Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 8

EXGAP080 – EXGAP089

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot

Avril 05

EXGAP080 – Louvain, juillet 2004, série 2.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé *Oxy*. On considère les éléments suivants :

- Le cercle γ de centre C = (-2, 1) et de rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$
- La droite d'équation $p = 2x + y + 1 = 0$

On vous demande de déterminer les droites tangentes à γ et parallèle à la droite p.

Le cercle a pour équation : $(x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4}$

<u>Méthode 1</u>

Soit l'équation d'une tangente parallèle à la droite donnée. : $y = -2x + p$

$$\rightarrow \begin{cases} (x+2)^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} \\ y = -2x + p \end{cases} \rightarrow 20x^2 + 16(2-p)x^2 + 4p^2 - 8p + 15 = 0$$

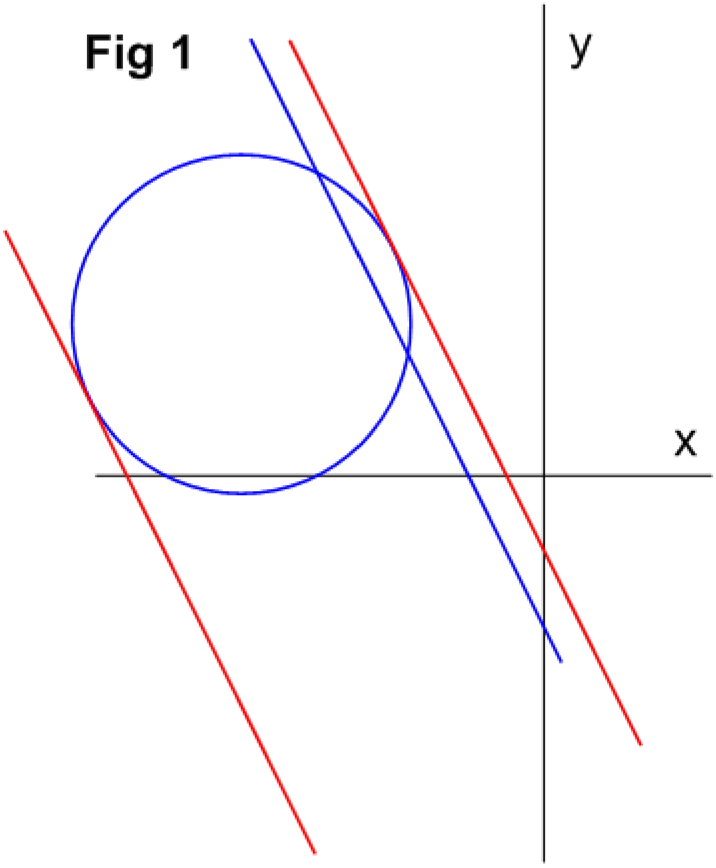
On détermine p en exprimant que le discrimant de l'équation est nul

$$\Delta = 64(2-p)^2 - 20(4p^2 - 8p + 15) = 0 \rightarrow 4p^2 + 24p + 11 = 0$$

Ce qui demande : $p = \frac{12 \pm 10}{4} \rightarrow \begin{cases} p = -\frac{1}{2} \\ p = -\frac{11}{2} \end{cases}$

$\rightarrow$ Les équations des deux tangentes $\boxed{\begin{cases} y = -2x - \frac{1}{2} \\ y = -2x - \frac{11}{2} \end{cases}}$

Fig 1



Méthode 2

Soit le diamètre perpendiculaire à la direction donnée : $y-1=\frac{1}{2}(x+2)$

Ce diamètre coupe le cercle au points de tangence cherchés :

$\rightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=\frac{5}{4} \rightarrow (x+2)^2+\frac{1}{4}(x+2)^2=\frac{5}{4} \rightarrow \frac{5}{4}(x+2)^2=\frac{5}{4}$

$\rightarrow x^2+4x+3=0 \rightarrow (x+1)(x+3)=0$

$$\begin{cases} x=-1 \rightarrow y=\frac{3}{2} \rightarrow t_1 \equiv y=-2x-\frac{1}{2} \\ x=-3 \rightarrow yy\frac{1}{2} \rightarrow t_1 \equiv y=-2x-\frac{11}{2} \end{cases}$$

5 avril 2005

EXGAP081 – Louvain, septembre 2004.

Dans le plan rapporté a un repère orthonormé Oxy. On considère les éléments suivants :

- La droite p et passant par les points $A = (a, 0)$ et $B = (- a, b)$
- La droite q et passant par les points $C = (- a, 0)$ et $D = (a, d)$

Où a, b et d sont trois paramètres non nuls.

On vous demande

- de déterminer l'équation cartésienne du lieu de l'intersection des droites p et q si le produit des ordonnées des points B et D vaut une constante C non-nulle ($b.d = C \neq 0$)
- De discuter la nature du lieu d'après la valeur du paramètre C.

On a : $\begin{cases} p \equiv y = \dfrac{-b}{2a}(x-a) \\ q \equiv \dfrac{d}{2a}(x+a) \end{cases} \rightarrow$ Ce qui donne le point d'intersection: $I = \begin{cases} x = a\dfrac{b-d}{b+d} \\ y = \dfrac{bd}{b+d} \end{cases}$

Or $bd = C \rightarrow d = \dfrac{C}{b} \rightarrow I = \begin{cases} x = a\dfrac{b^2-C}{b^2+C} & (1) \\ y = \dfrac{bC}{b^2+C} & (2) \end{cases}$

De (1) on tire $b^2 = C\dfrac{a+x}{a-x}$. Transformons (2): $y^2 = \dfrac{b^2C^2}{\left(b^2+C\right)^2}$ et remplaçons b^2

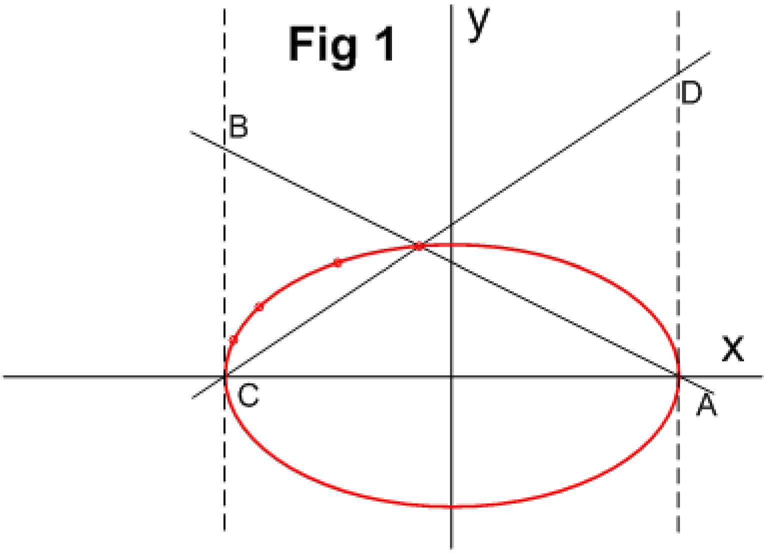
$$\rightarrow y^2 = \frac{C^3\dfrac{a+x}{a-x}}{\left(C\dfrac{a+x}{a-x}+C\right)^2} = C\frac{(a+x)}{(a-x)}\frac{(a-x)^2}{(a+x+a-x)^2} = C\frac{a^2-x^2}{4a^2}$$

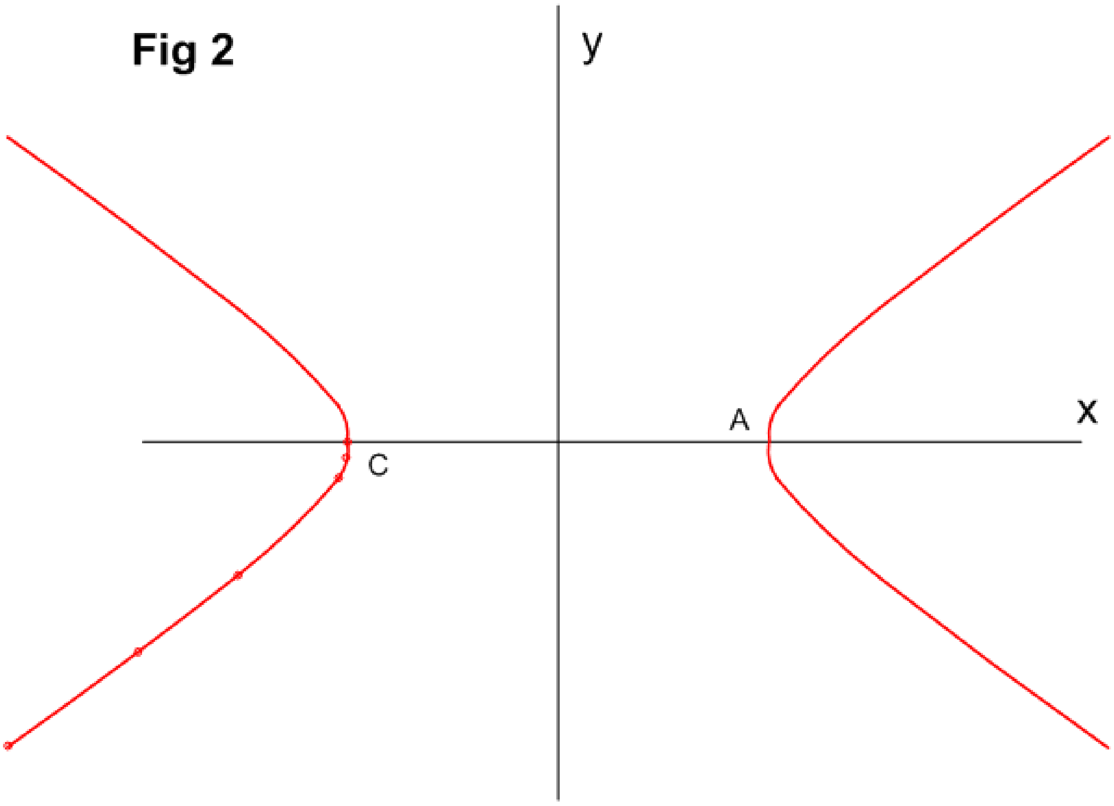
$$\rightarrow \boxed{Cx^2 + 4a^2y^2 = Ca^2}$$

1) si $C > 0 \rightarrow$ on a un ellipse entrée à l'origine (Figure 2)

2) si $C < 0 \rightarrow$ on a une hyperbole entrée à l'origine (Figure 3)

Voir également EXGAP009



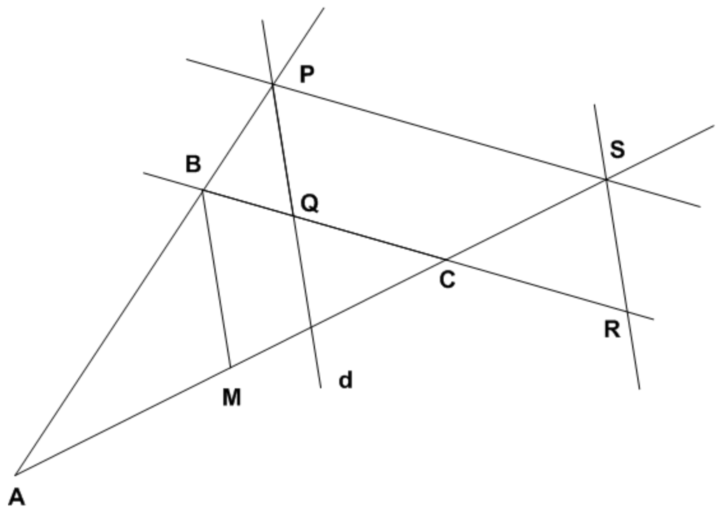


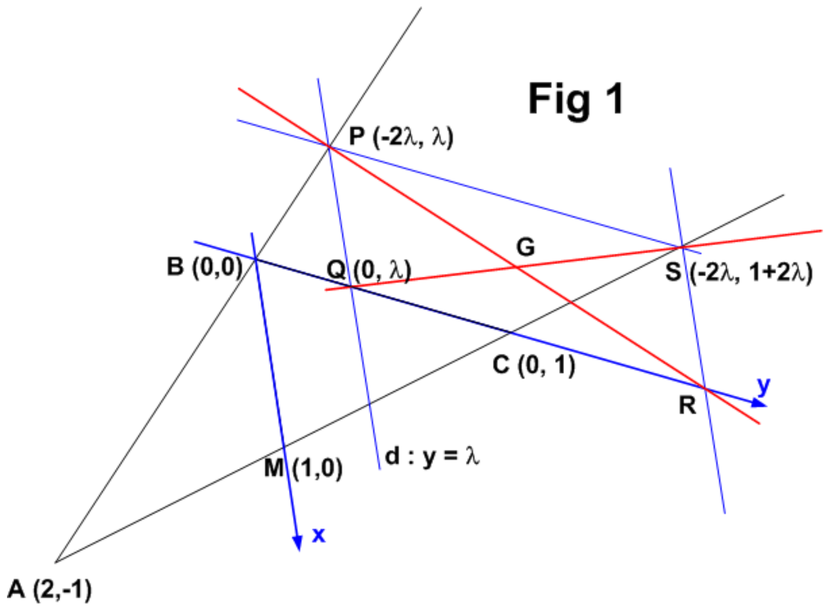
Le 5 avril 2005

EXGAP082 – Liège, septembre 2004.

On considère un triangle ABC et on note M le milieu de $[A,C]$. Une droite variable d parallèle à BM intersecte AB en P et BC en Q. La parallèle à BC passant par P coupe AC en S. La parallèle à d passant par S coupe BC en R. Déterminer le lieu géométrique du centre de gravité du parallélogramme $PQRS$ quand la droite d varie.

Remarque : on pourra négliger les cas où le parallélogramme n'est pas défini.





Nous reprenons la résolution proposée par l'université.
On procède par géométrie analytique. Plusieurs choix de repère sont possibles.
Si on exclut les objets (points et droites) qui varient avec d, il reste le triangle ABC et le point M. Puisque le problème n'est pas euclidien, il n'est pas nécessaire d'utiliser un repère orthonormé. Un choix classique à considérer comme origine le point A et comme axes les droites AC et AB, en choisissant les unités de façon telle que les points C et B admettent pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Un autre choix consiste à prendre B comme origine et comme axes les droites BM et BC et en adoptant pour M et C les coordonnées $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. De cette façon, les droites variables sont parallèles aux axes. Retenons ce choix.

- La droite BM est donc le premier axe et admet donc l'équation : $y = 0$
- La droite d a donc pour équation : $y = \lambda$ où λ est un paramètre réel.
- Les coordonnées de Q satisfont : $\begin{cases} y = \lambda \\ x = 0 \end{cases}$ donc Q a pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\\lambda\end{pmatrix}$
- Si les coordonnées de A sont $\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, on a : $\begin{cases} \dfrac{a_1}{2} = 1 \\ \dfrac{a_1 + 1}{2} = 0 \end{cases}$ puisque M est le milieu de $[A,C]$. Le point A admet donc les coordonnées $\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$
- On trouve alors les équations des droites AB et AC. On a : $AB \equiv x + 2y = 0$ et $AC \equiv x + y = 1$
- Les coordonnées de P satisfont : $\begin{cases} y = \lambda \\ x + 2y = 0 \end{cases}$ et P s'écrit $\begin{pmatrix}-2\lambda\\\lambda\end{pmatrix}$
- La droite PS est parallèle au second axe et passe par P. Elle a donc pour équation : $x = -2\lambda$
- Les coordonnées de S satisfont alors $\begin{cases} x + y = 1 \\ x = -2\lambda \end{cases}$ donc $S = \begin{pmatrix}-2\lambda\\1+2\lambda\end{pmatrix}$

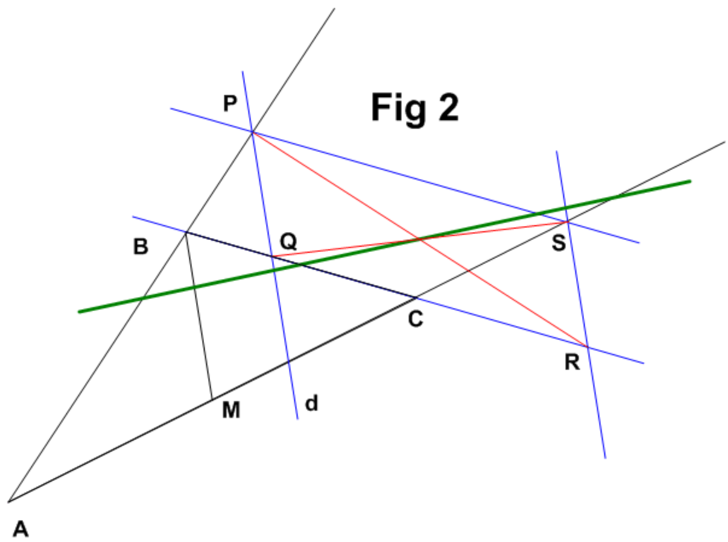
• On peut ensuite faire de même pour obtenir les coordonnées de R, ou remarquer que le centre de gravité G du parallèlogramme est l'intersection de ses diagonales.

Puisque celles-ci se coupent en leur milieu, on obtient : $G = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \dfrac{1+3\lambda}{2} \end{pmatrix}$

Un point de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du plan est donc dans le lieu si et seulement si

il existe une valeur λ telle que $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = \dfrac{1+3\lambda}{2} \end{cases}$

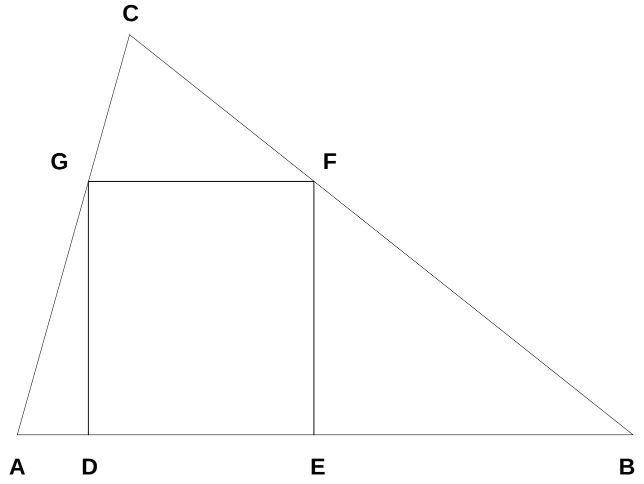
On reconnaît alors l'équation paramètrique de la droite d'équation : $3x + 2y = 1$

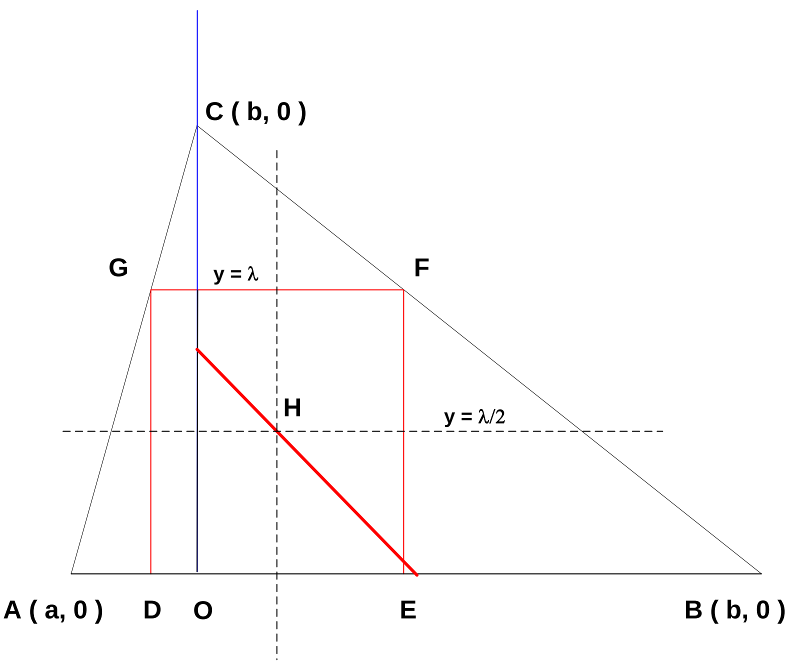


EXGAP083 – Liège, juillet 2005.

On considère un triangle *ABC*, dont tous les angles sont aigus.
Déterminer le lieu des centres de gravité des rectangles *DEFG* satisfaisant (simultanément) les conditions suivantes.

a) Les sommets *D* et *E* appartiennent à la droite *AB*,
b) Le sommet *F* appartient à *CB*,
c) Le sommet *G* appartient à *AC*.





On procède par géométrie analytique.

Choississons comme repère $Ox \equiv AB$ et $Oy \equiv$ la hauteur issue de C.

Dans ce système, les coordonnées des sommets du triangle sont : $A(a,0), B(b,0), C(0,c)$

Soit $GF \equiv y = \lambda$

Les coordonnées de G sont : $\begin{cases} AC \equiv \frac{x}{a} + \frac{y}{c} = 1 \\ GF \equiv y = \lambda \end{cases} \to G\left(a\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right), \lambda\right)$

Les coordonnées de F sont : $\begin{cases} BC \equiv \frac{x}{b} + \frac{y}{c} = 1 \\ GF \equiv y = \lambda \end{cases} \to F\left(b\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right), \lambda\right)$

On peut alors déduire les coordonnées de H qui se trouvent à mi-hauteur de GF et sur la verticale passant par le milieu de GF :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right) + b\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)}{2} & (1) \\ y = \dfrac{\lambda}{2} & (2) \end{cases}$$

Le lieu de H s'obtient en éliminant λ entre (1) et (2).

Ce qui donne l'équation d'une droite : $y = \frac{c}{2} - \frac{c}{a+b}x$

Plus exactement, le lieu de H est un segment de droite dont les extrémités ont pour coordonnées :

$$\begin{cases} y = 0 \to x = \dfrac{a+c}{2} & \text{C'est-à-dire le milieu de } AB \\ x = 0 \to y = \dfrac{c}{2} & \text{C'est-à-dire le milieu de } CO \end{cases}$$

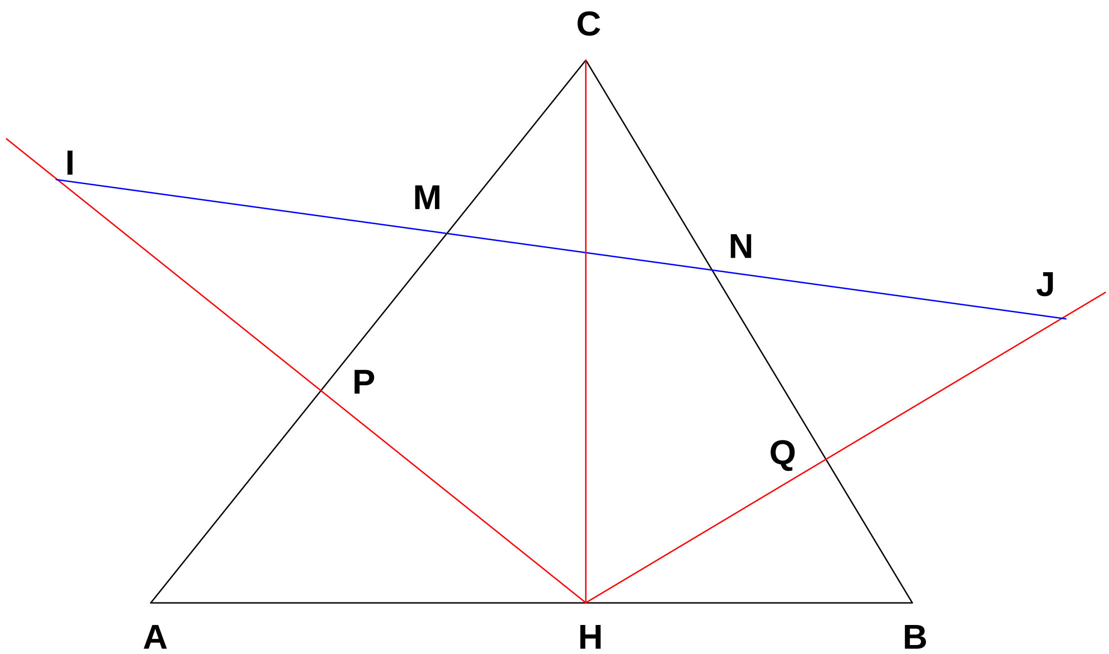
Le 5 août 2005

EXGAP084 – Mons, juillet 2005.

Dans l'espace $\mathbb{R}^2$ rapporté à un système orthonormé, O*xy* considérons un triangle *ABC*.
Les coordonnées de ses sommets sont : A (0, 0), B (7, 0), C (4, 5).
Appelons H le pied, sur AB, de la hauteur issue de C.
Construisons alors le I symétrique du point H par rapport à AC et le point J, symétrique de H par rapport à BC. La droite IH coupe AC en P et la droite JH coupe BC en Q et traçons le segment PQ.
Traçons aussi le segment IJ qui coupe AC en M et BC en N.

1) Démontrez que les points M et N sont les pieds des hauteurs issues de B et de A dans le triangle ABC.
2) Quelle est l'équation de l'hyperbole équilatère admettant comme asymptotes d'une part une parallèle à Ox et d'autre part, l'axe Oy lui-même et admettant simultanément la droite IJ comme tangente en N ?

Note : Cet exercice est couplé avec EXGSP093



1) $\left.\begin{array}{l} CB \equiv y = -\frac{5}{3}(x-7) \\ HJ \equiv y = \frac{3}{5}(x-4) \end{array}\right\} \rightarrow Q = CB \cap HJ = (\ 6.2059,\ 1.3225\ ) \rightarrow J : (\ 8.4118, 2.647\ )$

Car Q est le milieu de HJ

$$\left.\begin{array}{l} AC \equiv y = \frac{5}{4}x \\ HI \equiv y = -\frac{4}{5}(x-4) \end{array}\right\} \rightarrow P = AC \cap HI = (\ 1.5610,\ 1.9512\ ) \rightarrow I : (\ -0.878, 3.9024\ )$$

$$IJ \equiv \frac{x-8.4118}{-0.878-8.4118} = \frac{y-2.647}{3.9024-2.647} \rightarrow IJ \equiv x + 7.3998y = 28$$

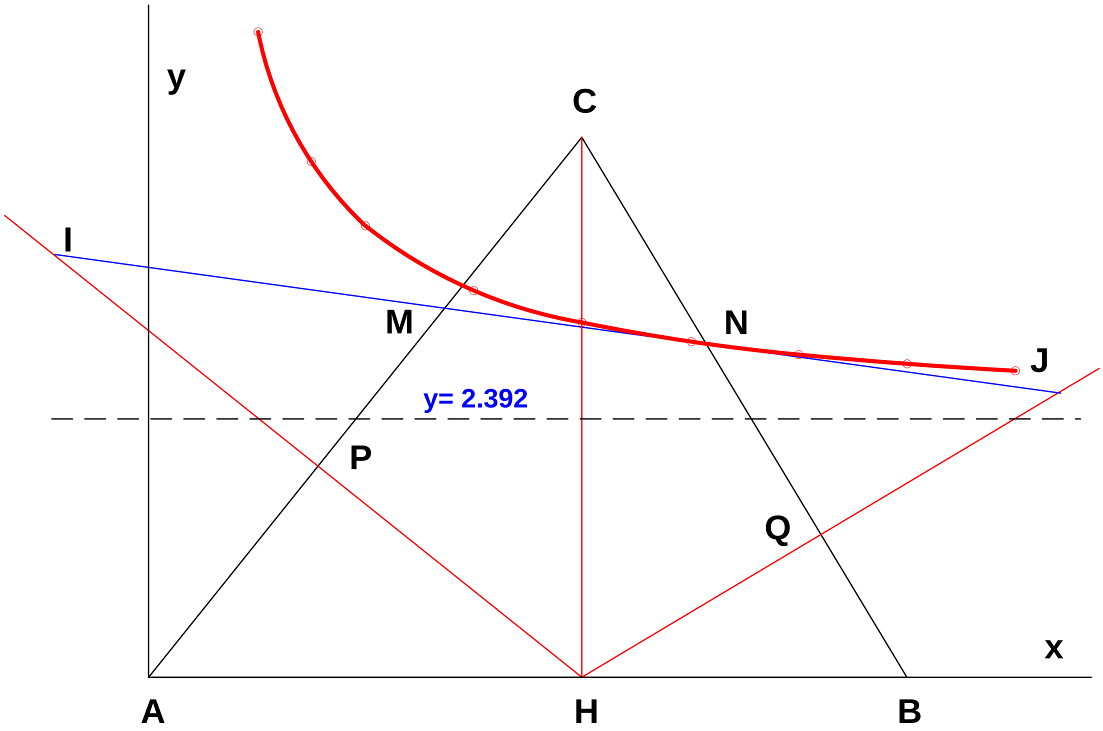
$$M = IJ \cap AC = \begin{cases} x + 7.3998y = 28 \\ \frac{5}{4}x - y = 0 \end{cases} \rightarrow M : (\ 2.7318, 3.4146\ )$$

$$N = IJ \cap CB = \begin{cases} x + 7.3998y = 28 \\ \frac{5}{3}x + y = \frac{35}{3} \end{cases} \rightarrow N(\ 5.147, 3.088)$$

Nous avons maintemant tout ce qu'il nous faut pour vérifier que MB et AN sont des hauteurs :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} : (4, 5) \\ \overrightarrow{MB} : (-4.2683,\ 3.4146) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MB} = -2.10^{-4} \simeq 0 \rightarrow AC \perp MB$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{BC} : (-3, 5) \\ \overrightarrow{AN} : (5.147,\ 3.088) \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AN} = -1.10^{-3} \simeq 0 \rightarrow BC \perp AN$$



2) C'est une hyperbole équilatère de forme : $xy + Ax + B = 0$

(On vérifie facilement que les asymptotes sont $x = 0$ et $y = -A$)

N appartient à la conique $\rightarrow 5.147.3.088 + A.5.147 + B = 0$

$\rightarrow 5.147A + B = -15.8939 \quad (1)$

D'autre part IJ est tangente. Donc la valeur de la dérivée en N est égale à la pente de la droite :

$$y' = -\frac{Ax - Ax - B}{x^2} = \frac{B}{x^2} = -\frac{1}{7.3998} \rightarrow B = -3.58$$

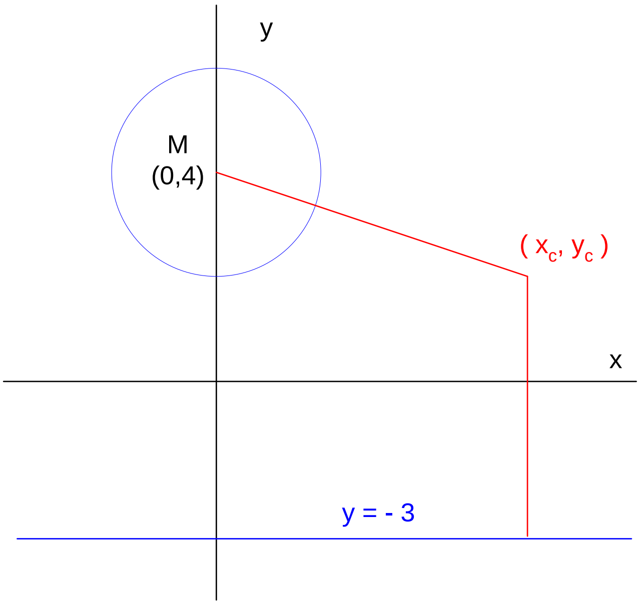
Et de $(1) \rightarrow \; A = -2.392$

L'équation de la conique est donc : $\boxed{xy - 2.392x - 3.58 = 0}$

Le 5 août 2005

EXGAP085 – ERM, 2004.

On donne le cercle C de centre M (0,4) et de rayon R = 2 et la droite d d'équation $y + 3 = 0$.
On demande de déterminer les cercles passant par l'origine et qui sont tangents au cercle C et à la droite d.



Soient $\left(x_c, y_c\right)$ les coordonnées d'un cercle. Traduisons que les distances de ce point au cercle donné et à la droite donnée sont égales : $y_c + 3 = \sqrt{x_c^{\,2} + \left(y_c - 4\right)^2} - 2$

$\rightarrow y_c + 5 = \sqrt{x_c^{\,2} + \left(y_c - 4\right)^2} \rightarrow y_c = \dfrac{x_c^{\,2} - 9}{18}$

Le lieu des centres des cercles est donc une parabole dont les équations paramétriques sont : $\begin{cases} x_c^{\,2} - 9 = 18t \\ y = t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_c = 3\sqrt{2t+1} \\ y_c = t \end{cases}$ et le rayon des cercles est $R = t + 3$

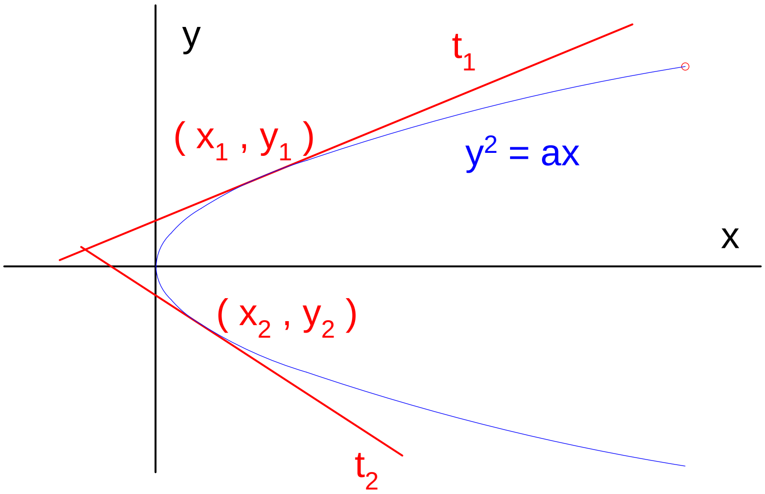
Les cercles ont pour équation : $\left(x - x_x\right)^2 + \left(y - y_c\right)^2 = R^2$

Ce qui donne : $\left(x - 3\sqrt{2t+1}\right)^2 + \left(y - t\right)^2 = \left(t + 3\right)^2$

Le 20 août 2005

EXGAP086 – ERM, 2004.

On considère deux tangentes différentes t_1 et t_2 à la parabole d'équation $y^2 = 2ax$, $a \in$ R.
On demande de démontrer que l'ordonnée du point d'intersection entre t_1 et t_2 est la moyenne arithmétique des ordonnées des points tangents.



$$y^2 = ax \rightarrow y = \sqrt{2ax} \rightarrow y' = \frac{a}{\sqrt{2ax}} = \frac{a}{y}$$

Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2), les coordonnées des deux points de tangences.

Les équations des tangentes sont :

$$t_1 \equiv y - y_1 = \frac{a}{y_1}(x - x_1) \rightarrow y - y_1 = \frac{a}{y_1}\left(x - \frac{y_1^2}{2a}\right) \rightarrow y - y_1 = \frac{a}{y_1}x - \frac{y_1}{2} \quad (1)$$

$$t_2 \equiv y - y_2 = \frac{a}{y_2}(x - x_2) \rightarrow y - y_2 = \frac{a}{y_2}\left(x - \frac{y_2^2}{2a}\right) \rightarrow y - y_2 = \frac{a}{y_2}x - \frac{y_2}{2} \quad (2)$$

Multiplions (1) par $\left(\frac{1}{y_2}\right)$ et (2) par $\left(\frac{1}{y_1}\right)$, et soustrayons membre à membre

$$\rightarrow (y - y_1)\frac{1}{y_2} - (y - y_2)\frac{1}{y_2} = -\frac{y_1}{2y_2} + \frac{y_2}{2y_1}$$

$$\rightarrow (y - y_1)y_2 - (y - y_2)y_1 = -\frac{y_1^2}{2} + \frac{y_2^2}{2}$$

$$\rightarrow y = \frac{1}{2}\frac{y_2^2 - y_1^2}{y_2 - y_1} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Le 20 août 2005

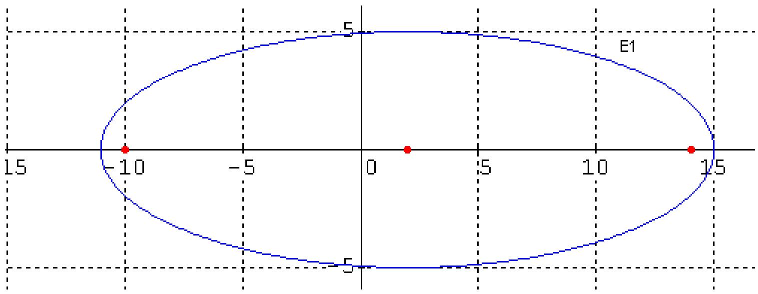
EXGAP087 – Mons, Juillet, 2003

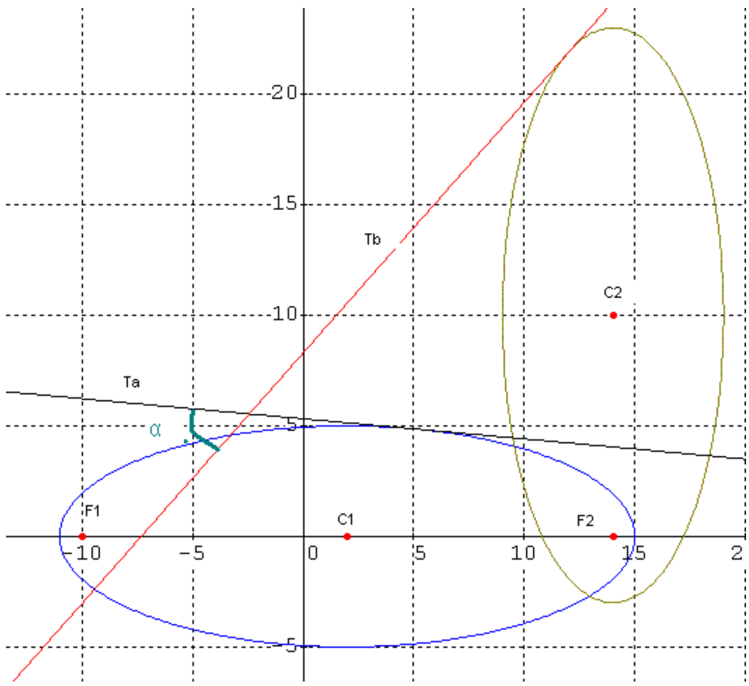
1. Déterminer l'équation d'une ellipse (ellipse 1) de centre C_1 dont le grand axe a pour longueur 20 et dont les foyers sont donnés par leurs coordonnées : F_1 (-10,0) et F_2 (14,0)

2. Si cette ellipse subit une rotation de 90° autours de C_1 puis une translation amenant son centre au point C_2 (14,10), quelle équation aura cette nouvelle 'ellipse 2'

3. Par le point *A* (abscisse 5 et ordonnée positive) de l'ellipse 1, on mène une tangente t_1 à cette ellipse 1. Par le point *B* (abscisses 12 et ordonnée positive), on mène une tangente t_2 à cette ellipse 2. Déterminer les équation des t_1 et t_2.

4. Que vaut l'angle aigu formé par ces deux tangentes ?





1) $X_{C_1} = \dfrac{14-10}{2} = 2;\ Y_{C_1} = 0$

Or on a $c^2 = a^2 - b^2 \rightarrow 144 = 169 - b^2 = 25 \rightarrow b = 5$

On en déduit : $E_1 \equiv= \dfrac{(x-2)^2}{13^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$

2) Immédiat : $E_2 \equiv \dfrac{(x-14)^2}{5^2} + \dfrac{(y-10)^2}{13^2} = 1$

3) Coordonnées de $A:(5,\ 4.865)$; Coordonnées de $B:(12,\ 21.915)$

Pente de t_1 et t_2 calculées selon $-\dfrac{F'_x}{F'_y}$, qui sont respectivement les dérivées partielles de l'ellipse selon x (on fixe y constant) et selon y (on fixe x constant).

On obtient :

$$m_A = -\left[\frac{2(x-2).5^2}{13^2.2y}\right]_{(5,\ 4.865)} = -0.0912 \quad \text{et} \quad m_B = \left[\frac{2(x-14).13^2}{5^2.2.(y-10)}\right]_{(12,\ 21.915)} = 1.1347$$

Les équations des tangentes sont donc :

$$\begin{matrix} (y-4.865) = -0.0912(x-5) \\ (y-21.915) = 1.1347(x-12) \end{matrix} \quad \text{ou encore} \quad \begin{matrix} y_A = -0.0912x + 5.321 \\ y_B = 1.1347x + 8.2986 \end{matrix}$$

4) <u>Première méthode</u>

L'angle formé par t_1 avec l'axe des abscisses est $\alpha = \arctan 0.0912 = 5.211°$

L'angle formé par t_2 avec l'axe des abscisses est $\beta = \arctan 1.1347 = 48.611°$

L'angle aigu formé par les deux tangenets est $\alpha+\beta=53.822°$

<u>Deuxième méthode</u> (Produit scalaire)

Angle de deux droites $u(1,-0.0912)$ et $v(1,1.1347)$ peut s'écrire

$$\cos\theta = \frac{(1).(1)+(-0.0912).(1.1347)}{\left(\sqrt{1^2+0.0912^2}\right)\left(\sqrt{1^2+1.1347^2}\right)} = \frac{0.8965}{1.1588} = 0.5903$$

$\rightarrow \theta = 53.82°$

EXGAP088 – Mons, Juillet, 2003

Déterminer l'équation d'une ellipse (ellipse 1) de centre C_1 dont le grand axe a
Soit une circonférence de centre (0,0) et de rayon 2.

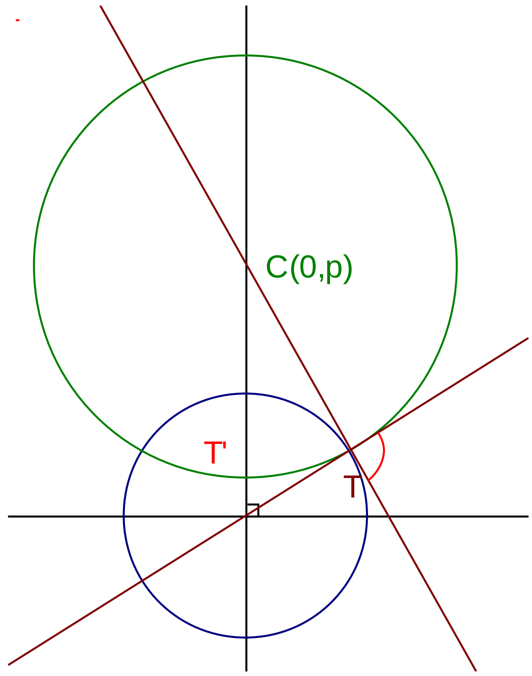
Soit une autre circonférence centrée en C sur l'axe Oy, de centre variable $(0, p)$.

1. Déterminer l'équation de cette circonférence variable si, aux points d'intersection des deux circonférences, la tangente à la première est perpendiculaire à la tangente de la seconde.

2. Si T est le point d'intersection variable et T' sa projection orthogonale sur OC, montrer que le produit des distances $|OT'|.|OC|$ est une constante.

3. Montrer que ce produit constant vaut le carré du segment tangent joignant O au point de tangence de ce segment avec la circonférence variable construite sur CT' comme diamètre.

4. Représenter graphiquement la loi de variation de $|OT'|$ en fonction de $|OC|$ et dites de quel type est la courbe obtenue.



1) De façon évidente, par la géométrie synthétique : $r^2{}_{variable} = CT^2 - OT^2 = p^2 - 4$

Donc les circonférences varianles ont pour équations : $x^2 + (y-p)^2 - (p^2-4) = 0 \;\; (1)$

2) $\left|\overrightarrow{OT'}\right| . \left|\overrightarrow{OC}\right| = Cte$?

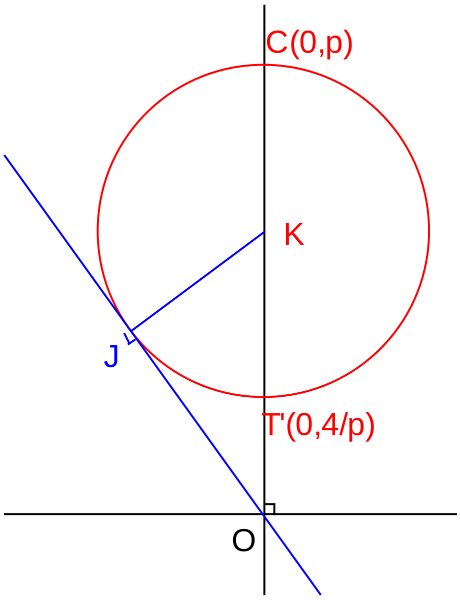
Point d'intersection T avec $x^2 + y^2 - 4 = 0 \quad (2)$

$\rightarrow (1)-(2) \rightarrow -2y_T.p + p^2 - (p^2-4) + 4 = 0$

$\rightarrow -2y_T.p + p^2 - p^2 + 4 + 4 = 0$

$\rightarrow y_T = \dfrac{4}{p} \rightarrow \left|\overrightarrow{OT'}\right| = \dfrac{4}{p}$

Donc $\left|\overrightarrow{OT'}\right| . \left|\overrightarrow{OC}\right| = \dfrac{4}{p}.p = 4 = Cte$



3) $\left|\overrightarrow{OT'}\right| . \left|\overrightarrow{OC}\right| = OJ^2$?

Centre K de la circonférence : $\left|\overrightarrow{OK}\right| = \dfrac{1}{2}.\left(p + \dfrac{4}{p}\right) = \dfrac{p}{2} + \dfrac{2}{p}$

Rayon de la circonférence : $\left(\dfrac{p}{2} + \dfrac{2}{p}\right) - \dfrac{4}{p} = \dfrac{p}{2} - \dfrac{2}{p}$

Et donc $\left|\overrightarrow{OJ}\right|^2 = \left(\dfrac{p}{2} + \dfrac{2}{p}\right)^2 - \left(\dfrac{p}{2} - \dfrac{2}{p}\right)^2 = 4$

4) C'est une hyperbole équilatère.

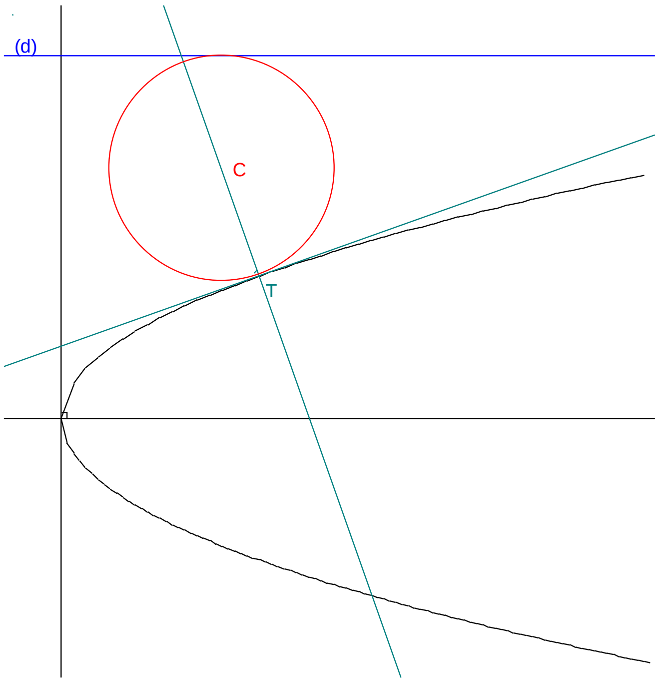
EXGAP089 – Mons, Juillet, 2003

Soit la parabole P ($y^2 = 4x$) et la droite d ($y = 3$).

1. Déterminer l'équation de la circonférence tangente à la droite d et à la parabole en son point T d'abscisse 1 et d'ordonnée positivé ; son centre est situé entre la parabole et la droite.

2. Déterminer l'équation de l'ellipse admettant comme centre C le centre de la circonférence déterminé en (1.) ; son grand axe est parallèle à Oy et sa longueur vaut 10 ; cette ellipse est tangente à la circonférence.

3. Déterminer l'équation de l'hyperbole équilatère passant par C et admettant comme asymptotes les droites ($y = 1$) et ($x = -1$)



1) Coordonnées de T d'abscisse 1 : $T\ (1,2)$

Le centre C de la circonférence cherchée appartient à la normale à la parabole P en T.

L'équation de la normale est : $(y-2)=\left(\dfrac{F'_y}{F'_x}\right)_T (x-1)$

$$\left.\begin{array}{l} F'_y=2y \\ F'_x=-4 \end{array}\right\} \to \left(\dfrac{F'_y}{F'_x}\right)_{(1,2)} = \dfrac{-4}{4}=-1 \text{ d'où l'équation de la normale : } (y-1)=-1.(x-1)$$

Sur le point courant de cette normale, d'abscisse = paramètre α

$y=2-x+1=3-x=3-\alpha$ ses coordonnées sont donc : $(\alpha,(3-\alpha))$

Distance de ce point courant (d) et à T : $\begin{array}{l} d_{\to(d)}=3-(3-\alpha)=\alpha \\ d_{\to(T)}=\sqrt{(\alpha-1)^2+((3-\alpha)-2)^2} \end{array}$

Le centre de la cironférence est tel que ces distances sont égales (et égales au rayon de la circonférence).

$\alpha^2=(\alpha-1)^2+(1-\alpha)^2$

$\alpha^2-4\alpha+2=0$

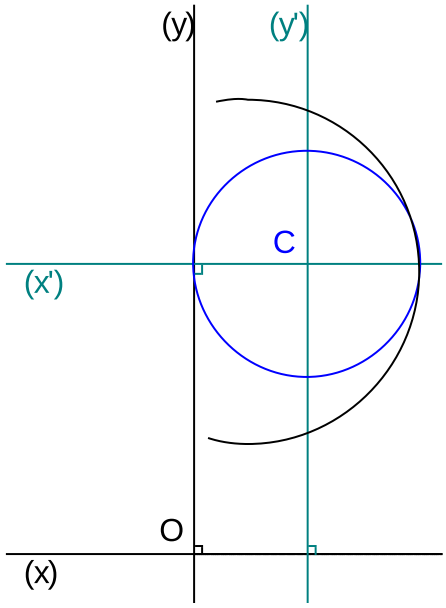
$$\alpha=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{2}=\begin{cases}3.4142\\0.5858\end{cases}$$

Comme le centre est imposé entre la parabole et la droite, c'est la solution 0.5858 qui doit être retenue.

Centre de la cironférence $C: y_C-2=-x_C+1\to y_C=-0.5858+3=2.4142$

D'où au final : $C:(0.5858,\ 2.4142)$

Equation de la circonférence : $(x-0.5858)^2+(y-2.4142)^2=0.5858^2$



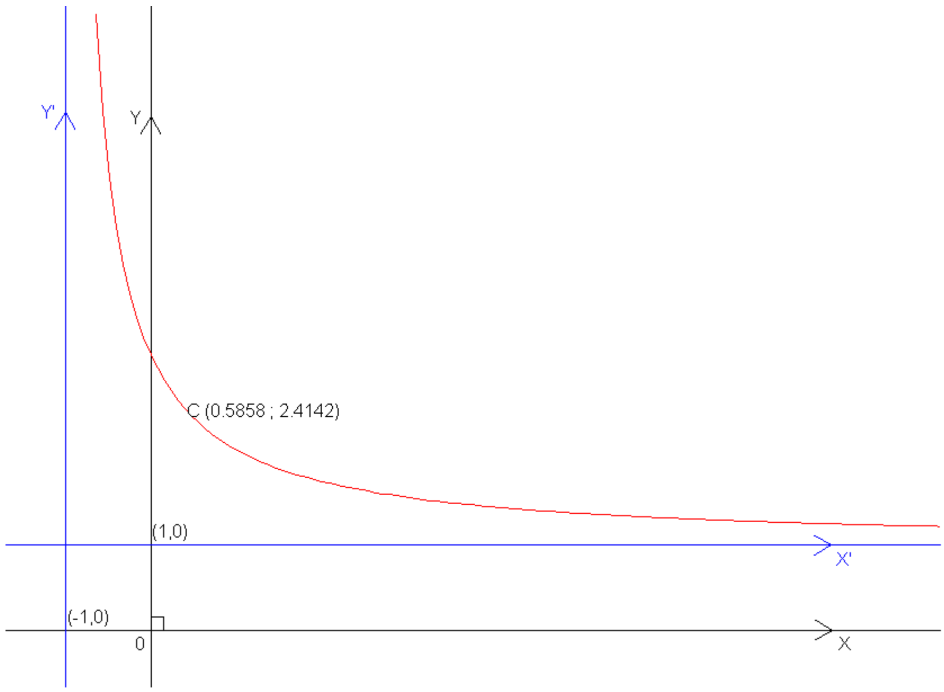
2) L'équation de l'ellipse admettant comme centre C , le centre de la circonférence déterminé en 1) et qui présente les particularités suivantes :

- Son grand axe est parallèle à Oy
- La longueur de ce grand axe vaut 10
- Elle est tangente à la circonférence

est : $\frac{x'^2}{0.5858^2}+\frac{y'^2}{5^2}=1$

Mais $\begin{cases} x'=x-0.5858 \\ y'=y-2.4142 \end{cases}$

Et donc l'équation de l'ellipse est : $\frac{(x-0.5858)^2}{0.5858^2}+\frac{(y-2.4142)^2}{25}=1$



3) Equation de l'hyperbole équilatère d'asymptote $O'x'$ et $O'y' \to x'.y'=k$

Dans $(x',y')=C(1.5858,\ 1.4142) \to x'_C.y'_C=(1.5858).(1.4142)=k$

Mais $\begin{cases} x'=x+1 \\ y'=y-1 \end{cases}$ d'où, dans $Oxy:(x+1)(y-1)=2.2426$

Le 6 septembre 2005 – Steve Tumson