Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie analytique plane

GAP 20

EXGAP200 – EXGAP209

http://matheux.ovh/Accueil.html

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Octobre 2019

EXGAP200 – EPL, UCL, LLN, juillet 2019 série 1.

Mouvement d 'une porte de garage.

Nous regardons une porte de garage de profil, de sorte qu'elle est assimilée à un segment de droite $\mathscr{P}$ d'une longueur de 2 mètres se déplaçant dans le plan (nous omettons les unités pour la suite). La porte est parfaitement verticale lorsqu'elle est fermée, et parfaitement horizontale lorqu'elle est ouverte.

Lebas de la porte (repéré en position fermée) se déplace dans des rails verticaux qui, en vue de profil, sont aussi confondus en un seul segment de droite reliant les points $A=(2,0)$ et $B=(2,2)$. Le haut de la porte (aussi repéré en position fermée) se déplace dans des rails horizontaux dont le segment correspondant relie les points B et $C(0,2)$. On néglige l'épaisseur des rails.

On appelle x_p l'abscisse du point de la porte se déplaçant sur BC (le point haut en position fermée), et y_p l'ordonnée du point de la porte se déplaçant sur AH (le point bas en position fermée). On désigne finalement (x_m,y_m) le milieu du segment P.

1) Réalisez un schéma en position ouverte, fermée et intermédiaire, en montrant les différentes coordonnées mentionnées ci-dessus.

2) Exprimez (x_m,y_m) en fonction de x_p et y_p et vice versa.

$(x_m,y_m)=$

$x_p=$ $y_p=$

3) Quel est le lieu des points (x_m,y_m)? Donnez en une représentation cartésienne et une description qualitative.

Lieu :

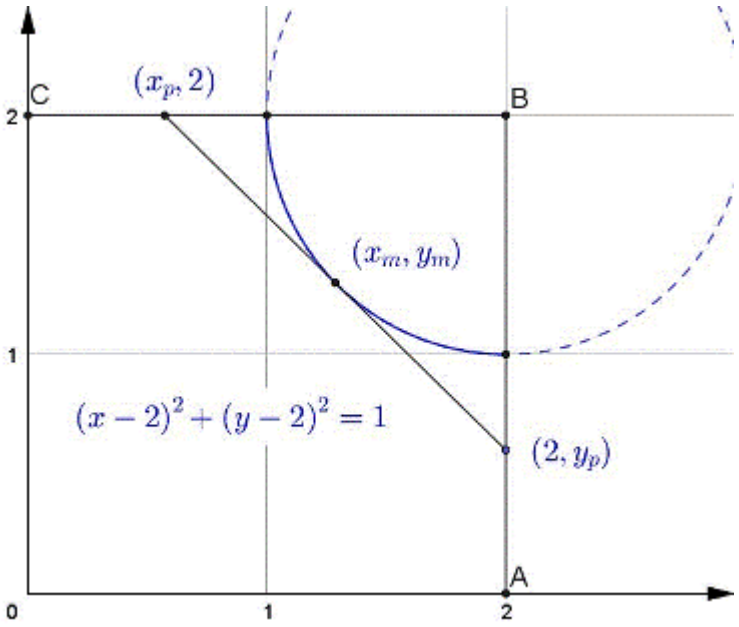
Description :

4) Même question pour un point de la porte à une proportion $0\le\alpha\le1$ du segment $\mathscr{P}$ c'est-à-dire dont les coordonnées sont $(2,2\alpha)$ lorsque la porte est fermée.

Lieu :

Description :

Solution proposée par Martine Devillers et Nicole Berckmans



2) $\boxed{(x_m, y_m) = \left(\frac{x_p+2}{2}, \frac{y_p+2}{2}\right)} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x_p = 2x_m - 2 \\ y_p = 2y_m - 2 \end{cases}}$

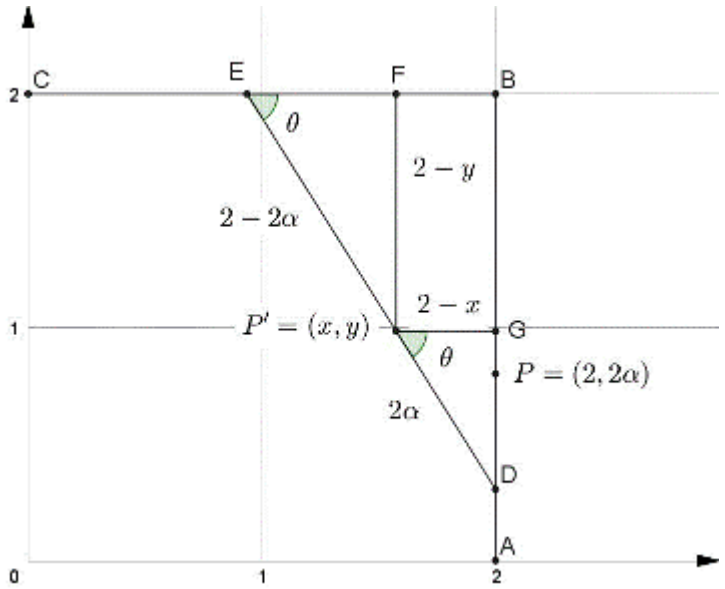
3) La distance de (x_m, y_m) à B est constante et vaut 1 m, car c'est la médiane d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est constante et vaut 2 m.

Ou bien on exprime que la distance entre $(x_p, 2)$ et $(2, y_p)$ vaut 2 m

$$(x_p-2)^2+(y_p-2)^2=4 \Rightarrow (2x_m-4)^2+(2y_m-4)^2=4 \Rightarrow 4(x_m-2)^2+4(y_m-2)^2=4$$

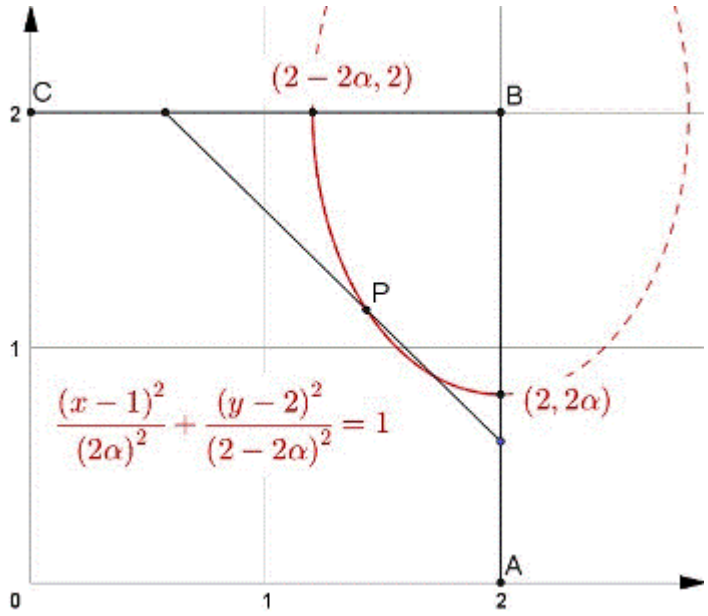
$\Rightarrow (x-2)^2+(y-2)^2=1$ C'est un cercle de centre $(2,2)$ et de rayon 1.

Le lieu cherché est 1/4 de ce cercle limité par les points $(2,1)$ et $(1,2)$.



4) $\left.\begin{array}{l}\text{Triangle } EFP: \quad \sin\theta = \dfrac{2-y}{2-2\alpha} \\ \text{Triangle } PGD: \quad \cos\theta = \dfrac{2-x}{2\alpha}\end{array}\right\} \Rightarrow \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \Rightarrow \boxed{\dfrac{(2-x)^2}{(2\alpha)^2} + \dfrac{(2-y)^2}{(2-2\alpha)^2} = 1}$

Le lieu cherché est 1/4 d'ellipse centrée en $(2,2)$, d'axe $x=2$ et $y=2$ et de longueur 4α et $4-4\alpha$, et de délimité par les points $(2,2\alpha)$ et $(2-2\alpha,2)$

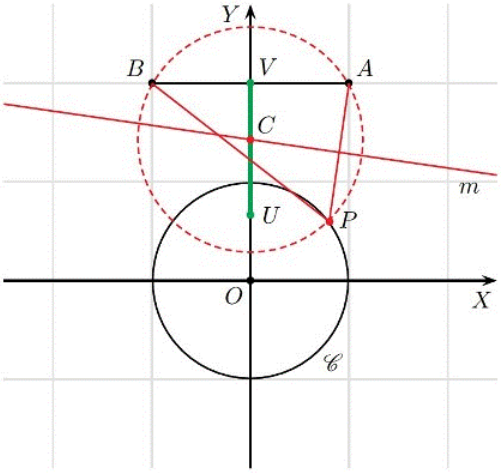


20 octobre 2019

EXGAP201 – EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2019.

Le plan est muni d'un système d'axes orthonormés *Pxy*. On considère les points $A(1,2)$ et $B(-1,2)$ ainsi qu'un point variable P parcourant le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminez la nature et des équations paramètriques du lieu géométrique parcouru par le centre du cercle circonscrit au triangle ABP (c'est-à-dire le cercle passant par les trois sommets du triangle).

Solution proposée par Christian VAN HOOSTE



Soit (α, β) la coordonnée du point P.
Comme ce point doit appartenir au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1, les paramètres α et β sont liés par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1\,.$$

Le centre C du cercle circonscrit au triangle ABP appartient à la médiatrice du côté $[AB]$, donc à l'axe Oy car les points A et B sont symétriques l'un de l'autre par rapport à cet axe. Aussi, la coordonnée de C est de la forme $(0, h)$.
Comme C doit aussi appartenir à la médiatrice du côté $[AP]$, il doit être équidistant de A et de P.
Nous devons donc avoir

$$\sqrt{(1+(h-2)^2} = \sqrt{\alpha^2 + (h-\beta)^2}\,.$$

De là, nous tirons successivement

$$1 + (h-2)^2 = \alpha^2 + (h-\beta)^2$$

$$1 + h^2 - 4h + 4 = \alpha^2 + h^2 - 2h\beta + \beta^2$$

$$-4h + 4 = -2h\beta$$

$$h = \frac{2}{2-\beta}\,.$$

Lorsque P parcourt le cercle $\mathscr{C}$, β varie entre 1 et 1 de sorte que le point C parcourt le segment situé sur l'axe Oy limité par les points

$$U\left(0, \frac{2}{3}\right) \quad \text{et} \quad V(0,2)\,.$$

Le lieu du point P est le segment $[UV]$.

Le 15 novembre 2019

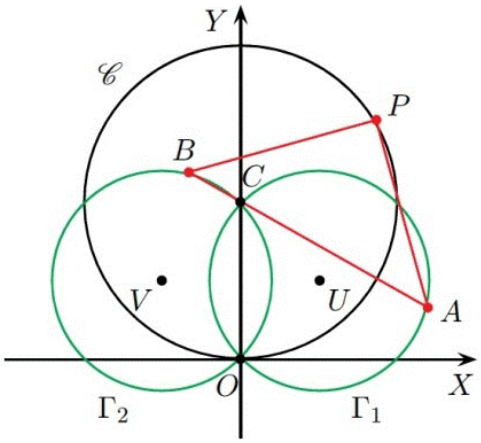
EXGAP202 – EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2019.

Le plan est muni d'un système d'axes orthonormés Oxy. Soit P un point variable de ce plan de coordonnées (x_P, y_P).

a) Déterminez, en fonction de x_P et y_P, les coordonnées des points A et B tels que $OAPB$ est un carré dont OP est une des diagonales.

b) Déduisez-en la nature et une équation cartésienne des lieux parcourus par les points A et B lorsque le point parcourt le cercle de centre $(0,1)$ et de rayon 1.

Solution proposée par Christian VAN HOOSTE



Nous supposons que les sommets du carré $OAPB$ se succèdent dans le sens trigonométrique.

a) Plaçons temporairement la figure dans le plan de GAUSS.
Notons respectivement p, a et b les affixes des points P, A et B.
Les points A et B sont les images respectives du point P par les similitudes s et s' de même centre O, de même rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angles opposés $-45°$ et $45°$.
Dès lors, nous avons

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}(-45°)\,p = \frac{1-i}{2}p = \frac{(1-i)(x_P+i\,y_P)}{2} = \frac{(x_P+y_P)+i\,(-x_P+y_P)}{2}$$

et

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{cis}45°\,p = \frac{1+i}{2}p = \frac{(1+i)(x_P+i\,y_P)}{2} = \frac{(x_P-y_P)+i\,(x_P+y_P)}{2}.$$

Ainsi, dans le plan euclidien, nous obtenons

$$\boxed{\text{coord } A = \left(\frac{x_P+y_P}{2}, \frac{-x_P+y_P}{2}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\text{coord } B = \left(\frac{x_P-y_P}{2}, \frac{x_P+y_P}{2}\right)}$$

b) Comme le point P parcourt le cercle $\mathscr{C}$, les lieux des points A et B sont respectivement les images de $\mathscr{C}$ par les similitudes s et s', c'est-à-dire les cercles Γ_1 et Γ_2 de même rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$, le premier de centre U, image de C par s, et le second de centre V, image de C par s'.
Donc,

- le lieu de A est le cercle Γ_1 de centre $U(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$;
- le lieu de B est le cercle Γ_2 de centre $V(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ces deux cercles comprennent les points O et C.

Le 15 novembre 2019. Modifié le 13 mai 2021

EXGAP203 – Polytech, UMons, Mons, Juillet 2014.

Soit les droites d'équations:

- $d_1 : \ y-3=0$
- $d_2 : \ x+1=0$
- $d_3 : \ x=0$
- $d_4 : \ y-\sqrt{3}x+2=0$

1.Trouvez l'équation de la circonférence c_1 tangente aux droites d_2 et d_4 et dont le centre est porté par la droite d_3.

2. Représentez sur un dessin les droites d_1 à d_4 ainsi que c_1.

3. Etablissez l'expression analytique d´ecrivant le lieu géométrique des centres des circonférences simultanément tangentes à la droite d_1 et tangentes intérieurement au cercle de centre $(0,\ 0)$ et de rayon 1. Quel est la nature de ce lieu géométrique?

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

1. Trouvez l'équation de la circonférence c_1 tangente aux droites d_2 et d_4 et dont le centre est porté par la droite d_3.

   Le centre du cercle recherché est à l'intersection de d_3 et de la bissectrice de d_2 et de d_4. Recherchons cette bissectrice...

   Par définition, tout point de la bissectrice est équidistant des droites d_2 et d_4.
   Possibilité d'indice : distance d'un point M ***une droite d'équation*** $Ax + By + C = 0$***. Si*** M' ***est la projection orthogonale de M sur la droite :***

$$|MM'| = |\frac{Ax_M + By_M + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}| \tag{3}$$

$$\frac{x+1}{\sqrt{1}} = \frac{-\sqrt{3}x + y + 2}{\sqrt{3+1}} \tag{4}$$

$$2x + 2 = -\sqrt{3}x + y + 2$$

$$\left(2+\sqrt{3}\right)x - y = 0 \tag{5}$$

   L'eq. 5 est l'équation de la bissectrice recherchée. Pour trouver le centre du cercle, il faut résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} \left(2+\sqrt{3}\right)x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Solution : $y = 0$

Le cercle recherché est donc centré en $(0,0)$. De plus son rayon vaut 1. L'équation du cercle c_1 recherché est donc :

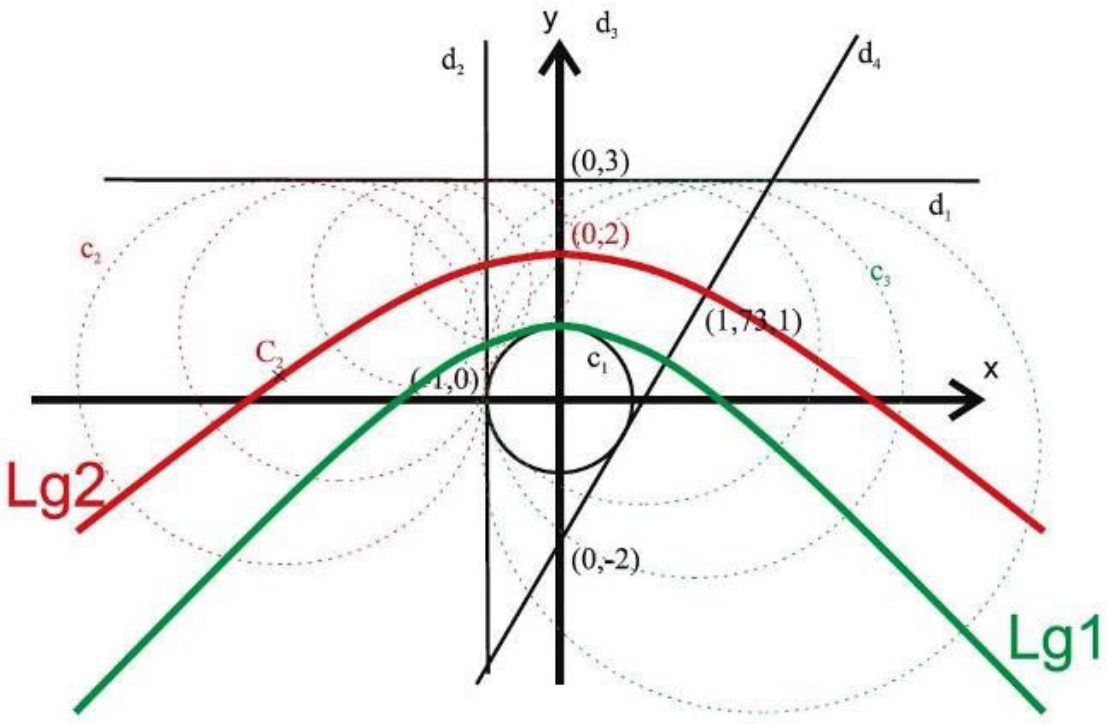
$$c_1 : \qquad x^2 + y^2 = 1 \tag{7}$$

2. Dessin...

3. Établissez l'expression analytique décrivant le lieu géométrique des centres des circonférences simultanément tangentes à la droite d_1 et tangentes intérieurement au cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

   On remarque que le cercle donné est celui dont on vient d'établir l'équation. La circonférence c_3 (voir dessin) semble satisfaire les conditions géométriques énoncées. Son centre est donc a égale distance de la droite d_1 et du point de tangence avec c_3. Soit :

$$3 - y = \sqrt{x^2 + y^2} + 1 \tag{8}$$



INFO COMPLÉMENTAIRE NON DEMANDÉE : Il existe un second lieu analogue... celui des centres des circonférences simultanément tangentes à la droite d_1 et tangentes **extérieurement** au cercle de centre (0,0) et de rayon 1. La circonférence c_2 en est un exemple.

$$3 - y = \sqrt{x^2 + y^2} - 1 \tag{10}$$

L'eq. 10 est donc le lieu LG2 :

$$\begin{aligned} 4 - y &= \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (11) \\ 16 - 8y + y^2 - x^2 - y^2 &= 0 \\ x^2 + 8y - 16 &= 0 \end{aligned}$$

Le LG2 est donc une parabole. Son sommet est en $(0, 2)$. Elle admet l'axe vertical pour axe de symétrie.

---

1 mars 2020

EXGAP204 – Polytech, UMons, Mons, Juillet 2014.

Dans un repère orthonormé Oxy, on considère deux droites a et b formant un angle entre elles. On nomme P leur point d'intersection. Soit M un point n'appartenant ni à a ni à b. On construit le point M' par symétrie orthogonale de M par rapport à a et M'' par symétrie orthogonale de M' par rapport à B. On demande:

- de dessiner une figure reprenant la construction de l'énoncé;
- de démontrer que le point M'' est l'image de M par une rotation de centre P d'angle 2α ;
- de définir une condition sur α pour que le quadrilatère $PMM'M''$ soit inscriptible;
- dans le cas où a a pour équation $y = 2$, b a pour équation $y = 3x + 2$ et M a pour coordonnées $(3, -1)$:
  - de rechercher les coordonnées des points P, M' et M'' ;
  - de vérifier analytiquement la première propriété démontrée (M'' est l'image de M par une rotation de centre P d'angle 2α) ;
  - de rechercher l'équation de l'hyperbole admettant PM et PM' comme asymptotes et qui passe par le point M''.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

Partie 1

la figure 1 repend les données du problème.

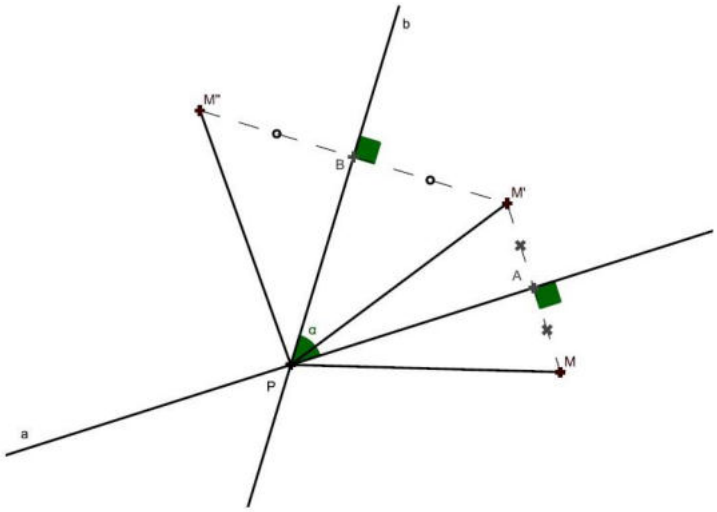


FIGURE 1 – Figure pour la question de géométrie plane

Partie 2

Soit A l'intersection de MM' avec a. Les triangles PAM et PAM' sont isométriques (deux côtés de même mesure et un angle commun). On peut donc écrire que :

$$|PM| = |PM'| \text{ et } \widehat{MPA} = \widehat{M'PA} \tag{1}$$

Soit B l'intersection de $M'M''$ avec b. Les triangles PBM' et PBM'' sont isométriques (deux côtés de même mesure et un angle commun). On peut donc écrire que :

$$|PM'| = |PM''| \text{ et } \widehat{M'PB} = \widehat{M''PB} \tag{2}$$

La combinaison des relations précédentes permet donc de dire que

$$|PM| = |PM''| \tag{3}$$

$$\widehat{MPM''} = \widehat{MPM'} + \widehat{M'PM''} = 2 \cdot \left(\widehat{M'PA} + \cdot\widehat{M'PB}\right) = 2 \cdot \alpha \tag{4}$$

Ce qui démontre la propriété.

Partie 3

Pour qu'un quadrilatère soit inscriptible, il faut que deux angles opposés soient supplémentaires. On a démontré que $\widehat{MPM''} = 2\alpha$. L'angle $\widehat{MM'M''}$ peut être décomposé selon :

$$\widehat{MM'M''} = \widehat{MM'P} + \widehat{PM'M''} \tag{5}$$

Le triangle PAM' est rectangle en A, on peut donc écrire que $\widehat{MM'P} = \pi/2 - \widehat{M'PA}$. De même, le triangle PBM' est rectangle en B, on peut donc écrire que $\widehat{M''M'P} = \pi/2 - \widehat{M'PB}$. En rassemblant ces relations, on obtient donc que :

$$\widehat{MM'M''} = \pi/2 - \widehat{M'PA} + \pi/2 - \widehat{M'PB} = \pi - \alpha \tag{6}$$

La somme des deux angles opposés vaut donc $\alpha + \pi$, la seule façon d'avoir des angles supplémentaires est d'avoir $\alpha = 0$ (c'est-à-dire deux droites confondues). Dans ce cas limite, les points M et M'' sont confondus.

Partie 4

La figure 2 présente une vue à l'échelle du problème.

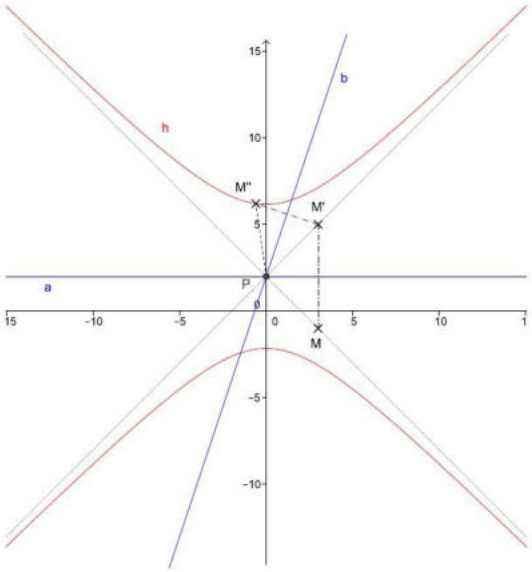


FIGURE 2 – Figure avec les valeurs pour la résolution analytique

Coordonnées des points

P est à l'intersection de a et b, ses coordonnées sont donc solution du système :

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = 2 \end{cases} \tag{7}$$

P a donc pour coordonnées (0,2). Les coordonnées de M' s'obtiennent directement (3,5). Pour trouver M'', il faut dans un premier temps trouver la position du point B. Pour ce faire, il faut rechercher l'équation de la droite perpendiculaire à b passant par M'. Son coefficient directeur vaut $-1/3$ (si deux droites sont perpendiculaires, le produit de leurs coefficients directeurs vaut -1). En imposant le passage de cette droite par le point M', on obtient :

$$5 = -\frac{1}{3}3 + p \Rightarrow p = 6 \tag{8}$$

Les coordonnées de B sont obtenues par intersection de cette droite avec b, c'est-à-dire en résolvant :

$$\begin{cases} y = 3x + 2 \\ y = -\frac{1}{3}x + 6 \end{cases} \tag{9}$$

On trouve donc B=(1,2 ;5,6). La position de M'' est obtenue par l'équation vectorielle suivante : $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM'} + 2 \cdot \overrightarrow{M'B}$, ce qui donne (-0,6 ;6,2) comme coordonnées pour M''.

Vérification de la propriété

La calcul de distances est immédiat :

$$\left\|\overrightarrow{PM}\right\| = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-2)^2} = 3\sqrt{2} \tag{10}$$

$$\left\|\overrightarrow{PM''}\right\| = \sqrt{(-0,6-0)^2 + (6.2-2)^2} = 3\sqrt{2} \tag{11}$$

$$\tag{12}$$

Le calcul des angles passe par le produit scalaire :

$$\widehat{MPM''} = \arccos \frac{\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PM''}}{\left\|\overrightarrow{PM}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{PM''}\right\|} = 143,13...^\circ \tag{13}$$

$$\widehat{APB} = \arccos \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{\left\|\overrightarrow{PA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{PB}\right\|} = 71,56...^\circ \tag{14}$$

Hyperbole

Les droites PM' et PM ont un coefficient directeur de ± 1, ce qui signifie que l'hyperbole est une hyerbole équilatère. Le centre de l'hyperbole est à l'intersection de ses asymptotes, c'est-à-dire au point P. La forme générale de l'hyperbole est donnée par l'une des propositions suivantes :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(y-2)^2}{a^2} - 1 = 0 \tag{16}$$

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{(y-2)^2}{a^2} - 1 = 0 \tag{17}$$

si on veut que le point M'' appartienne à la courbe, il faut que ses coordonnées vérifient l'équation

$$\frac{-0,6^2}{a^2} - \frac{(6,2-2)^2}{a^2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = -17,28 \tag{18}$$

$$-\frac{-0,6^2}{a^2} + \frac{(6,2-2)^2}{a^2} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 17,28 \tag{19}$$

C'est donc la première forme qui est retenue (un carré est forcément positif) ; l'équation est donc :

$$\frac{x^2}{17,28} - \frac{(y-2)^2}{17,28} - 1 = 0 \tag{20}$$

EXGAP205 – Polytech, UMons, Mons, Juillet 2014.

Dans le système de référence orthonormé OXY, considérons un point A d'abscisse et d'ordonnées positives.

a) Déterminer le lieu L_1 des points P tels que $\frac{|AP|}{|OP|} = \frac{2}{3}$.

b) Déterminer le lieu L_2 du centre des cercles tangents à l'axe OY et passant par A.

c) Soit Q l'intersection entre le segment OA et L_1, déterminer les intersections de la perpendiculaire a OA passant par Q et L_2 dans le cas particulier ou le point A est en $(3\ ;7)$,

Accompagnez chacune de vos réponses d'une figure claire présentant la situation.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :

https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

a) Déterminer le lieu L1 des points P tels que $\frac{|AP|}{|0P|} = 2/3$.

Les points P se trouvent à l'intersection entre deux cercles respectivement de centre O et A et de rayon R et $\frac{2}{3}R$.
On peut donc écrire :

$$x^2 + y^2 = R^2$$

et

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = \frac{4}{9}R^2$$

d'où

$$x^2 + y^2 = \frac{9}{4}((x - x_A)^2 + (y - y_A)^2)$$

$$x^2 - \frac{9}{4}x^2 + \frac{9}{2}x_A x - \frac{9}{4}x_A^2 + y^2 - \frac{9}{4}y^2 + \frac{9}{2}y_A y - \frac{9}{4}y_A^2 = 0$$

$$5x^2 - 18x_A x + 9x_A^2 + 5y^2 - 18y_A y + 9y_A^2 = 0$$

Soit

$$\left(x - \frac{9}{5}x_A\right)^2 + \left(y - \frac{9}{5}y_A\right)^2 = \frac{36}{25}x_A^2 + \frac{36}{25}y_A^2$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\left(\frac{9}{5}x_A, \frac{9}{5}y_A\right)$ et de rayon $\sqrt{\frac{36}{25}x_A^2 + \frac{36}{25}y_A^2}$.

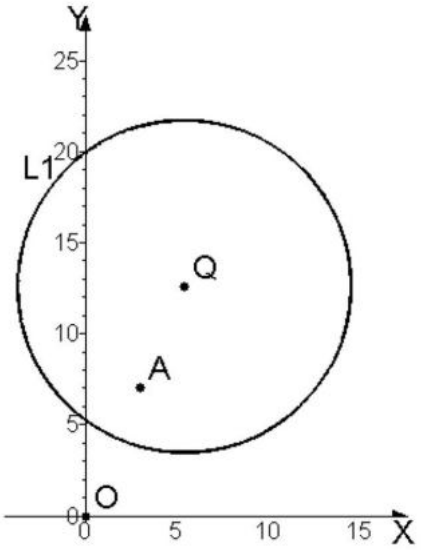


Fig.1: Lieu L1 dans le cas où A est en (3 ; 7).

b) Déterminer le lieu L2 du centre des cercles tangents à l'axe OY et passant par A.

Le centre des cercles est à égale distance de la droite OX et du point A(X_A,Y_A). Il s'agit donc d'une parabole d'axe focal parallèle à OX passant par A, de sommet S ($\frac{X_A}{2}$, Y_A) et de foyer A(X_A,Y_A).

Son équation cartésienne peut s'écrire :

$$(y - Y_S)^2 - 4p(x - X_S) = 0$$

avec

$$p = \frac{X_A}{2}$$

soit

$$(y - Y_A)^2 - 2X_A\left(x - \frac{X_A}{2}\right) = 0$$

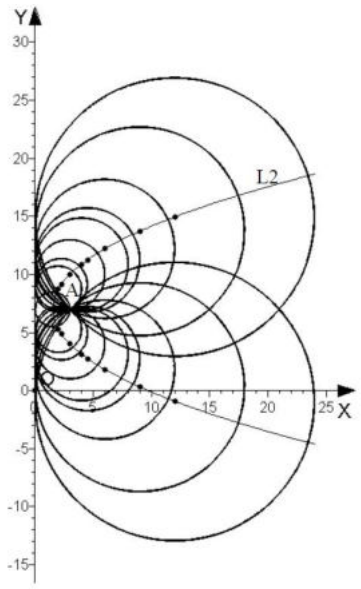


Fig.2: Construction point par point du lieu L2 dans le cas où A est en (3 ; 7).

c) Soit Q l'intersection entre le segment OA et L1, déterminer les intersections de la perpendiculaire à OA passant Q et L2 dans le cas particulier où le point A est en (3 ; 7).

Q est sur OA et tel que $|OQ| = \frac{3}{2}|AQ|$, $|OA| = \frac{3}{2}|AQ| + |AQ| = \frac{5}{2}|AQ|$, donc $|OQ| = \frac{3}{5}|OA|$.
Q a donc pour coordonnées $\left(\frac{3}{5}x_A, \frac{3}{5}y_A\right)$ soit $\left(\frac{9}{5}, \frac{21}{5}\right)$.

La droite OA a pour coefficient angulaire $\frac{y_A}{x_A}$, sa perpendiculaire a donc pour coefficient angulaire $-\frac{x_A}{y_A}$, soit $-\frac{3}{7}$. La perpendiculaire à OA passant par Q a donc pour équation cartésienne

$$\left(y - \frac{21}{5}\right) = -\frac{3}{7}\left(x - \frac{9}{5}\right)$$

ou encore

$$x = \frac{7}{3}\left(\frac{174}{35} - y\right) \quad (1)$$

Lorsque A est en (3 ; 7), l'équation de L2 devient :

$$y^2 - 14\,y - 6x + 58 = 0$$

En remplaçant x par l'expression (1) dans l'équation de L2, on obtient :

$$y^2 - 14\,y - 14(\frac{174}{35} - y) + 58 = 0$$

$$y^2 - 14\,y + 14\,y + 58 - \frac{348}{5} = 0$$

soit

$$y^2 = \frac{58}{5}$$

Les intersections sont donc

$$I_1 : \left(\frac{7}{3}\left(\frac{174}{35} - \sqrt{\frac{58}{5}}\right) ; \sqrt{\frac{58}{5}}\right) \text{ et } I_2 : \left(\frac{7}{3}\left(\frac{174}{35} + \sqrt{\frac{58}{5}}\right) ; -\sqrt{\frac{58}{5}}\right)$$

soit

$$I_1 : (3{,}6530\,;\ 3{,}4059\,) \text{ et } I_2 : (19{,}5470\ ;\ -3{,}4059)$$

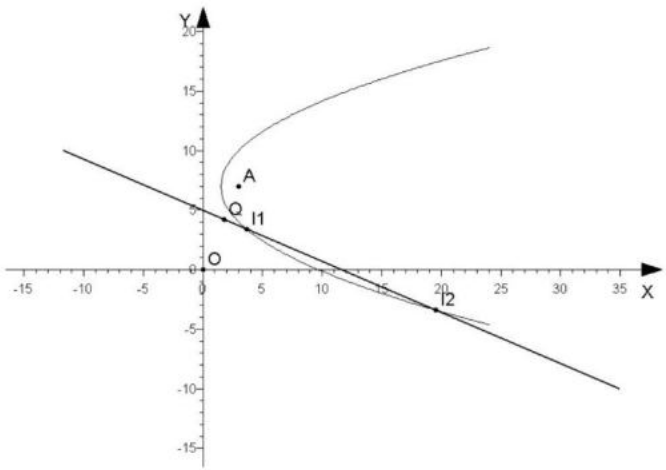


Fig.3: Intersections de la perpendiculaire à OA passant Q et L2 lorsque A est en (3 ; 7).

EXGAP206 – Polytech, UMons, Mons, 2014.

Dans le système de référence orthonormé Oxy, considérons une droite d d'équation :

$$2x+5y=18$$

et M un point de cette droite, d'abscisse égale à -1. Soit la circonference γ_1 de centre M et de rayon égal à 3 et A et B les points d'intersection de ce cercle avec la droite d.
On demande de déterminer l'équation du cercle γ_2 pour lequel le segment AB est une corde et dont le centre C appartient à la droite d'équation $y=-1$.
Question 2

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

Le point M appartient à la d d'équation :

$$\mathbf{2x+5y=18} \qquad (1)$$

d'où : M (−1, 4). La circonférence γ_1 de centre M et de rayon 3 a donc pour équation :

$$\mathbf{(x+1)^2+(y-4)^2=9} \qquad (2)$$

L'intersection entre γ_1 et d fournit deux points A et B dont les coordonnées sont obtenues en combinant (1) et (2). L'équation (1) donne :

$$\mathbf{y=-0,4x+3,6}\,.$$

Ensuite, en remplaçant dans (2) :

$$\mathbf{(x+1)^2+(-0,4x-0,4)^2=9}\,.$$

Soit, finalement les deux solutions :

$$x_A=-3,7854 \quad \text{et} \quad x_B=1,7854.$$

On en déduit par (1) les valeurs de y associées et finalement les coordonnées des points recherchés :

$$\text{A } (-3,7854\ ;\ 5,1142) \quad \text{et} \quad \text{B } (1,7854\ ;\ 2,8858).$$

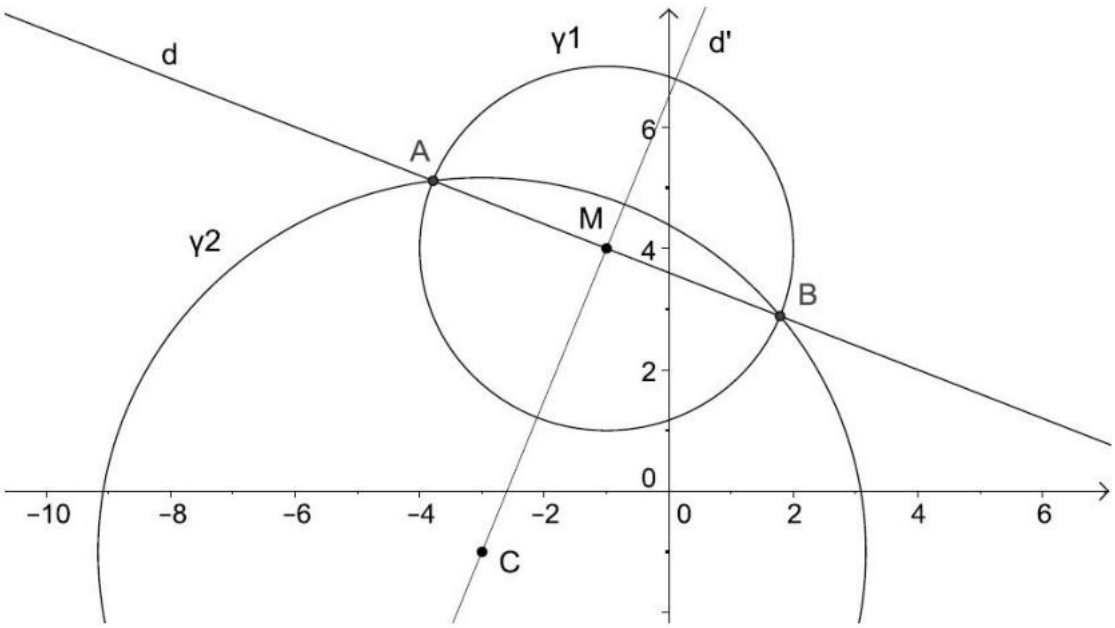
Le centre C du cercle γ_2 appartient à la droite d' perpendiculaire (donc de pente inverse et opposée) à la corde AB, et passant par son milieu M :

$$\mathbf{d' \equiv\ y-4=2,5(x+1)}$$

et a −1 pour ordonnée. Dès lors : C (−3, −1).

La distance MC vaut $\sqrt{29}$ et le rayon AC (ou BC) vaut $\sqrt{3^2+29}=\sqrt{38}$. Finalement, l'équation de γ_2 est :

$$\mathbf{(x+1)^2+(y+3)^2=38.}$$



1 mars 2020

EXGAP207 – Polytech, UMons, Mons, Juillet 2015.

Dans l'espace R^2 rapporté à un système orthonormé XY, considérons un triangle ABC.
Les coordonnées de ses sommets sont : $A\ (0,0)$; $B\ (8,0)$; $C\ (x_C, y_C)$.
Soit M le milieu du côté AC;

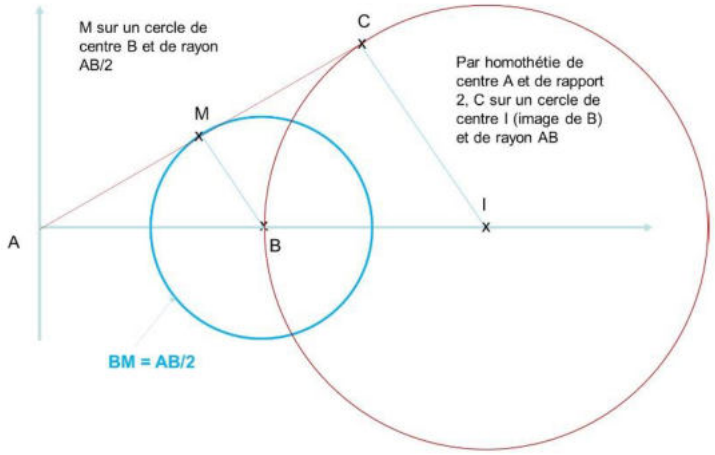
1. Sachant que la médiane BM à une longueur valant: AB / 2, définissez par les méthodes de la géométrie synthétique les lieux des sommets C.
2. En considérant que $BC = BM$, déterminez graphiquement les deux positions possibles, C_1 et C_2, du sommet C.
3. Par les méthodes de la géométrie analytique déterminez les coordonnées des points C_1 et C_2.

Nous ne considérerons maintenant que le triangle ABC tel que $y_C > 0$
Soit H le pied sur le côté BC de la hauteur issue de A.
Soit le point J, intersection de cette hauteur avec la médiatrice du côté AC.
Le point d'intersection de cette médiatrice avec le côté BC est nommé « N ».

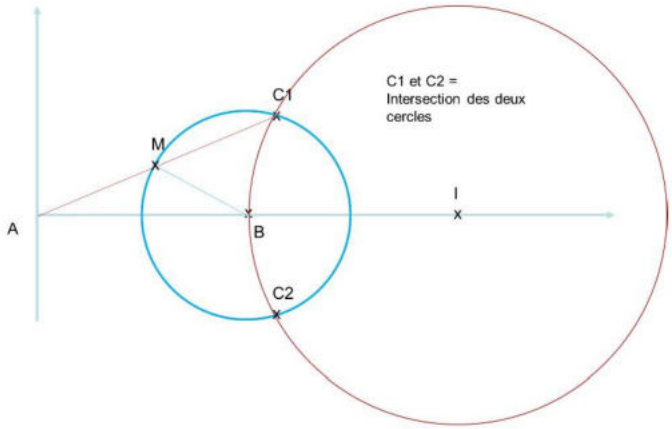
4. Démontrez par les méthodes de la géométrie synthétique que les 3 angles JCN, HMN et JAN sont égaux.
5. Par les méthodes de la géométrie analytique, déterminez l'équation du cercle passant par les points A, M et H.

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

1. Sachant que la médiane BM à une longueur valant: AB / 2, définissez par les méthodes de la géométrie synthétique les lieux des sommets C.



2. en considérant que BC = BM, déterminez graphiquement les deux positions possibles, C_1 et C_2, du sommet C.



3. Par les méthodes de la géométrie analytique déterminez les coordonnées des points C_1 et C_2.

C_1 et C_2 intersections des cercles

- De centre B (8,0) et de rayon AB/2 = 4
  $(x-8)^2 + y^2 = 16$
- De centre I (16,0) et de rayon AB = 8
  $(x-16)^2 + y^2 = 64$

$(x-8)^2 - (x-16)^2 = 16 - 64$

$x^2 - 16x + 8^2 - x^2 + 32x - 16^2 = -48$

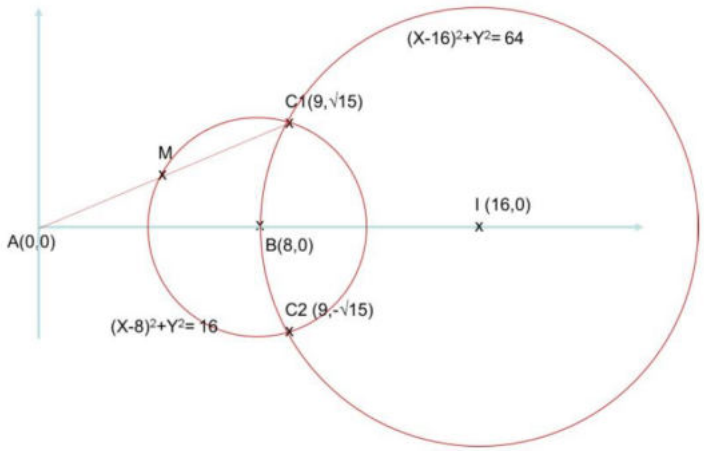
$x = 9$

En remplaçant :

$(9-8)^2 + y^2 = 16$

$y^2 = 15$

$y = \pm \sqrt{15}$



Nous ne considérerons maintenant que le triangle ABC tel que $y_C > 0$

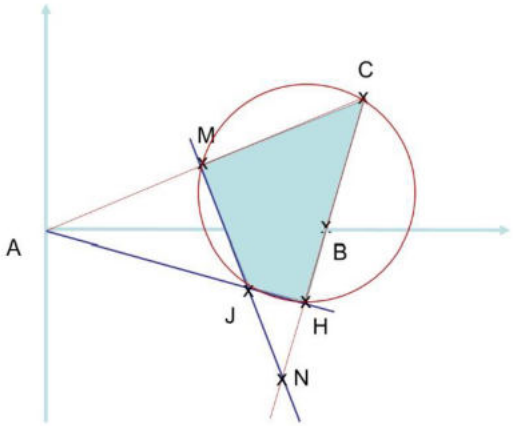
Soit H le pied sur le côté BC de la hauteur issue de A

Soit le point J, intersection de cette hauteur avec la médiatrice du côté AC.

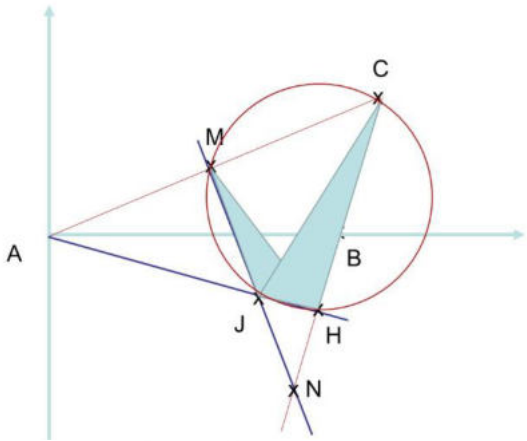
Le point d'intersection de cette médiatrice avec le côté BC est nommé« N ».

1. Démontrez par les méthodes de la géométrie synthétique que les 3 angles JCN, HMN et JAN sont égaux.

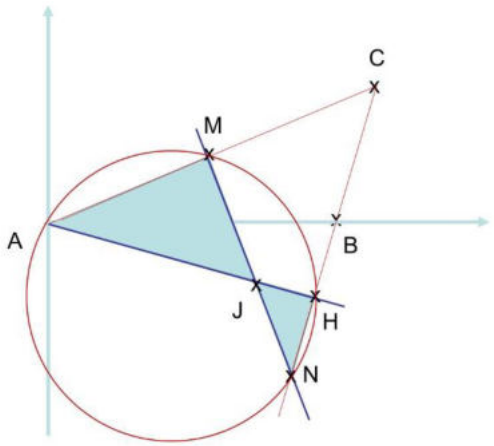
MCHJ est inscriptible car les angles en M et en H sont supplémentaires



Les angles inscrits en M et en C ont mêmes valeurs car interceptent le même arc JH



D'autre part, MJNHA est inscriptible car les angles en M et en H sont supplémentaires

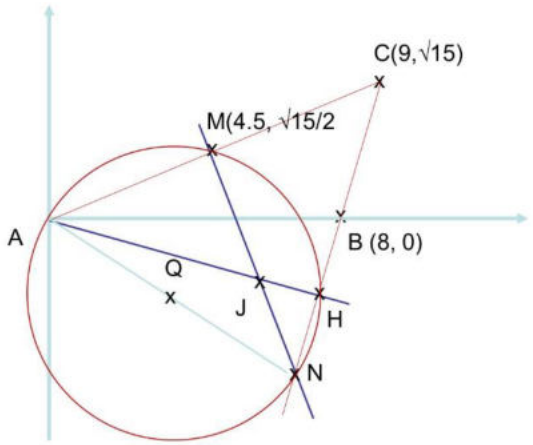


2. Par les méthodes de la géométrie analytique, déterminez l'équation du cercle passant par les points A, M et H.

Ce cercle passe également par N (cf quadrilatères MJNHA)

AN = diamètre car AMN rectangle

Centre Q = milieux de AN



Coordonnée de N ?

N est l'intersection de BC et de MN

Equation de BC :

$y = x\sqrt{15} - 8\sqrt{15}$

Equation de MN :

MN perpendiculaire à AC :

Pente $-9/\sqrt{15}$

$y = -9/\sqrt{15}\, x + b$

MN passe par M (9/2, √15/2), milieu de AC :

$\sqrt{15}/2 = -9/\sqrt{15}\ 9/2 + b$

$y = -9/\sqrt{15}\, x + 48/\sqrt{15}$

Intersection de BC et de MN :

$xN = 7$

$yN = -\sqrt{15}$

Equation du cercle :

Centre Q (7/2, $-\sqrt{15}/2$), milieu de AN

Rayon = AN /2 = 4

$(x - 7/2)^2 + (y + \sqrt{15}/2)^2 = 16$

EXGAP208 – Polytech, UMons, Mons, Juillet 2015.

Dans un repère orthonormé Oxy, soient deux circonférences, c_1 de rayon R_1 et c_2 de rayon $R_2 > R_1$. Le point C de coordonnées $(R_2, 0)$ est le centre de c_1 et c_2.
Soit une droite δ passant par le point A de coordonnées $(-2R_1, 0)$ et coupant l'axe Oy en un point B de coordonnées $(0, y_B)$.

1. Déterminez par les méthodes de la géometrie synthétique pour quelles valeurs $y_B > 0$ la droite δ n'intersecte qu'une seule des deux circonférences.

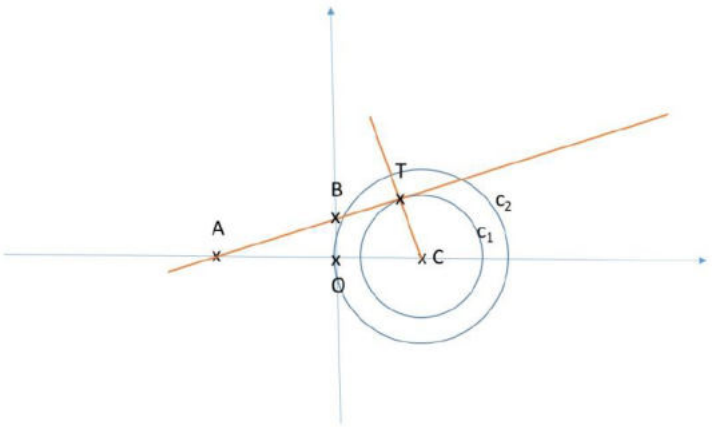
Soit la parabole de sommet $S(0,-2)$ et de foyer $F(0,-1)$.

2. Exprimez l'équation de la parabole.
3. Calculez la valeur de l'angle α entre les deux tangentes a la parabole passant par le point A de coordonnees $(-5,\ 0)$.

Nous reprenons la solution proposée par l'université : https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

1. Déterminez par les méthodes de la géométrie synthétique pour quelles valeurs de y_B la droite δ ne n'intersecte qu'une seule des deux circonférences.

➘ La valeur minimale de y_B correspond à δ tangente à c_1



Les triangles AOB et ATC sont rectangles (en O et T) et sont semblables car partagent le sommet A.

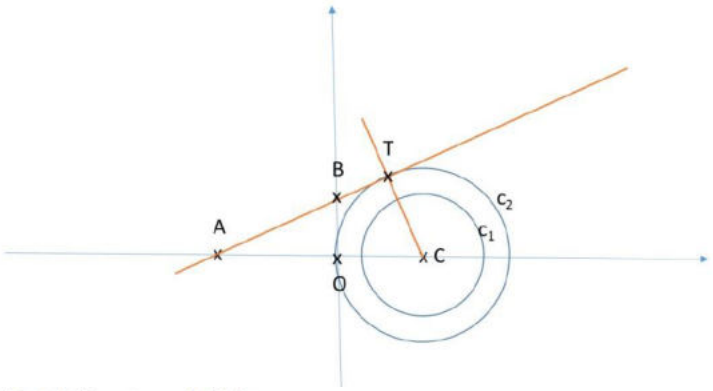
$\frac{OB}{TC} = \frac{AO}{AT}$ donc : $y_B = \frac{2R_1^2}{AT}$

Dans le triangle rectangle ATC :

$$AC^2 = AT^2 + TC^2 \qquad \text{donc :} \qquad AT^2 = (2R_1 + R_2)^2 - R_1^2 = 3R_{1^2} + R_{2^2} + 4R_1R_2$$

En remplaçant : $$y_B(\min) = \frac{2R_1^2}{\sqrt{3R_{1^2}+R_{2^2}+4R_1R_2}}$$

➘ La valeur maximale de y_B correspond à δ tangente à c_2



Les triangles AOB et ATC sont semblables

$$\frac{OB}{TC} = \frac{AO}{AT} \qquad \text{donc :} \qquad y_B = \frac{2R_1R_2}{AT}$$

Dans le triangle rectangle ATC :

$$AC^2 = AT^2 + TC^2 \qquad \text{donc :} \qquad AT^2 = (2R_1 + R_2)^2 - R_2^2 = 4R_1^2 + 4R_1R_2$$

En remplaçant : $$y_B(max) = \frac{2R_1R_2}{\sqrt{4R_1^2+4R_1R_2}} = \frac{R_1R_2}{\sqrt{R_1^2+R_1R_2}}$$

Soit, finalement, la condition suivante : $$\frac{2R_1^2}{\sqrt{3R_{1^2}+R_{2^2}+4R_1R_2}} < y_B \leq \frac{R_1R_2}{\sqrt{R_1^2+R_1R_2}}$$

2. Exprimez l'équation de la parabole:

$$(x - x_s)^2 - 4p(y - y_s) = 0$$

Sommet S (0, -2) :

$$x^2 - 4p(y + 2) = 0$$

Foyer F (0, -1) = (x_s ; y_s+p) donc p = 1.

En remplaçant :

$$x^2 - 4(y + 2) = 0$$

$$y = \frac{x^2}{4} - 2$$

3. Calculez la valeur de l'angle α entre les deux tangentes à la parabole passant par le point A de coordonnées (-5, 0).

Equation générale des droites passant par A (0, -5)

$$y = a(x + 5)$$

Intersection avec la parabole :

$a(x + 5) = \frac{x^2}{4} - 2$ donc : $x^2 - 4ax - 8 - 20a = 0$

Pour qu'il n'y ait qu'une solution :

$$\Delta = 16a^2 - 4(-8 - 20a) = 0$$

$$a^2 + 5a + 2 = 0$$

$$\Delta' = 25 - 8 = 17$$

$a_1 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$ et $a_2 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$

Angle :

$$\alpha = \text{atan}(a_1) - \text{atan}(a_2) = 53.96° \ (126.04°)$$

---

1 mars 2020

EXGAP209 – Polytech, UMons, Mons, Juillet 2015.

1. Soit dans le plan Oxy une circonférence C_1 de rayon r centrée en B de coordonnées (10, 0). Soit d_1 et d_2 deux tangentes à C_1 ayant respectivement pour vecteurs directeurs (2, 0) e t(3, 4) . Si d_1 est en dessous du cercle et d_2 à sa gauche; établir l'équation cartésienne de la bissectrice de d_1 et d_2 de pente positive.
2. Si $r = 8$ et si on appelle A le point d'intersection des droites d_1 et d_2 tel que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. On demande:
   - Faire un dessin.
   - Etablir les équations cartésiennes de C_1, d_1 et d_2.
   - Soit C_2 une circonférence de centre $(0,-5)$ et tangente à la droite d_3 d'équation $y = -2$. Démontrer que d_2 est l'image de C_1 par une homothétie de centre A? Que vaut le rapport d'homothétie?
   - Si M et N sont deux point sappartenant à C_1, construire un segment $[AN]$ tel que le point M en soit le milieu. Quelles sont les coordonnées de M ? Existe-t-il plusieurs segments $[AN]$ répondant à cette condition?

Nous reprenons la solution proposée par l'université :
https://web.umons.ac.be/app/uploads/sites/6/2020/02/g%C3%A9om%C3%A9trie-2014-2017_siteweb-2020.pdf

1. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs unitaires des droites, alors $\vec{u} \pm \vec{v}$ sont les vecteurs directeurs des bissectrices. Il faut donc dans un premier temps chercher ces vecteurs directeurs unitaires.
   - Pour d_1 il s'agit de (1,0)
   - Pour d_2 il s'agit de $(\frac{6}{10}, \frac{8}{10})$ (voir dessin).

   Les vecteurs directeurs des bissectrices de d_1 et d_2 sont donc $(\frac{16}{10}, \frac{8}{10})$ et $(\frac{2}{5}, \frac{-8}{10})$.

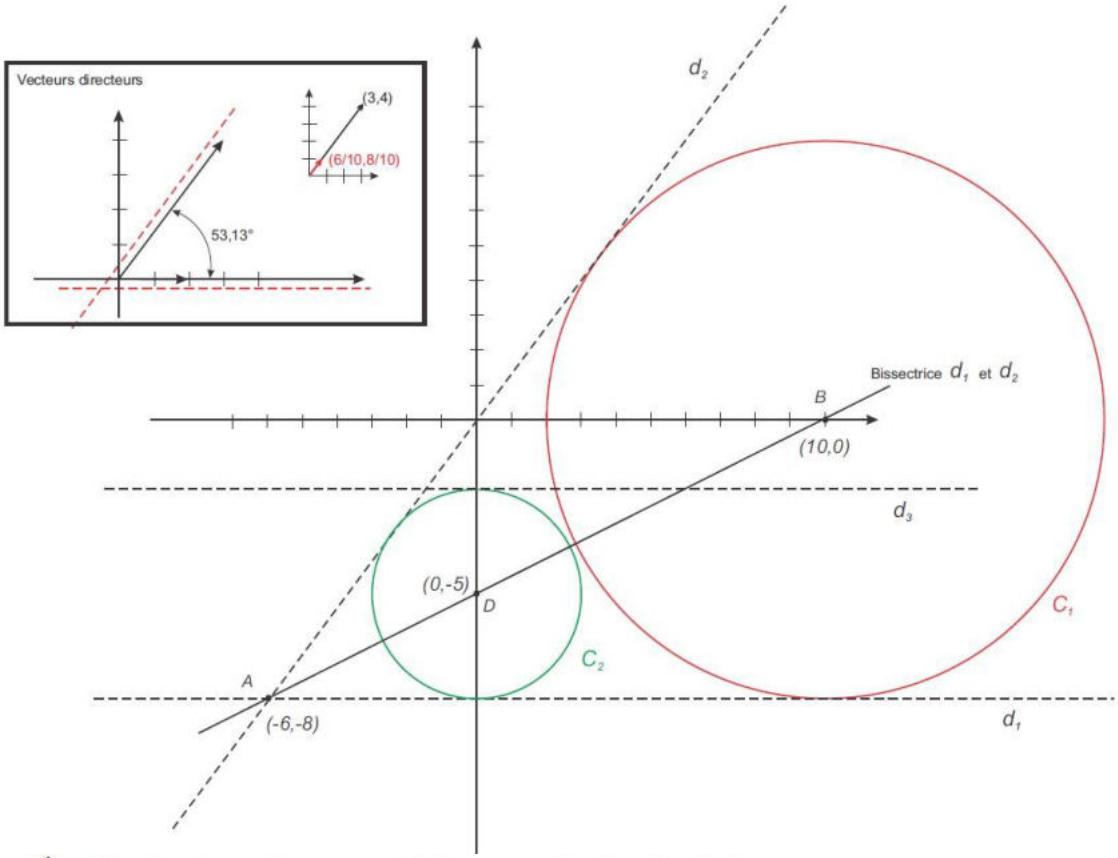
   Nous retiendrons comme vecteur directeur de la bissectrice de pente positive $(\frac{16}{10}, \frac{8}{10})$. Celle-ci passe également par le point B de coordonnées $(10, 0)$ (centre de C_1). Son équation paramétrique est donc de la forme :

$$\begin{cases} x = 10 + \frac{16}{10} \cdot \lambda \\ y = \frac{8}{10} \cdot \lambda \end{cases}$$

   Son équation cartésienne est :

$$y = \frac{x}{2} - 5 \qquad (1)$$

2. Si $r = 8$ et si on appelle A le point d'intersection des droites d_1 et d_2 tel que $x_A < x_B$ et $y_A < y_B$. On demande :
   - ***Faire un dessin.***



– ***Établir les équations cartésiennes de*** C_1, d_1 ***et*** d_2.

C_1 est un cercle centré en $(10, 0)$ et de rayon 8. Son équation est :

$$(x-10)^2+y^2 \;=\; 64 \qquad (2)$$

d_1 est une horizontale tangente à C_1. Son équation cartésienne est $y = -8$.

Les coordonnées de A sont obtenues par résolution du système :

$$\left\{\begin{array}{l} y=\frac{x}{2}-5 \\ y=\quad -8 \end{array}\right.$$

Soit les coordonnées de A : $(-6, -8)$. L'équation paramétrique de d_2, de vecteur directeur $(3, 4)$ et passant par $(-6, -8)$ est :

$$\left\{\begin{array}{l} x=-6+3\cdot\lambda \\ y=-8+4\cdot\lambda \end{array}\right.$$

L'équation cartésienne de d_2 est donc :

$$y \;=\; \frac{4}{3}\cdot x \qquad (3)$$

– ***Soit C_2 une circonférence de centre $(0,-5)$ et tangente à la droite d_3 d'équation $y=-2$. Démontrer que C_2 est l'image de C_1 par une homothétie de centre A ? Que vaut le rapport d'homothétie ?***

On peut facilement vérifier que le point de coordonnées $(0,-5)$ appartient à la droite AB. Le centre de C_2 est donc sur la bissectrice de d_1 et d_2.

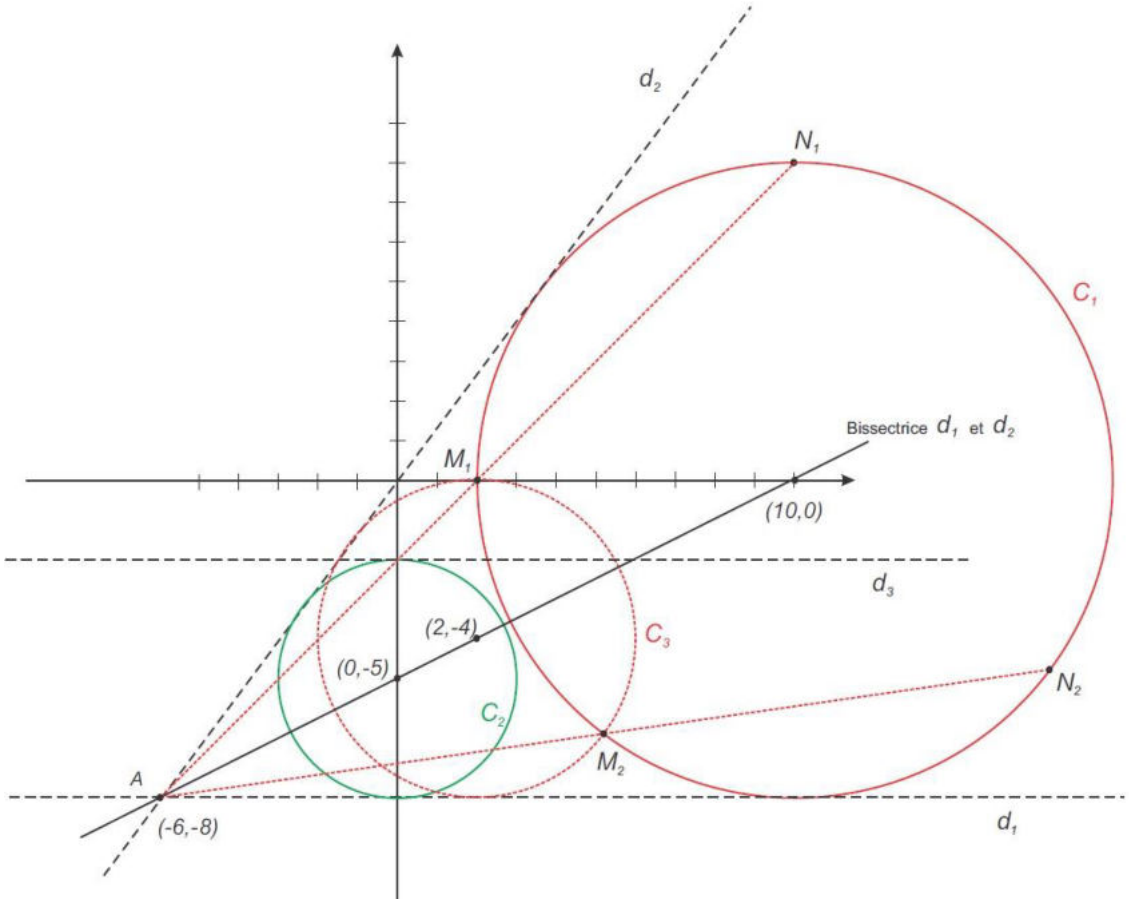
Le rayon de C_2 vaut 3 (tangence avec d_3). La distance entre le centre de C_2 et d_1 vaut également 3. $_2$ est dés lors également tangent à d_1.

$\Rightarrow$ C_2 et C_1 admettent les même tangentes d_1 et d_2. C_2 est donc l'image de C_1 par une homothétie de centre A dont le rapport vaut le rapport des rayons C_2/C_1 soit $3/8=0,375$

– ***Si M et N sont deux points appartenant à C_1, construire un segment $[AN]$ tel que le point M en soit le milieu. Quelles sont les coordonnées de M. Existe-t-il plusieurs segment $[AN]$ répondant à cette condition ?***

Les points A, M et N sont alignés. Le premier lieu des points M et N est le cercle C_1 (puisqu'ils lui appartiennent). Puisque M est milieu du segment $[AN]$, alors M est l'image de N par une homothétie de centre A et de rapport $1/2$. Le point M recherché est donc à l'intersection du cercle C_1 et du cercle C_3, image de C_1 par une homothétie de de centre A et de rapport $1/2$. C_3 est centré en $(2,-4)$ (milieu du segment AB) et son rayon vaut 4. Son équation est :

$$(x-2)^2+(y+4)^2 = 16 \qquad (4)$$



On constate dès lors qu'il y a deux solutions c-à-d deux paires de points M et N qui satisfont l'énoncé. Leurs coordonnées sont obtenues par résolution du système suivant :

$$\begin{cases} (x-2)^2+(y+4)^2=16 \\ (x-10)^2+y^2 \quad =64 \end{cases}$$

La soustraction de ces deux équations donne $y = 4 - 2x$ qui peut ensuite être injecté dans la seconde équation. En découle une équation du second degré en x :

$$5x^2 - 36x + 52 = 0 \tag{5}$$

dont le réalisant vaut 256 et les deux racines sont $x = 5,2$ et $x = 0$. On trouve alors les coordonnées en y grâce à l'équation de C_1. Au final les coordonnées de deux points M répondant à l'énoncé sont $(2, 0)$ et $(5.2, -6.4)$