x-8)$$

Soit $B(x_A, y_B)$, cherchons ces coordonnées.

$$y_B = -\sqrt{32x_B} \quad \rightarrow \quad \sqrt{32x_B} = \frac{\sqrt{32\alpha}}{\alpha-8}(x_B-8)$$

On développe et on réarrange : $\alpha x_B^2 - (\alpha^2+64)x_B + 64\alpha = 0$

On sait que α est une solution de cette équation, donc par Horner :

	2	1	0
	α	$-(\alpha^2+64)$	64α
α		α^2	-64α
	α	-64	0

$$\rightarrow (x_B-\alpha)(\alpha x_B - 64) = 0$$

La solution α correspond au point *A*.

$$\rightarrow x_B = \frac{64}{\alpha} \rightarrow y_B = -32\sqrt{\frac{2}{\alpha}} \qquad (\text{Attention au signe } -)$$

Conclusions : $\begin{cases} x_A = \alpha \\ y_A = \sqrt{32\alpha} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_B = \dfrac{64}{\alpha} \\ y_B = -32\sqrt{\dfrac{2}{\alpha}} \end{cases}$

Pour obtenir les coordonnées de C, il nous suffit de remplacer dans les formules (1) :

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{-32\sqrt{\dfrac{2}{\alpha}}\left(\alpha^2+32\alpha\right)-\sqrt{32\alpha}\left(\left(\dfrac{64}{\alpha}\right)^2+\left(32\sqrt{\dfrac{2}{\alpha}}\right)^2\right)}{-\alpha.32\sqrt{\dfrac{2}{\alpha}}-\dfrac{64}{\alpha}.\sqrt{32\alpha}} \\ y_C = \dfrac{1}{2}\dfrac{\alpha\left(\left(\dfrac{64}{\alpha}\right)^2+32^2\dfrac{2}{\alpha}\right)-\dfrac{64}{\alpha}\left(\alpha^2+32\alpha\right)}{-\alpha.32\sqrt{\dfrac{2}{\alpha}}-\dfrac{64}{\alpha}.\sqrt{32\alpha}} \end{cases}$$

Après quelques calculs (un peu fastidieux), on arrive à

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\alpha^2+24\alpha+64}{2\alpha} \\ y_C = \dfrac{\alpha-8}{\sqrt{2\alpha}} \end{cases}$$

Et finalement, il nous reste à éliminer α pour obtenir le lieu de C

$$\begin{cases} 2\alpha x_C = \alpha^2+24\alpha+64 \\ 2\alpha y_C^2 = (\alpha-8)^2 \end{cases} \rightarrow \quad 2\alpha x_C - 2\alpha y_C^2 = 40\alpha$$

$$\rightarrow \boxed{y^2 = x-20}$$

Le lieu de C est une parabole de sommet $(20, 0)$,

de foyer $(20.25, 0)$ et d'axe Ox $(\text{Fig } 3)$

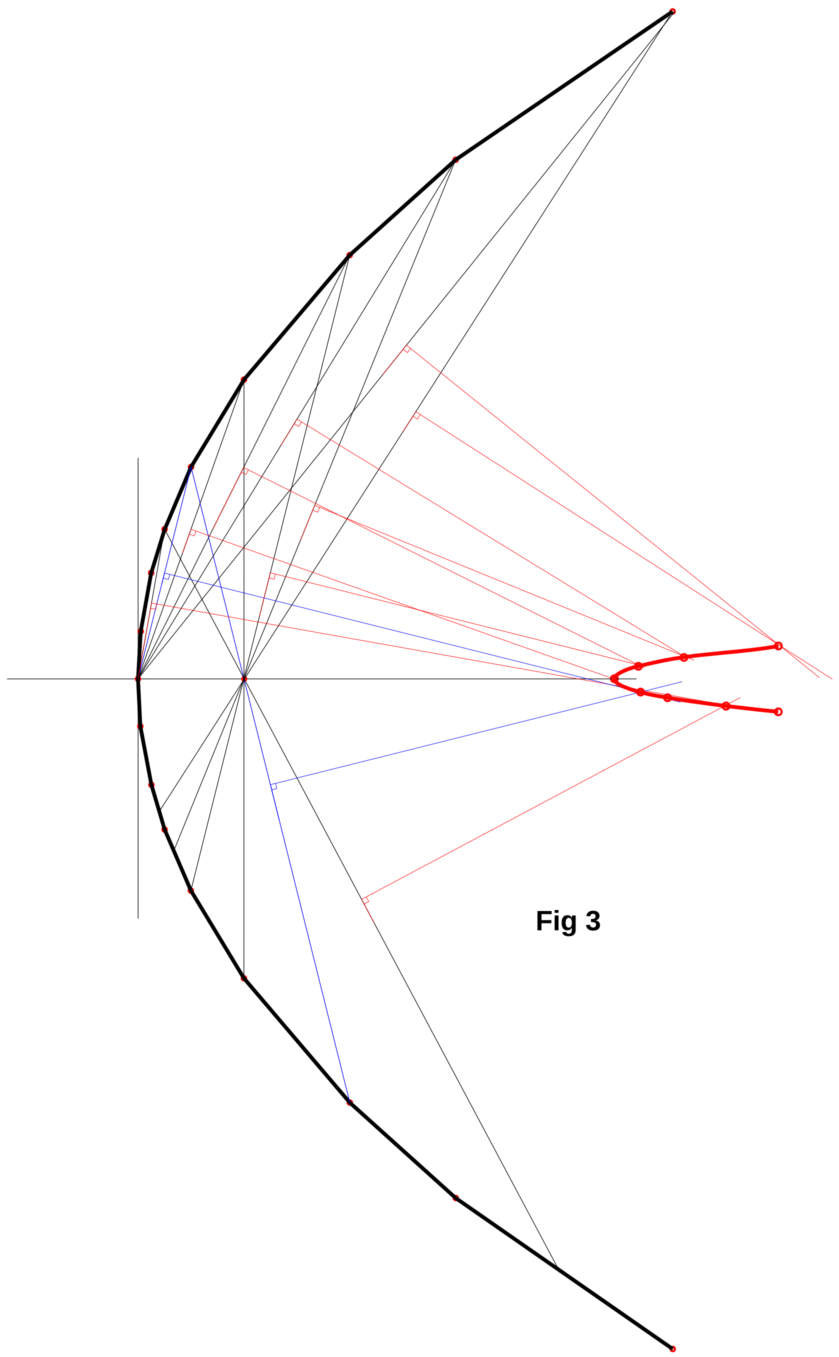


Fig 3

Résolu le 3 avril 2004. Modifié le 16 juillet 2004. Modifié le 9 juillet 2009

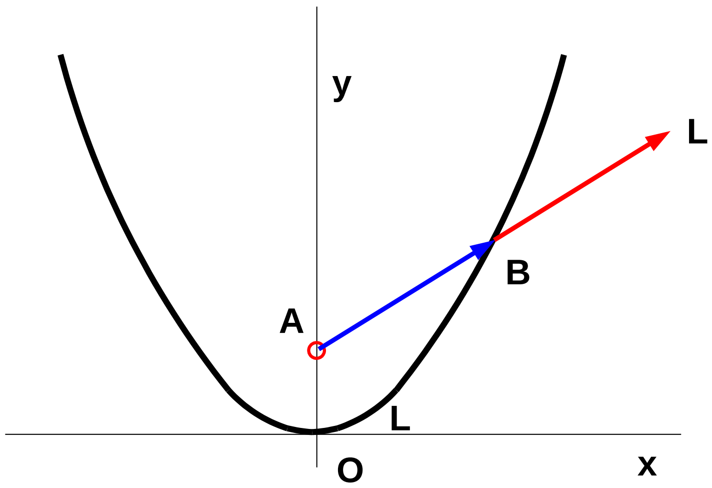
EXGAP071 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2002, série1.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé OXY, on considère les éléments suivants :

- Une parabole $P \equiv 4\,y - x^{2} = 0$
- Le point $A = (\,0,\,1\,)$
- Une droite mobile d passant par le point A et coupant la parabole P en un point mobile B

On vous demande :

- De dessiner les différents éléments du problème
- De donner une équation du lieu des points L tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BL}$
- De dessiner ce lieu



Soit $A:(0,1)$ $B:(x_B,y_B)$ $L:(x_L,y_L)$

$d \equiv y = mx+1$

B est l'intersection de d et de la parabole

$$\rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \\ y = mx+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_B = 2m+2\sqrt{m^2+1} \\ y_B = m\left(2m+2\sqrt{m^2+1}\right)+1 \end{cases}$$

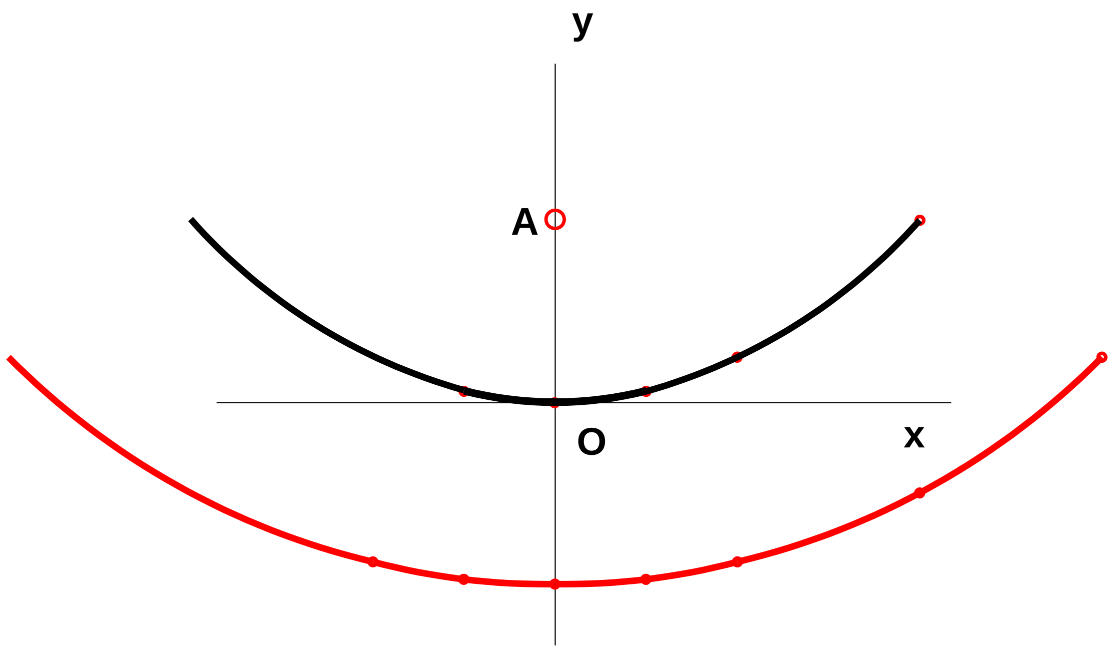
Puisque $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BL}$, B est le milieu de AL

$$\rightarrow \begin{cases} x_L = 4\left(m+\sqrt{m^2+1}\right) \\ y_L = mx_L+1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_L = 4\left(\dfrac{y_L-1}{x_L}+\sqrt{\left(\dfrac{y_L-1}{x_L}\right)^2+1}\right) \quad (1) \\ m = \dfrac{y_L-1}{x_L} \end{cases}$$

$\rightarrow$ On développe l'équation (1), on simplifie, on remplace x_L par x et y_L par y :

$$\rightarrow x^2\left(x^2-8y-8\right)=0 \rightarrow \text{Le lieu : } \boxed{y = \frac{x^2}{8}-1}$$

C'est une parabole de sommet $(0,\text{-}1)$



Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 6 septembre 2004

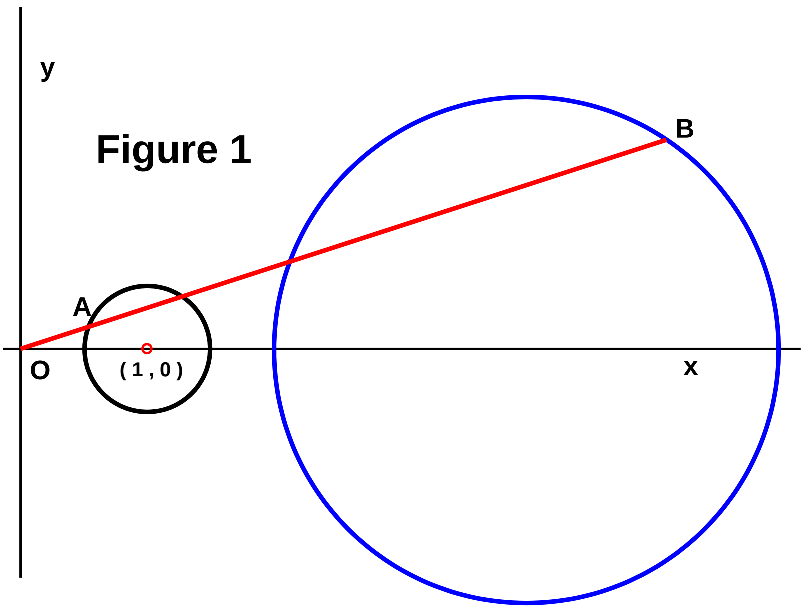
EXGAP072 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2002, série 2.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé *OXY*, on considère les éléments suivants :

- Un point mobile *A* qui se déplace sur un cercle *C* de centre (1, 0) et de rayon $r = ½$
- Un second point mobile *B* situé sur la droite *OA* et tel que le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 3$

On vous demande

- De dessiner le cercle *C*
- De donner une équation décrivant la courbe *D* construite par le mouvement du point *B*
- De donner la nature de cette courbe et de la dessiner de manière approximative.



Méthode 1

Soit $\overrightarrow{OA}:(x_A, y_A)$ et $\overrightarrow{OB}:(x_B, y_B)$. On a

Le cercle donné : $(x_A-1)^2+y_A^{\,2}=\dfrac{1}{4}\quad(1)$

$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=3 \;\rightarrow\; x_Ax_B+y_Ay_B=3\quad(2)$ et $\left(x_A^{\,2}+y_A^{\,2}\right)\left(x_B^{\,2}+y_B^{\,2}\right)=9\quad(3)$

$(1)\rightarrow y_A^{\,2}=\dfrac{1}{4}-(x_A-1)^2$

On remplace dans $(3)\;\rightarrow\;\left(2x_A-\dfrac{3}{4}\right)\left(x_B^{\,2}+y_B^{\,2}\right)=9$

$$\rightarrow x_A=\frac{1}{2}\frac{9}{x_B^{\,2}+y_B^{\,2}}+\frac{3}{8}\qquad(4)$$

De (2) en tenant compte de (4) :

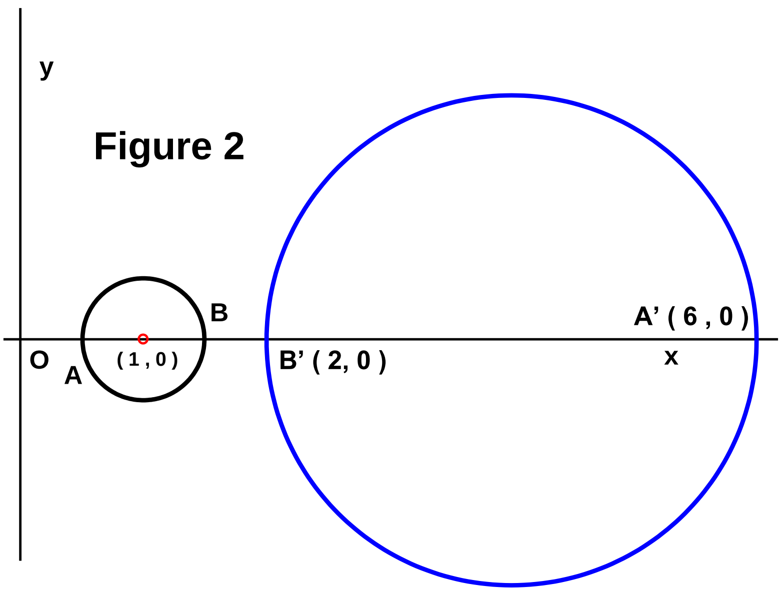
$$y_A=\frac{-\left(x_B^{\,3}-8x_B^{\,2}+x_B-y_B^{\,2}+12x_B-8y_B^{\,2}\right)}{8y_B\left(x_B^{\,2}+y_B^{\,2}\right)}\qquad(5)$$

On remplace dans (1), avec (4) et (5)

$$\rightarrow\frac{9\left(x_B^{\,2}-8x_B+y_B^{\,2}+12\right)}{64y_B^{\,2}\left(x_B^{\,2}+y_B^{\,2}\right)}=0\rightarrow x_B^{\,2}-8x_B+y_B^{\,2}+12=0$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $(4,0)$ et de rayon 2

$\boxed{(x-4)^2+y^2=4}$



Méthode 2

La méthode 1 peut sembler facile, en réalité les calculs sont fastitueux, et il faut faire très attention pour ne pas faire d'erreur.

Voici une méthode plus simple.

Nous travaillons dans un repère orthonormé

Soit le cercle donné : $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \quad \to x^2 + y^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$

Soit : $\overrightarrow{OA}:(x_A, y_A) = x_A\vec{i} + y_A\vec{j}$ et $\overrightarrow{OB}:(x_B, y_B) = x_B\vec{i} + y_B\vec{j}$

On a : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 3 \quad \to \quad x_A\vec{i} + y_A\vec{j} = \frac{3}{x_B\vec{i} + y_B\vec{j}} = \frac{3\left(x_B\vec{i} + y_B\vec{j}\right)}{x_B{}^2 + y_B{}^2}$

$\to \quad x_A = \frac{3x_B}{x_B{}^2 + y_B{}^2}$ et $y_A = \frac{3y_B}{x_B{}^2 + y_B{}^2}$

Or x_A et y_A satisfont à l'équation du cercle donné

$$\to \left(\frac{3x_B}{x_B{}^2 + y_B{}^2}\right)^2 + \left(\frac{3y_B}{x_B{}^2 + y_B{}^2}\right)^2 - 2\left(\frac{3x_B}{x_B{}^2 + y_B{}^2}\right) + \frac{3}{4} = 0$$

$$\to 9x_B{}^2 + 9y_B{}^2 - 6x_B\left(x_B{}^2 + y_B{}^2\right) + \frac{3}{4}\left(x_B{}^2 + y_B{}^2\right)^2 = 0$$

On simplifie par $\frac{4}{3}\left(x_B{}^2 + y_B{}^2\right)$ qui n'est pas nul :

$$\to \quad x_B{}^2 + y_B{}^2 - 8x_B + 12 = 0$$

D'où l'équation du lieu cherché : $\boxed{(x-4)^2 + y^2 = 4}$

Méthode 3

Une méthode encore plus simple? Oui, bien sûr.

Ceux qui sont forts en géométrie auront vu que nous sommes dans le cas de l'inversion d'un cercle qui ne passe pas par le pôle d'inversion (ici l'origine)

Ceux qui ne savent pas ce qu'est l'inversion d'un cercle iront voir sur les sites dont les références sont données à la fin.

L'inverse d'un cercle ne passant pas par le pôle d'inversion est un cercle

Voir figure 2.

Inverse de $A:(0.5, 0) \to \left|\overrightarrow{OA}\right|.\left|\overrightarrow{OA'}\right| = 3 \quad \to \left|\overrightarrow{OA'}\right| = \frac{3}{0.5} = 6 \quad \to \quad A':(6,0)$

Inverse de $B:(1.5, 0) \to \left|\overrightarrow{OB}\right|.\left|\overrightarrow{OB'}\right| = 3 \quad \to \left|\overrightarrow{OB'}\right| = \frac{3}{1.5} = 2 \quad \to \quad B':(2,0)$

De là on déduit immédatement l'équation du cercle :

$\boxed{(x-4)^2 + y^2 = 4}$

Puissance d'un point et inversion d'un cercle : voir
http://www-sop.inria.fr/lemme/Frederique.Guilhot/jfla/invers.htm
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/compl_elem/ppc.html
http://www.sciences-en-ligne.com/momo/chronomath/chrono1/Bellavitis.html

---

Résolu le 24 juin 2004

EXGAP073 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2002.

Dans un plan rapporté à un repère orthonormé *OXY*, on considère une conique centrée en (2, 4), dont les axes de symétries sont parallèles aux axes du repère, tangente à la droite $y = 1$ au point (2, 1), et passant par le point ($2 + \sqrt{20} / 3$, 6)

On vous demande :

- De donner une équation de cette conique
- De préciser de quel type de conique il s'agit.

S'il s'agit d'une conique centrée, alors nous avons soit une ellipse soit une hyperbole.

1) Une ellipse

L'équation générale d'une conique, dont les axes de symétries sont parallèles aux axes, et de centre (x_c, y_c) est :

$$E \equiv \frac{(x - x_c)^2}{a^2} + \frac{(y - y_c)^2}{b^2} = 1$$

Centre $(2,4) \rightarrow \quad E \equiv \frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{(y-4)^2}{b^2} = 1$

$$(2,1) \in E \rightarrow \frac{3^2}{b^2} = 1 \quad \rightarrow \quad b^2 = 3^2$$

$$\left(2 + \sqrt{20}, 6\right) \in E \rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{20}}{3}\right)^2}{a^2} + \frac{2^2}{3^2} = 1 \quad \rightarrow \quad a^2 = 4$$

$$\rightarrow \quad E \equiv \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} = 1$$

2) Une hyperbole L'équation générale est $H \equiv \frac{(x-x_c)^2}{a^2} - \frac{(y-y_c)^2}{b^2} = \pm 1$

Centre $(2,4) \rightarrow H \equiv \frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{(y-4)^2}{b^2} = \pm 1$

$$(2,1) \in H \rightarrow -\frac{3^2}{b^2} = \pm 1 \rightarrow \begin{cases} -\frac{3^2}{b^2} = +1 & \text{Impossible} \\ -\frac{3^2}{b^2} = -1 & \rightarrow \quad b^2 = 3^2 \end{cases}$$

$$\left(2+\sqrt{20}\,,6\right) \in H \rightarrow \frac{\left(\frac{\sqrt{20}}{3}\right)^2}{a^2} - \frac{2^2}{3^2} = -1 \quad \rightarrow \quad \frac{\left(\frac{\sqrt{20}}{3}\right)^2}{a^2} < 0 \text{ Impossible}$$

Conclusion : C'est une ellipse : $\boxed{E \equiv \frac{(x-2)^2}{2^2} + \frac{(y-4)^2}{3^2} = 1}$

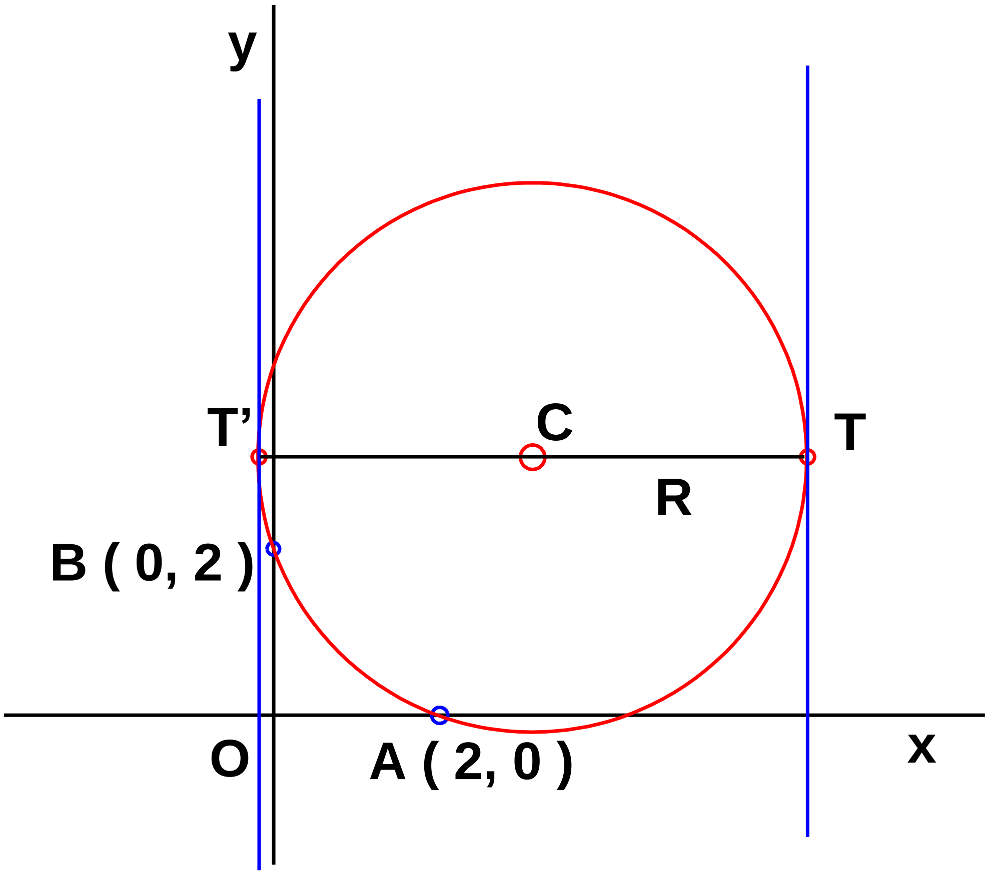
Résolu le 24 juin 2004

EXGAP074 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2003, série 1.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé *Oxyz* on considère les éléments suivants :

- Les points $A = (\ 0\ ;\ 2\ )$ et $B = (\ 2\ ;\ 0\ )$,
- Un cercle mobile *C* par les points *A* et *B*.

On vous demande :
-1- De dessiner les éléments du problème.
-2- De donner une équation du lieu des points de contacts des tangentes à *C* parallèles à l'axe *Oy*.



Cercle $\mathcal{C} \equiv (x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$

$$A,B\in\mathcal{C}\ \rightarrow \begin{cases}(2-x_c)^2+y_c^{\,2}=R^2 & (1)\\ x_c^{\,2}+(2-y_c)^2=R^2 & (2)\end{cases}\quad (1)-(2)\ \rightarrow\ y_c=x_c$$

Autrement dit les centres des cercles sont alignés sur la droite $y=x$

On en déduit les coordonnées de T

$$\begin{cases}x_T=x_c+R\\ y_T=y_c\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x_T=x_c\pm\sqrt{(2-x_c)^2+x_c^{\,2}}\\ y_T=x_c\end{cases}$$

Il suffit d'éliminer x_c entre ces deux équations pour obtenir le lieu de T et T'

$$\rightarrow\quad \boxed{H\equiv x^2-2xy-y^2+4y-4=0}$$

C'est une hyperbole.

Pour dessiner cette hyperbole, il est plus facile de déterminer son centre et ces axes.

Rappel

Soit la conique : $f(x,y)\equiv Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$

Les coordonnées du centre sont données par les dérivées partielles par rapport à x et y : $\rightarrow\begin{cases}f'_x\equiv 2Ax+By+D=0\\ f'_y\equiv Bx+2Cy+E=0\end{cases}$

L'inclinaison des axes est donné par $\tan 2\varphi=\dfrac{B}{A-C}$

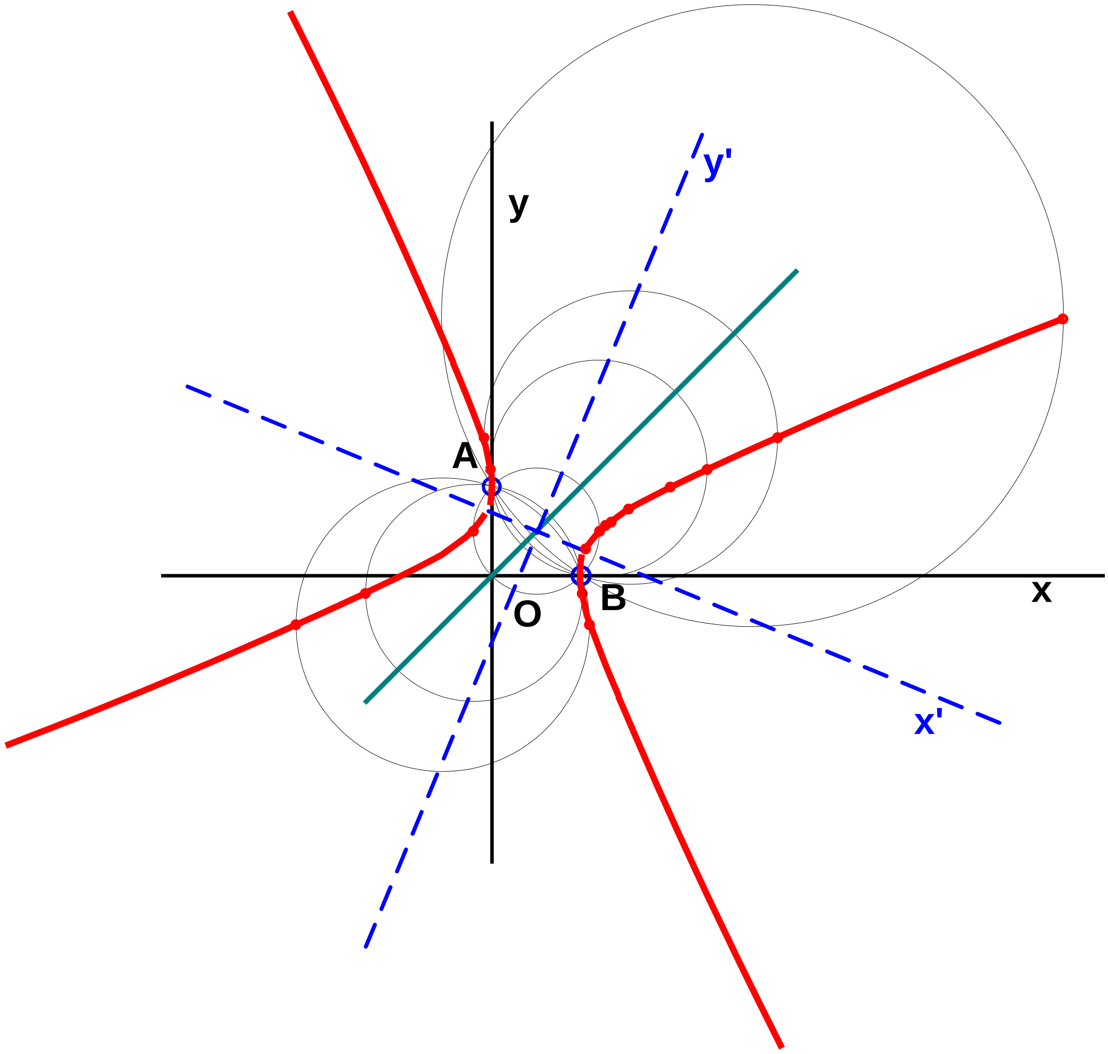
(Si on fait tourner les axes d'un angle φ, le terme en xy dans f disparaît).

Dans ce cas-ci $\rightarrow$ Centre : $\begin{cases}2x-2y=0\\ -2x-2y=-4\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}x=1\\ y=1\end{cases}$

$$\tan 2\varphi=\frac{B}{A-C}=\frac{-2}{1+1}=-1\ \rightarrow\ 2\varphi=-45°\ \rightarrow \varphi=-22.5°$$

$\rightarrow$ Les équations des axes :

$$\begin{cases}x'\equiv y-1=\tan(-22.5)(x-1)\\ y'\equiv y-1=\tan(-22.5+90)(x-1)\end{cases}\ \rightarrow\ \begin{cases}x'\equiv y=-0.414x+1.41\\ y'\equiv y=2.414x-1.41\end{cases}$$


y'
y
A
O
B
x
x'

Compléments

Réduction de l'équation de la conique par la méthode des vecteurs propres.

Soit la conique de l'exercice précédent : $C \equiv x^2 - 2xy - y^2 + 4y - 4 = 0$

On sait que son centre est $(1,1) \rightarrow \begin{cases} x = x'+1 \\ y = y'+1 \end{cases}$

$\rightarrow C \equiv x'- 2x'y'- y'^2 = 2$

La matrice caratéristique est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres sont donnés par : $\det(A - I\lambda) = 0$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) - 1 = 0 \quad \rightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}$$

Le premier vecteur propre s'obtient par : $A.\overrightarrow{v_1} = \lambda\overrightarrow{v_1}$

$$\rightarrow \begin{cases} x - y = \sqrt{2}x \\ -x - y = \sqrt{2}y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - \sqrt{2} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{u_1} = \frac{\overrightarrow{v_1}}{\left\|\overrightarrow{v_1}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

On vérifie que l'angle de $\overrightarrow{v_1}$ avec l'axe des x est arctan $\varphi = \arctan\left(1-\sqrt{2}\right) = -22{,}5°$

qui est bien l'angle trouvé précédemment.

De même, $A.\overrightarrow{v_2} = \lambda\overrightarrow{v_2}$

$$\rightarrow \begin{cases} x - y = -\sqrt{2}x \\ -x - y = -\sqrt{2}y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} \\ y = 1 \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{u_2} = \frac{\overrightarrow{v_2}}{\left\|\overrightarrow{v_2}\right\|} = \frac{\begin{pmatrix} -1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}$$

On peut maintenant écrire la matrice de transformation :

$$P = \frac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\begin{pmatrix} 1 & -1+\sqrt{2} \\ 1-\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P.\begin{pmatrix} x" \\ y" \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\left(x"+\left(-1+\sqrt{2}\right)y"\right) \\ y' = \dfrac{1}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\left(\left(1-\sqrt{2}\right)x"+y"\right) \end{cases}$$

On remplace dans l'équation de la conique, et après simplification on obtient

$$\sqrt{2}\left(x"^2 - y"^2\right) = 2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{x"^2}{\sqrt{2}} - \frac{y"^2}{\sqrt{2}} = 1}$$

qui est l'équation d'une hyperbole équilatère.

Résolu le 24 juin 2004

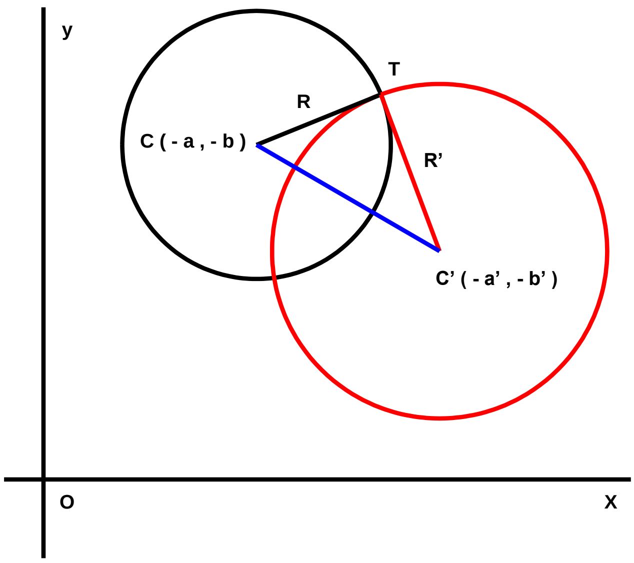
EXGAP075 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2003, série 2.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé *Oxy*, on considère les deux cercles

$$C \equiv x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$
$$C' \equiv x^2 + y^2 + 2a'x + 2b'y + c' = 0$$

On vous demande :

-1- D'exprimer les coordonnées du centre de *C* en fonction des paramètres *a, b* et *c*.
-2- De donner une relation liant uniquement les paramètres *a, b, c* et *a', b', c'* afin que les deux cercles possèdent un point commun où les tangentes à *C* et *C'* sont perpendiculaires entre elles.



En réduisant l'équation du cercle, on obtient directement :

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = -c + a^2 + b^2$$
$$\rightarrow \quad C:(-a,-b) \quad \text{et} \quad R = \sqrt{-c + a^2 + b^2}$$

Il suffit que le triangle CTC' soit rectangle $\rightarrow R^2 + R'^2 = \left|CC'\right|^2$

$$\rightarrow -c + a^2 + b^2 - c' + a'^2 + b'^2 = (-a + a')^2 + (-b + b')^2 \rightarrow aa' + bb' = \frac{c + c'}{2}$$

Cette relation peut ce mettre sous la forme : $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC'} = \dfrac{c+c'}{2}$

Résolu le 24 juin 2004. Modifié le 6 septembre 2004

EXGAP076 – EPL, UCL, Louvain, septembre 2003.
FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010.
FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010.

Enoncé de EPL, UCL, Louvain, septembre 2003

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé *Oxyz*, on considère les éléments suivants :

- Le point $A = (3\ ,\ 0)$
- Le cercle $\gamma \equiv (x+3)^2 + y^2 = 16$

On vous demande :

1) De dessiner les éléments du problème.
2) De déterminer analytiquement l'équation cartésienne du lieu des points P tels que la distance PA soit égale à la distance de P au cercle γ. La distance d'un point à un cercle est définie comme la distance la plus courte entre la circonférence et le point en question.
3) D'interpréter et d'esquisser ce lieu.

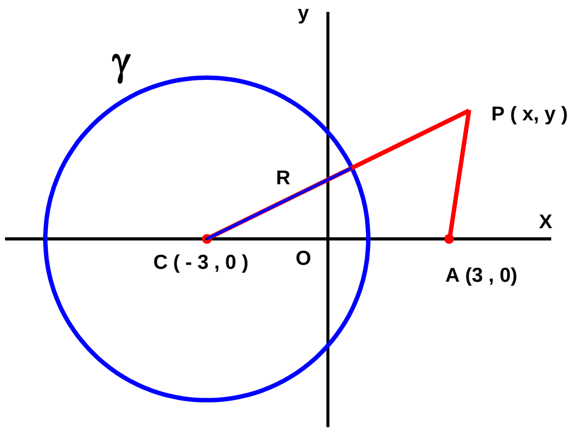
Enoncé de FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2010

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormés OXY .
On donne le cercle de rayon unité centré en (-2,0) et le point P de coordonnées (1, 0).
On demande de déterminer une équation cartésienne du lieu des points équidistants de P et du cercle, et d'en spécifier la nature.

Enoncé de FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2010

Le plan est rapporté à un système d'axes orthonormés OXY .
On donne le cercle de rayon trois centré en l'origine et le point P de coordonnées (2, 0).
On demande de déterminer une équation cartésienne du lieu des points équidistants de P et du cercle, et d'en spécifier la nature.

Nous ne donnerons que la solution pour l'EPL



Le cercle est de centre $C:(-3,0)$ et de rayon $R=4$

Exprimons que les distances de P à A et au cercle sont égales:

$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=\sqrt{(x+3)^2+y^2}-4$

$\rightarrow (x-3)^2+y^2=(x+3)^2+y^2-8\sqrt{(x+3)^2+y^2}+16$

$\rightarrow 8\sqrt{(x+3)^2+y^2}=16-(x-3)^2+(x+3)^2$

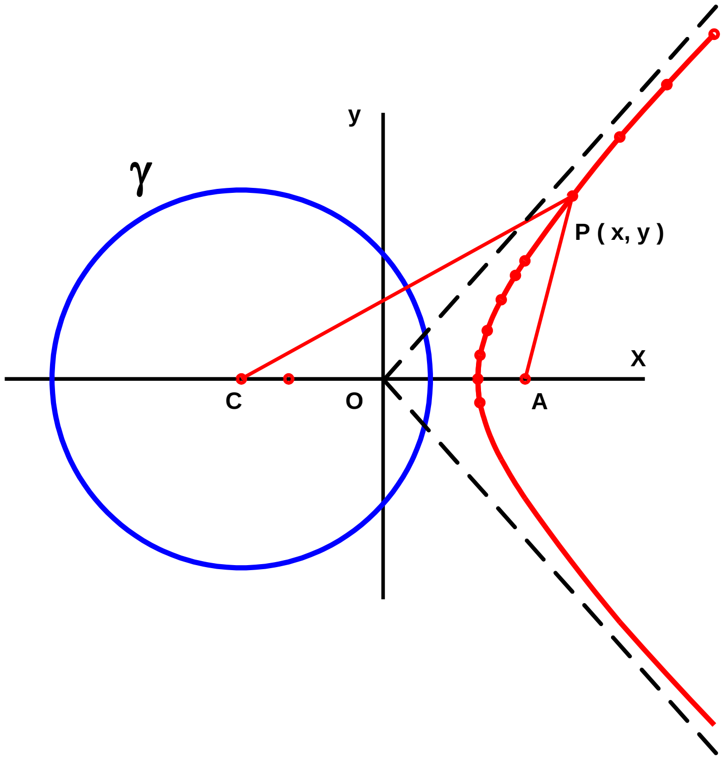
$\rightarrow 2\sqrt{(x+3)^2+y^2}=4+3x$

$\rightarrow 4\left((x+3)^2+y^2\right)=(4+3x)^2$

$\rightarrow \boxed{\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1}$

C'est une hyperbole dont seule la branche de droite, nous intéresse.

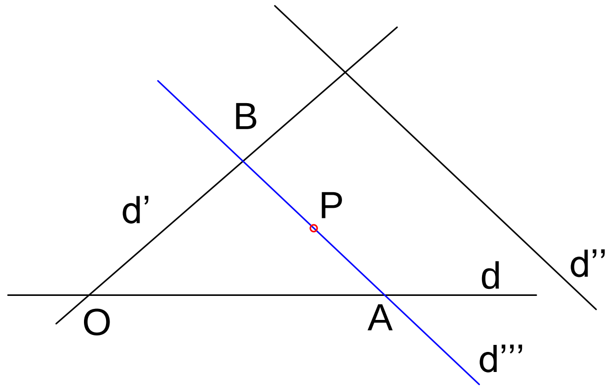
(La branche de gauche est parasite et a été introduite par les deux élévations au carré)

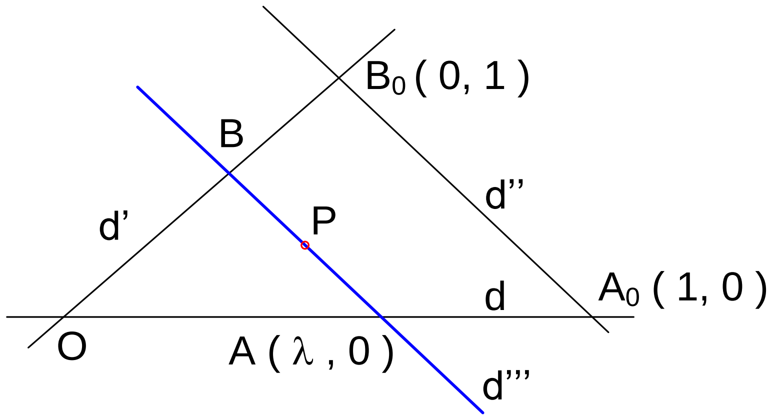


Résolu le 24 juin 2004

EXGAP077 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2004.

On considère deux droites *d* et *d'* du plan qui s'intersectent en un point *O*. On considère une droite *d''* qui n'est parallèle ni à *d* ni à *d'* . Une droite *d'''* parallèle à *d''* intersecte *d* en *A* et *d'* en *B* . Déterminer l'équation cartésienne du lieu géométrique du milieu *P* de [*A*, *B*] quand *d'''* varie.





Prenons comme système d'axes dOd'.

Soient $A_0 = d'' \cap d$ et $B_0 = d'' \cap d'$

Choissisons $\begin{cases} |OA_0| = 1 \text{ sur l'axe des } x \text{ (c'est-à-dire } d) \\ |OB_0| = 1 \text{ sur l'axe des } y \text{ (c'est-à-dire } d') \end{cases}$

Dans ce système, on a $A_0(1,0)$ et $B_0(0,1)$

$\rightarrow$ La droite d'' a pour équation : $d'' \equiv x + y = 1$

Soit alors : $A(\lambda,0)$. Or la droite d''' est parallèle à $d'' \rightarrow d''' \equiv x + y = \lambda$

On peut dés lors calculer les coordonnées de B : $\begin{cases} x + y = \lambda \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow B(0,\lambda)$

P étant le milieu de $[A,B] \rightarrow P\left(\frac{\lambda}{2},\frac{\lambda}{2}\right)$

$\rightarrow$ La droite OP a pour équation : $OP \equiv y = x$

Le lieu est donc la droite passant par O et le milieu de $[A,B]$

Publié le 12 novembre 2004

EXGAP078 – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2004.

Soit un triangle F_1PF_2. P est un point d'une ellipse dont F_1 et F_2 sont les foyers. On demande de déterminer les sommets de l'ellipse et de la représenter.

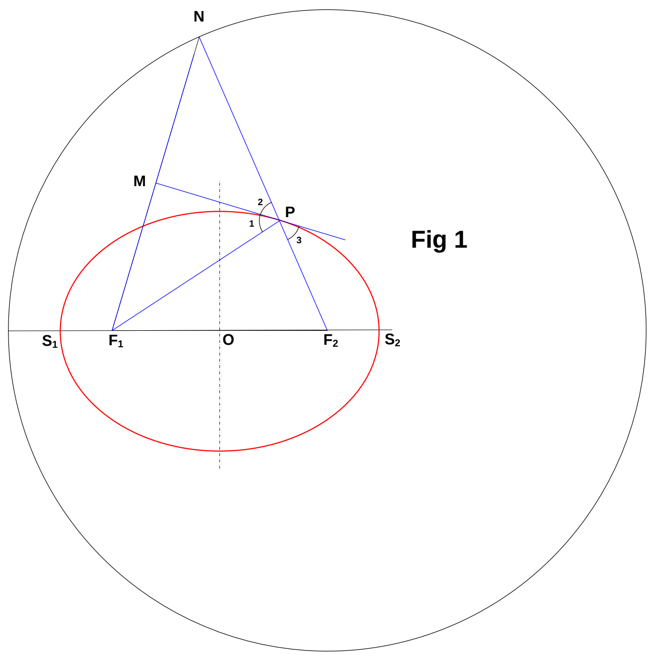


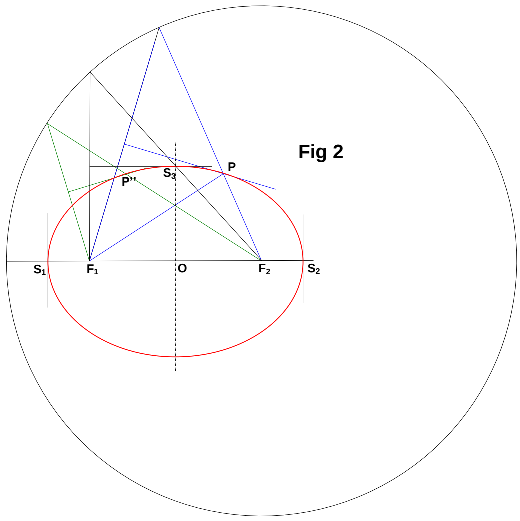
Fig 1

Dans le prolongement de F_2P, portons une longueur $|NP| = |F_1P|$

Soit le triangle NF_1P qui est isocèle. La médiatrice MP est donc aussi une bissectrice de l'angle $NPF_1 \rightarrow P_1 = P_2$. Or $P_3 = P_2$ (Angles opposés par le sommet)

$\rightarrow \widehat{P_3 = P_1}.$

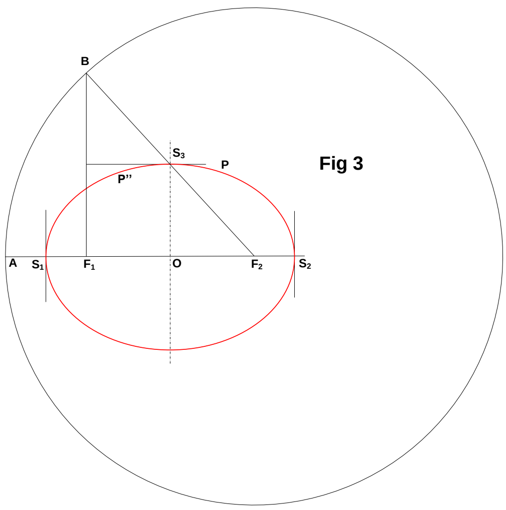
En conclusion, MP est tangente en P à l'ellipse cherchée. C'est une propriété de l'ellipse.



<u>Fig 2</u>

La construction de l'eelipse s'obtient donc en traçant le cercle de F_2 et de rayon $\left| NF_2 \right| = \left| F_1P \right| + \left| PF_2 \right| = cste.$

En prenant sur le cercle des points successifs, on trace les tangentes qui forment l'enveloppe de l'ellipse.



<u>Fig 3</u>

Le sommet S_1 est situé au milieu du segment AF_1.

Le sommet S_2 s'obtient par symétrie par rapport à O.

Le sommet S_3 s'obtient en considérant le point B du cercle tel que BF_1 soit perpendiculaire à F_1F_2. Le quatrième sommet s'obtient par symétrie.

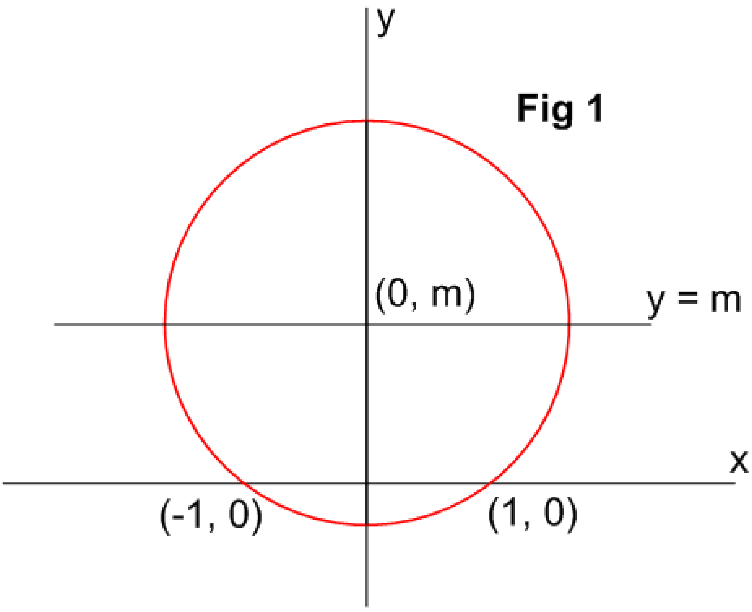
EXGAP079 – EPL, UCL, Louvain, juillet 2004, série 1.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé *Oxy*. On considère la famille de cercles d'équations :

$$x^2 + y^2 - 2my - 1 = 0$$

Où *m* est un paramètre réel variable. On vous demande :

- De trouver les points qui appartiennent à tous les cercles de la famille.
- De trouvez le lieu des extrémités du diamètre parallèle à l'axe *Ox* pour tous ces cercles
- De dessiner et de caractériser ce lieu.



Transformons l'équation : $x^2 + y^2 - 2my - 1 = 0 \rightarrow x^2 + (y-m)^2 = m^2 + 1$

C'est un cercle de centre $(0, m)$ et de rayon $m^2 + 1$

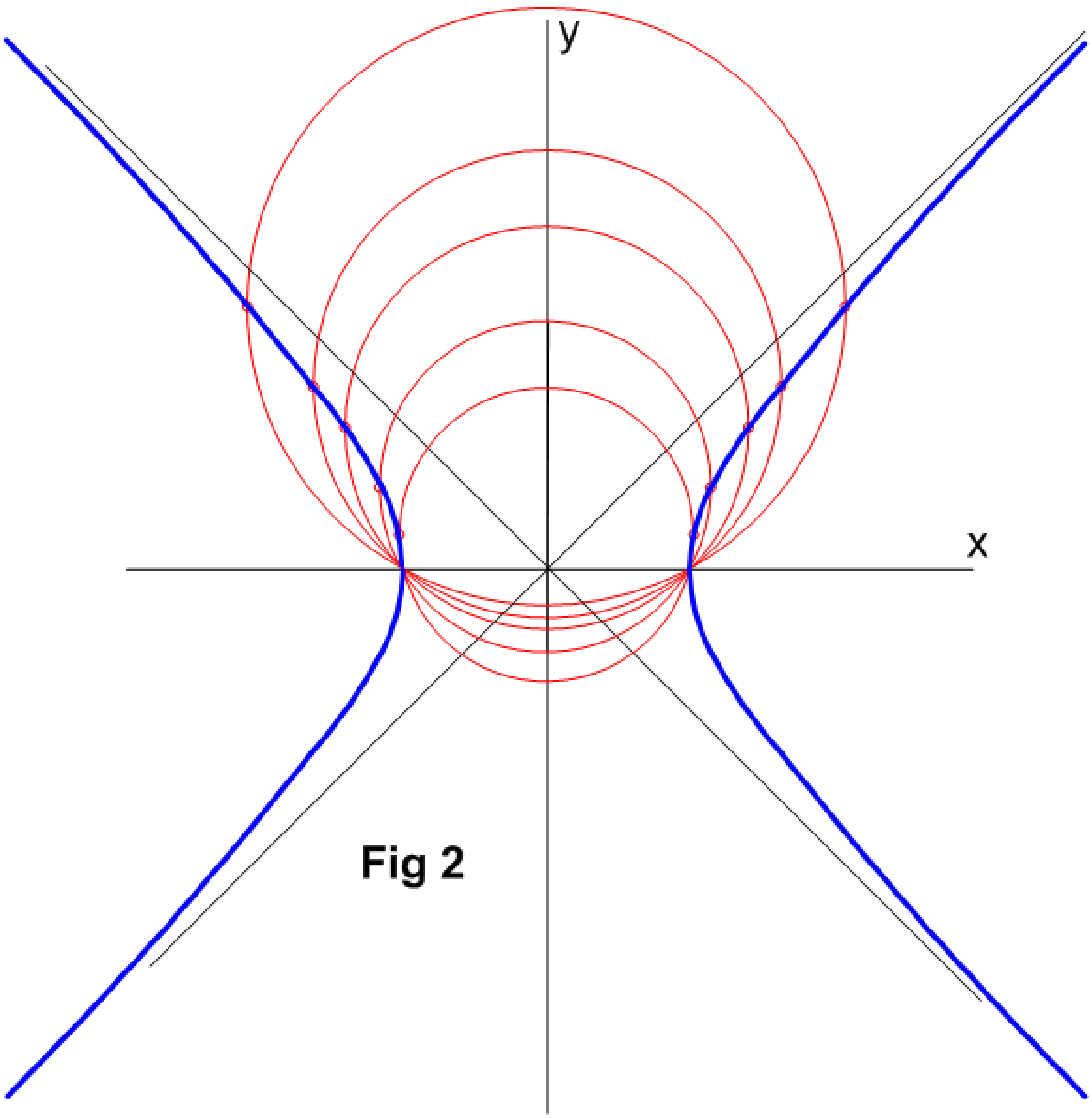
Si dans l'équation, on fait $y = 0 \rightarrow x = \pm 1$ qui est indépendant de *m*.

En d'autres termes, tous les cercles passent par les points $(-1,0)$ et $(1,0)$.

Le diamètre parallèle à l'axe des x a pour équation : $y = m$

$$\rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 2my - 1 = 0 \\ y = m \end{cases} \rightarrow \text{ Eliminons } m \rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = 1}$$

C'est un hyperbole équilatère centrée en O (voir figure 2)



5 avril 2005