

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie synthétique dans l'espace**

**GSE 0**

**EXGSE000 – EXGSE009**

<http://www.matheux.be.tf>

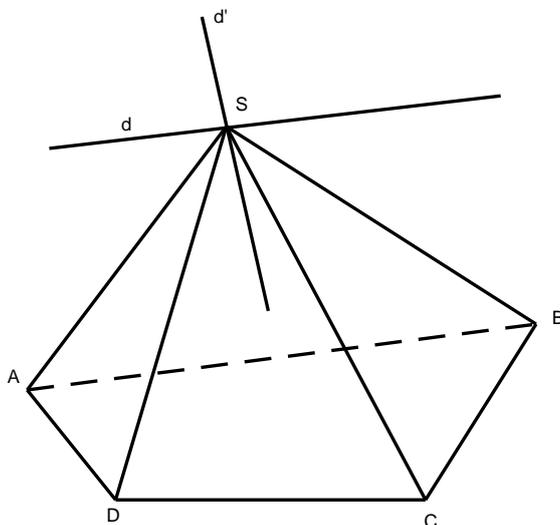
Jacques Collot

1 juillet 03

## EXGSE001 – FACSA, ULG, Liège, juillet 2000.

On considère une pyramide de sommet  $S$  et dont la base est un quadrilatère convexe plan  $ABCD$ .

Montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme si et seulement si le plan  $ABCD$  est parallèle aux droites d'intersections des plans  $SAB$  et  $SCD$  d'une part,  $SBC$  et  $SAD$  d'autre part.



---

Soit  $d \equiv SAB \cap SDC$  et  $d' \equiv SAD \cap SBC$

a) Soit  $(dd') // ABCD$

$$\text{Comme } \begin{cases} d \subset SAB \\ d \subset SDC \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d // AB \\ d // DC \end{cases} \rightarrow AB // DC$$

$$\text{De même : Comme } \begin{cases} d' \subset SBC \\ d' \subset SAD \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d' // BC \\ d' // AD \end{cases} \rightarrow BC // AD$$

Et donc  $ABCD$  est un parallélogramme.

b) Soit  $ABCD$  un parallélogramme.

$$\text{Comme } AB // DC \rightarrow \begin{cases} d // AB \\ d // DC \end{cases} \rightarrow d // \text{au plan } ABCD$$

$$\text{De même : Comme } AD // BC \rightarrow \begin{cases} d' // AD \\ d' // BC \end{cases} \rightarrow d' // \text{au plan } ABCD$$

Et donc  $(dd')$  est // au plan  $ABCD$

---

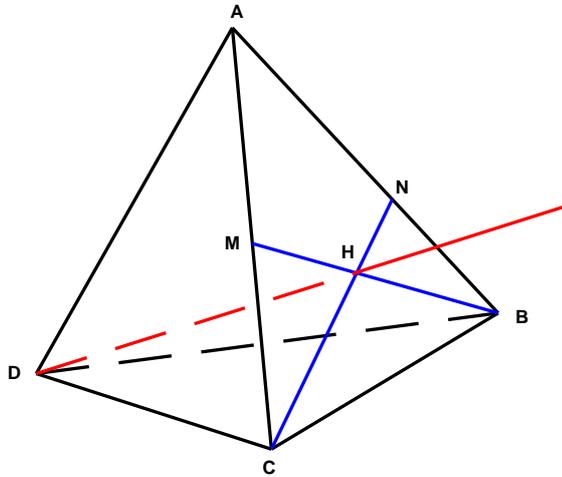
Modifié le 03 février 06 (Francis Drapier)

## EXGSE002 – FACSA, Liège, septembre 2000.

Un tétraèdre  $ABCD$  est tel que  $AB$  est orthogonal à  $CD$  et  $AC$  à  $BD$ .

Montrer que, si  $H$  appartient au plan déterminé par  $A$ ,  $B$ , et  $C$  alors  $H$  est l'orthocentre du triangle si et seulement si  $DH$  est perpendiculaire au plan  $ABC$ .

---



La condition est nécessaire

Supposons que  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

→  $CH$  est une hauteur de  $ABC$  →  $AB \perp NC$   
or par hypothèse  $AB \perp DC$  donc  $AB \perp \text{plan } DNC$  et par conséquent  $DH \perp AB$

→  $BH$  est une hauteur de  $ABC$  →  $AC \perp MC$   
or par hypothèse  $AC \perp DB$  donc  $AC \perp \text{plan } DMC$  et par conséquent  $DH \perp AC$

Dés lors  $DH \perp \text{plan } ABC$

La condition est suffisante

Supposons que  $DH \perp \text{triangle } ABC$ .

→ or  $DC \perp AB$  → le plan  $DHC \perp \text{plan } ABC$   
→  $CH \perp AB$   $CH$  est donc une hauteur du triangle  $ABC$

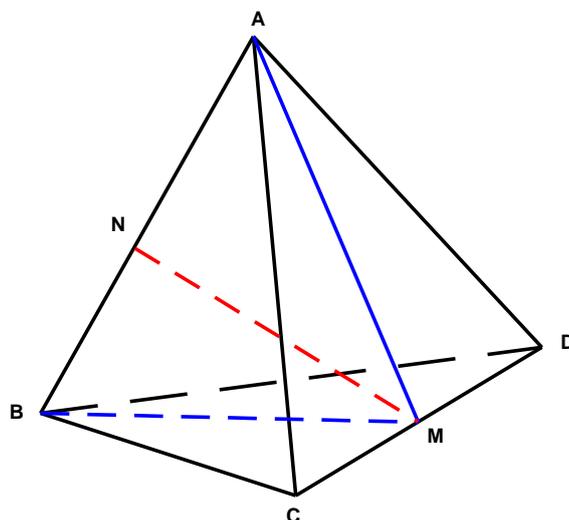
→ or  $AC \perp DB$  → le plan  $BDH \perp \text{plan } ABC$   
→  $BH \perp AC$   $BH$  est donc une hauteur du triangle  $ABC$

Dés lors  $H$  est l'orthocentre du triangle  $ABC$ .

## EXGSE003 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1996.

Soit  $ABCD$  un tétraèdre tel que  $AB$  est perpendiculaire à  $CD$  et que  $|AC| = |AD|$ .

Démontrer que  $|BC| = |BD|$  et que la perpendiculaire à  $AB$  et  $CD$  est la perpendiculaire à  $AB$  passant par le milieu de  $CD$ .



$\Delta ADC$  est isocèle, donc  $AM$  est une médiatrice  $\rightarrow AM \perp CD$

Le plan  $AMB$  est donc  $\perp$  à  $CD$ , ce qui implique  $BM \perp CD$ .

$\rightarrow BM$  médiatrice de  $CD$  dans le  $\Delta CBD \rightarrow |BC| = |BD|$

Dans le  $\Delta AMB$  abaissons la perpendiculaire  $NM$  à  $AB$  issue de  $M$ .

Comme  $NM \in$  au plan  $AMB$  qui est  $\perp$  à  $CD$ ,  $\rightarrow NM \perp CD$

$NM$  est donc la perpendiculaire commune à  $AB$  et  $CD$  et elle passe par le milieu de  $CD$ .

## EXGSE004 – FACSA, ULG, Liège, juillet 1999 et juillet 2010

### Enoncé de juillet 1999.

Soit  $ABCD$  un tétraèdre tel que  $SA, SB$  et  $SC$  sont perpendiculaires deux à deux.

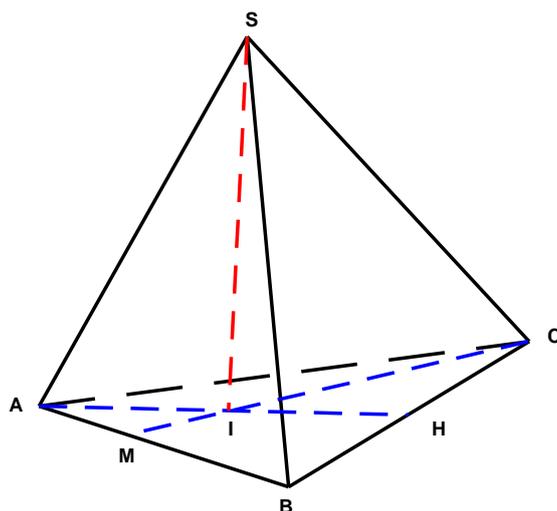
On désigne par  $H$  le pied de la hauteur issue de  $S$  dans le triangle  $SBC$  et par  $I$  le pied de la hauteur issue de  $S$  dans le triangle  $ASH$ .

Démontrer que  $SI$  est perpendiculaire au plan  $ABC$  et que  $I$  est le point d'intersection des hauteurs du triangle  $ABC$ .

### Enoncé de juillet 2010

Un plan  $\pi$  coupe les arêtes  $[AB], [AC]$  et  $[AD]$  d'un cube en trois points notés respectivement  $B', C'$  et  $D'$ . Dans le triangle  $AB'C'$ , on note  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$ .

- Démontrer, en justifiant soigneusement toutes les étapes de votre raisonnement, que la droite  $B'C'$  est perpendiculaire au plan  $AD'H$ .
- En déduire que le plan  $AD'H$  est perpendiculaire au plan  $\pi$ .
- En déduire que la projection orthogonale de  $A$  sur le plan  $\pi$  coïncide avec l'orthocentre du triangle  $B'C'D'$ .



$$\begin{cases} AS \perp SB \\ AS \perp SC \end{cases} \rightarrow \text{plan } ASH \perp \text{plan } SBC \rightarrow BC \perp \text{ au plan } ASH \text{ et donc } \perp SI$$

Or par hypothèse  $SI \perp AH \rightarrow SI \perp$  au plan  $ABC$

(car  $SI$  est  $\perp$  à deux droites qui appartiennent au plan  $ABC$ )

Soit  $IC$  qui coupe  $AB$  en  $M$ .

$$\begin{cases} SC \perp SA \\ SC \perp SB \end{cases} \rightarrow \text{Le plan } SCM \text{ est } \perp \text{ au plan } SAB$$

$\rightarrow CM \perp AB$  et donc  $CM$  est une hauteur de  $ABC$ .

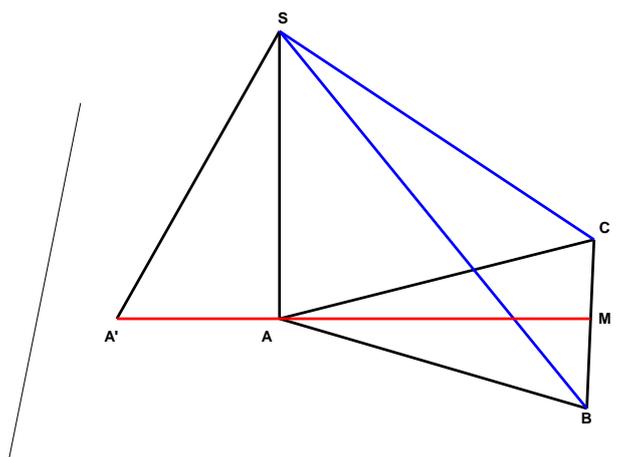
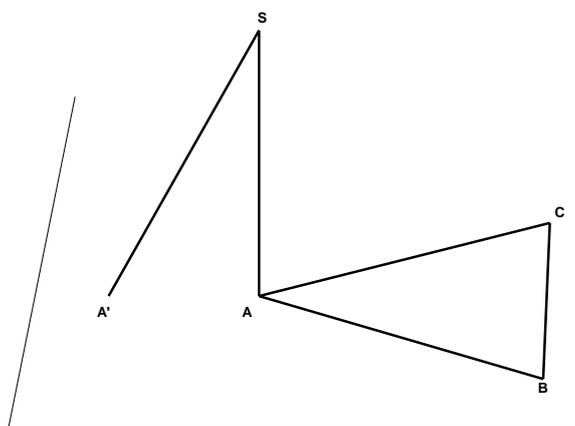
$I$  est donc l'orthocentre de  $ABC$ .

---

## EXGSE005 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1999.

Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$ . On fixe  $S$  distinct de  $A$  sur la perpendiculaire au plan  $ABC$  issue de  $A$  et on note  $A'$  le point de percée dans le plan  $ABC$  de la perpendiculaire à  $SBC$  issue de  $S$ .

Démontrer que  $|SB| = |SC|$  et que  $AA'$  est la médiatrice du segment  $BC$ .



$\Delta SAB = \Delta SAC$  car ce sont deux triangles rectangles ayant 2 côtés égaux.

$\rightarrow SC = SB$

$A$  est sur la médiatrice de  $BC$  puisque  $\Delta ABC$  est isocèle.

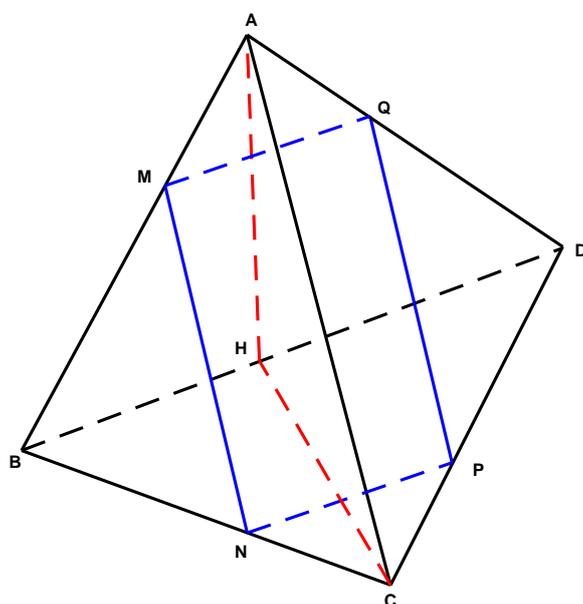
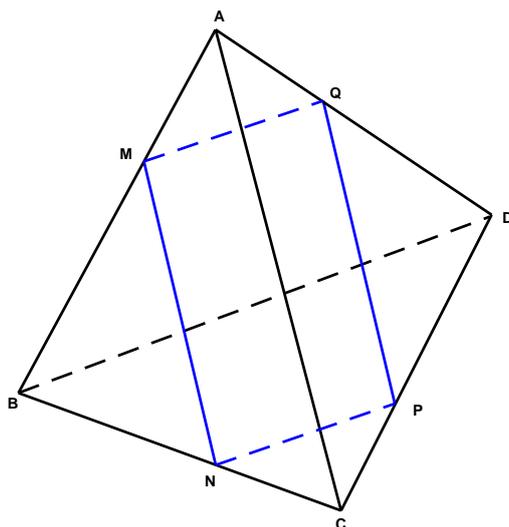
Or  $\Delta SA'B = \Delta SA'C$  (Triangles rectangles ayant deux côtés égaux).

$\rightarrow A'C = A'B \rightarrow A'$  est sur la médiatrice de  $CB$

Donc  $AA'$  est la médiatrice.

## EXGSE006 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1998.

Soit  $ABCD$  un tétraèdre régulier (c'est-à-dire dont les arêtes ont la même longueur).  
Démontrer que si un plan  $p$  le sectionne suivant un losange, alors  $p$  est parallèle à deux des arêtes et coupe les deux autres en leur milieu  
(Le losange est alors un carré, mais on ne demande pas de la démontrer).



Si  $MQPN$  est un losange, c'est aussi un parallélogramme.

$$\begin{cases} MQ \in \text{plan } ABD \text{ et est } // \text{ plan } BCD \\ BP \in \text{plan } BCD \text{ et est } // \text{ plan } ABD \end{cases} \rightarrow MQ // NP // BD$$

Même chose pour démontrer que  $MN // QP // AC$

Les quatre faces sont des triangles équilatéraux égaux.

$$\text{Dans le } \Delta ABC : \frac{BM}{BA} = \frac{BN}{BC} = \frac{MN}{AC}$$

$$\text{Dans le } \Delta BCD : \frac{CN}{BC} = \frac{CP}{CD} = \frac{NP}{BD}$$

$$\text{or } \frac{MN}{AC} = \frac{NP}{BD} \rightarrow BM = BN = CN = PC$$

$N$  est donc le milieu de  $BC$ .

Même raisonnement pour  $M$ ,  $Q$  et  $P$ .

Bien que cela ne soit pas demandé, démontrons que le losange est un carré.

Soit  $H$  le pied de la médiatrice abaissée de  $A$ .

$H$  est aussi le pied de la médiatrice abaissée de  $C$ .

$$BD \perp \text{plan } AHC \rightarrow BD \perp AC$$

$$\text{et comme } MQ // BD \rightarrow MQ \perp AC$$

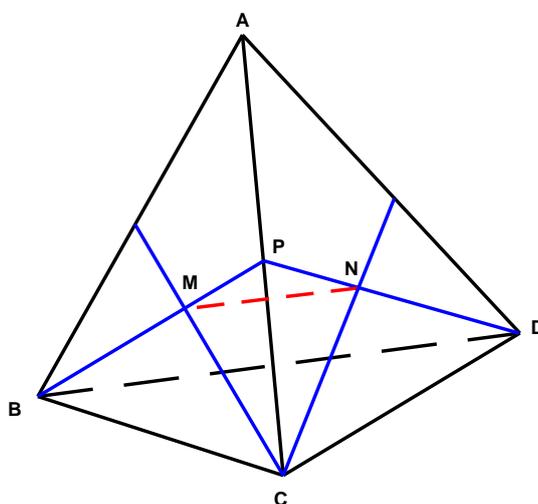
$$\text{or } MN // AC \rightarrow MN \perp MQ$$

Donc  $MNPQ$  est un carré

## EXGSE007 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1999.

Démontrer que dans un tétraèdre le segment qui joint les centres de gravité (points de concours des médianes) de deux faces est parallèle à une arête et en vaut le tiers.

---



Dans le  $\triangle BPD$  :

$$BM = \frac{2}{3}BP$$

$$ND = \frac{2}{3}PD$$

Par conséquent  $MN$  est parallèle à  $BD$

Les  $\triangle PMN$  et  $PBD$  sont semblables et comme

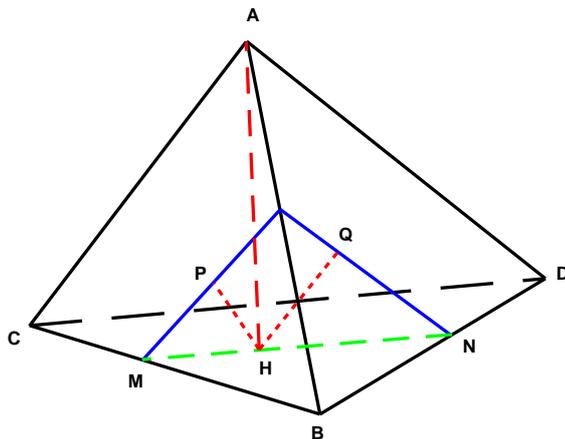
$$MP = \frac{1}{3}PB \quad \text{on a} \quad MN = \frac{1}{3}BD$$

## EXGSE008 – FACSA, ULG, Liège, septembre 1996.

Soit  $ABCD$  un tétraèdre tel que  $AB$  soit orthogonal à  $CD$ . On désigne par  $H$  la projection orthogonale de  $A$  sur le plan  $BCD$  et on suppose que  $H$  n'appartient pas aux droites  $BC$  et  $BD$ .

On désigne par  $P$  et  $Q$  les projections orthogonales de  $H$  sur les plans  $ABC$  et  $ABD$ .  
Démontrer que

- Le plan  $PHQ$  est perpendiculaire à  $AB$ .
- Le plan  $PHQ$  coupe le plan  $BCD$  suivant une parallèle à  $CD$ .



$$HQ \perp \text{plan } ABD \rightarrow HQ \perp AB$$

$$HP \perp \text{plan } ABC \rightarrow HP \perp AB$$

$$\rightarrow \text{Plan } PHQ \perp AB$$

$$\begin{cases} AH \perp \text{plan } BCD \\ AB \perp CD \end{cases} \rightarrow \text{plan } AHB \perp CD$$

Or  $MN \in \text{plan } PHQ$  qui est  $\perp$  à  $AB \rightarrow MN \perp AB$

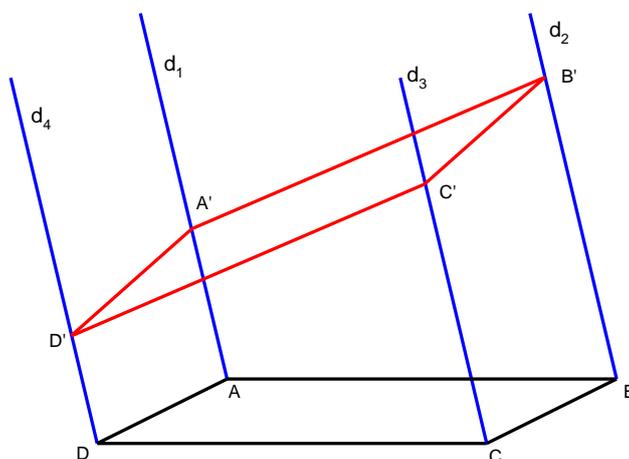
et comme  $MN$  est aussi  $\perp$  à  $AH$ ,  $MN$  est  $\wedge$  plan  $AHB$

Par conséquent,  $MN \parallel CD$ .

## EXGSE009 – FACSA, ULG, Liège, septembre 2000.

Soit un parallélogramme  $ABCD$  et  $d_1, d_2, d_3, d_4$ , quatre droites passant par  $A, B, C$  et  $D$ , parallèles entre elles et non contenues dans le plan  $ABCD$ .

Démontrer que tout plan  $P$  qui coupe  $d_1$  coupe les quatre droites selon un parallélogramme.



C'est immédiat puisque deux plans parallèles sont coupés par un autre suivant des droites parallèles

$$\text{plan } A'ADD' // \text{plan } B'BCC' \rightarrow A'D' // B'C'$$

$$\text{plan } A'B'BA // \text{plan } C'CDD' \rightarrow A'B' // D'C'$$

$\rightarrow A'B'C'D'$  est un parallélogramme.