Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 11

EXGSE110 – EXGSE119

http://www.matheux.c.la

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

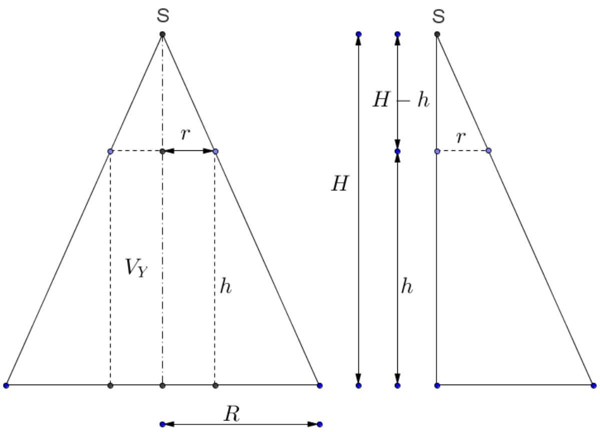
Juin 2012

EXGSE110 - EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 1.

Un morceau de bois à la forme d'un cône de révolution de hauteur H et de base circulaire de rayon R. A partir de la base, on creuse un trou cylindrique coaxial, de hauteur h et de rayon r, qui reste contenu à l'intérieur du cône. Soit V le volume du cône et V_Y celui du cylindre. On souhaite maximiser le rapport $C = \dfrac{V_Y}{V}$.

1. Exprimer C en fonction du rapport $\dfrac{h}{H}$.
2. Calculer la valeur maximale de C, et les valeurs correspondantes des rapports $\dfrac{h}{H}$ et $\dfrac{r}{R}$.
3. Illustrer la solution avec un dessin clair et précis.

Solution proposée par Nicole Berckmans



Remarque préalable : Pour h (ou r) donné le volume maximal du cylindre est obtenu lorsque le cylindre est tangent au cône.

$$C = \frac{V_Y}{V} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = 3\left(\frac{r}{R}\right)^2\left(\frac{h}{H}\right) = 3\left(1-\frac{h}{H}\right)^2\left(\frac{h}{H}\right) = 3(1-x)^2\,x$$

si $x = \dfrac{h}{H}$ où $0 < x < 1$

$$\frac{dC}{dx} = 3(x-1)(3x-1) \Rightarrow$$

x	0		$\frac{1}{3}$		1
$\frac{dC}{dx}$		$+$	0	$-$	
C		$\nearrow$	Max	$\searrow$	

Si $x = \dfrac{1}{3}$ alors $\boxed{\dfrac{h}{H} = \dfrac{1}{3} \text{ et } C = \dfrac{4}{9} \text{ et } \dfrac{r}{R} = \dfrac{2}{3}}$

15 août 2010

EXGSE111 - EPL, UCL, LLN, Juillet 2012 série 2.

Deux modèles (1) et (2) sont utilisés pour représenter une fibre de verre.

(1) : un cylindre de hauteur h et de base circulaire de rayon r; sur chacune des bases est collée une calotte sphèrique (une demi-boule) de rayon r.

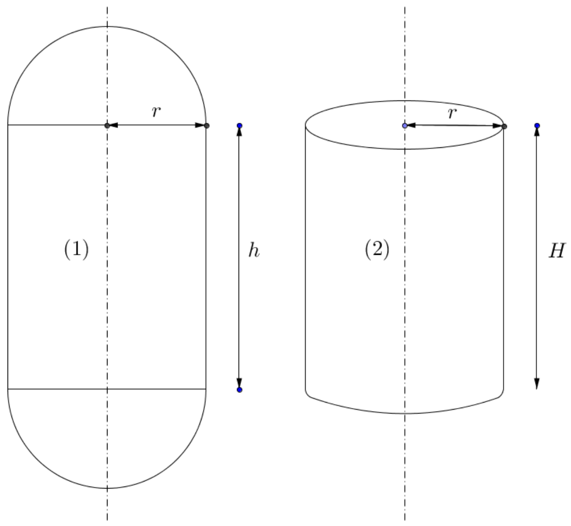
(2): un cylindre de hauteur H et de base circulaire de rayon r.

Pour (1) et (2), on désigne le volume de la fibre par V_1 et V_2, et l'aire totale par A_1 et A_2.

(N.B. la surface comprend deux calottes qphériques pour (1), et les deux bases circulaires pour (2)). On souhaite utiliser (2) au lieu de (1), à condition que V_2 et A_2 soient proches de V_1 et A_1.

1. Faire un dessin clair et propre des modèles (1) et (2).
2. On impose que $V_2 = V_1$. Exprimer H en fonction de h et r uniquement. Exprimer la différence relative $(A_2 - A_1)/A_1$ en fonction du rapport h/r uniquement.
3. On impose que $A_2 = A_1$. Exprimer H en fonction de h et r uniquement. Exprimer la différence relative $(V_2 - V_1)/V_1$ en fonction du rapport h/r uniquement.
4. Des valeurs de H calculées aux points 2 et 3, laquelle est la meilleure?
   Justifier la réponse. Sachant qu'en pratique, h/r est compris entre 10 et 100, comment varie l'erreur avec laquelle le modèle (2) approxime le modèle (1)? Pour quelles valeurs de h/r l'erreur est inférieure ou égale à 1%?

Solution proposée par Nicole Berckmans



$V_1 = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3$ $\qquad$ $V_2 = \pi r^2 H$

$A_1 = 2\pi r h + 4\pi r^2$ $\qquad$ $A_2 = 2\pi r H + 2\pi r^2$

2) $V_2 = V_1$ implique que $H = h + \frac{4}{3}r$ et dans ce cas $\frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{1}{3\left(\frac{h}{r}+2\right)}$

Si $x = \frac{h}{r}$ alors l'erreur relative est : $f(x) = \frac{1}{3(x+2)}$.

3) Si $A_2 = A_1$ alors $H = h + r$ et dans ce cas $\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{-1}{3\frac{h}{r}+4}$.

Si $x = \frac{h}{r}$ alors l'erreur relative est : $g(x) = \frac{1}{3x+4}$

4) Posons : $x = \frac{h}{r}$

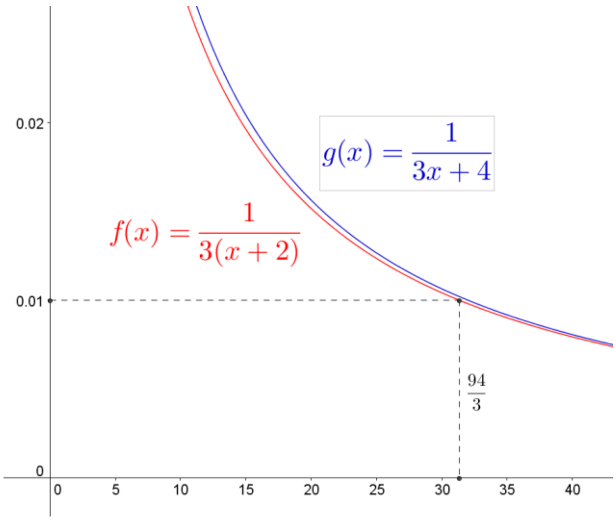
Si $H = h + \frac{4}{3}r$ alors $\frac{A_2 - A_1}{A_1} = \frac{1}{3(x+2)}$ (α)

Si $H = h + r$ alors $\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{1}{3x+4}$ (β)

Je choisirais la solution (α) car $\forall x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{3(x+2)} < \frac{1}{3x+4} = g(x)$$

Si $\frac{1}{3(x+2)} \leq \frac{1}{100}$ alors $\boxed{\frac{94}{3} \leq x = \frac{h}{r}}$



EXGSE112 - – EPL, UCL, LLN, Septembre 2012.

A l'intérieure d'une boule sphérique de centre O et de rayon $R,$ on définit deux domaines volumiques. Le premier est celui d'une calotte sphérique de hauteur $H < R$ et de base circulaire de rayon $r < R$. Le second domaine est celui d'un cône de sommet O et de hauteur $(R-H),$ dont la base circulaire de rayon r est commune à celle de la calotte. Le volume de la calotte est donné par la formule (que l'on ne demande pas de démontrer) :

$$V_S = \frac{\pi}{3} H^2 (3R - H)$$

1. Illustrer l'énoncé par un dessin clair et propre.
2. Exprimer r en fonction de H et R uniquement.
3. Exprimer le volume du cône en fonction de H et R uniquement.
4. Calculer le rapport H / R de façon que les volumes de la calotte et du cône soient égaux.

Solution proposée par Nicole Berckmans et Louis François

2. $1^{\text{ère}}$ méthode : dans le triangle OBA rectangle : $r = \sqrt{R^2 - (R-H)^2} = \sqrt{H(2R-H)}$

   $2^{\text{ème}}$ méthode : dans le triangle CDF rectangle : $r^2 = H(2R-H)$

3. $V_{\text{cône}} = \frac{1}{3}\pi r^2 (R-H) = \frac{\pi}{3} H(2R-H)(R-H)$

4. $V_{\text{cal}} = \frac{\pi}{3} H^2 (3R-H)$

$$V_{\text{cône}} = V_{\text{cal}} \quad \Leftrightarrow H(2R-H)(R-H) = H^2(3R-H)$$

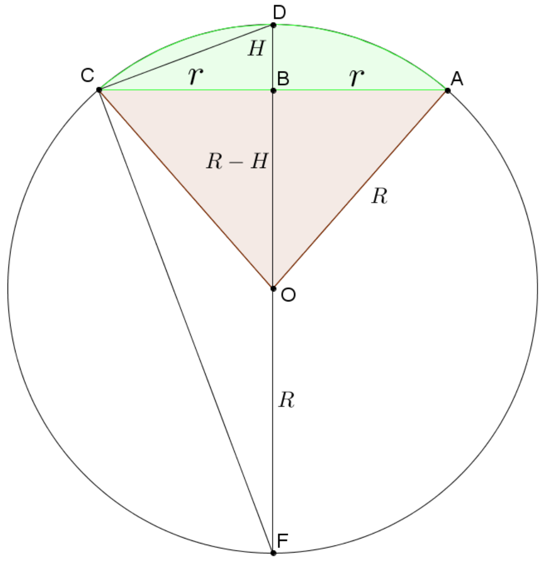
$$\Leftrightarrow H^2\left(\frac{2R}{H} - \right)\left(\frac{R}{H} - 1\right) = H^2\left(3\frac{R}{H} - 1\right)$$

Posons $x = \frac{R}{H} \Rightarrow (2x-1)(x-1) = 3x - 1$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{R}{H} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}}$$

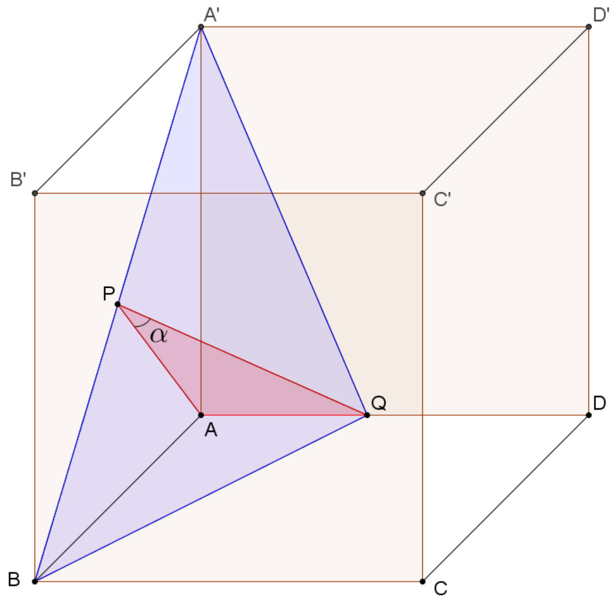
Rem : $\frac{R}{H} \neq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$ car $H < R$



26 novembre 2012

EXGSE113 - FACS, ULB, Bruxelles, juillet 2012.

Un plan passe par une diagonale d'un face d'un cube. Déterminez la tangente du plus petit angle qu'il fait avec cette face dans l'hypothèse où il partage le cube en deux volumes dont le rapport vaut 9.



Soit un cube d'arête c. Soit $A'BQ$ le plan passant par la diagonale $A'B$, qui coupe AD en Q et posons $\overline{AD} = y$

Volume du tétraèdre $A'BQ$: $V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{c^2}{2} \cdot y = \frac{c^2 y}{6}$

Volume du solide $BQDCB'A'D'C'$: $V_2 = V_{cube} - V_1 = c^3 - \frac{c^2 y}{6} = \frac{c^2}{6}(6c - y)$

Or $\frac{V_2}{V_1} = 9 \Rightarrow \frac{\frac{c^2}{6}(6c - y)}{\frac{c^2 y}{6}} = 9 \Rightarrow 6c - y = 9y \Rightarrow y = \frac{3}{5}c$

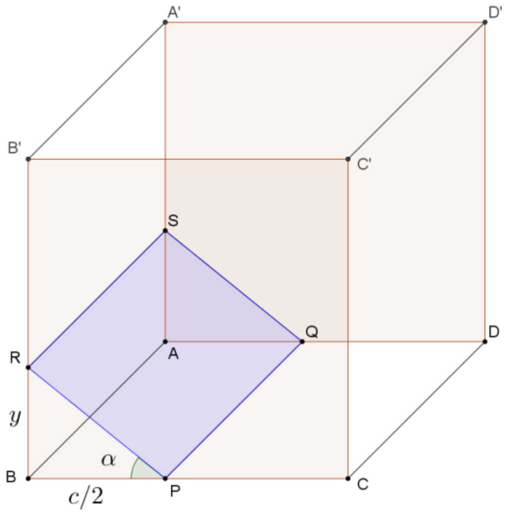
Soit P le milieu de $A'B$. Le plan PAQ est perpendiculaire à $A'B$ puisque $PA \perp A'B$ (diagonales d'un carré) et que $AQ \perp$ face $ABB'A'$. L'angle $\widehat{PAQ} = \alpha$ est l'angle cherché

Comme le triangle APQ est rectangle en A : $\tan \alpha = \frac{\overline{AQ}}{\overline{PA}} = \frac{\frac{3}{5}c}{\frac{\sqrt{2}}{2}c} = \boxed{\frac{3\sqrt{2}}{5}}$

2 octobre 2013

EXGSE114 - FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2012

Un plan passe par une médiane d'une face d'un cube. Déterminez la tangente du plus petit angle qu'il fait avec cette face dans l'hypothèse où il partage le cube en deux volumes dont le rapport vaut 9.



Soit le plan $PRSQ$ qui détermine le prisme $BRPASQ$. On a $\overline{BP}=c/2$ et posons $\overline{BR}=y$

Volume du prisme : $V_P=\frac{1}{2}.\frac{c}{2}.y.c=\frac{c^2y}{4}$

Volume du cube : $V_C=c^3$

Volume du solide $RSQPCDD'A'B'C'$: $V_S=V_C-V_P=c^3-\frac{c^2y}{4}=\frac{c^2}{4}(4c-y)$

On demande : $\frac{V_S}{V_P}=9=\frac{\frac{c^2}{4}(4c-y)}{\frac{c^2y}{4}}\Rightarrow 4c-y=9y\Rightarrow y=\frac{2}{5}c$

L'angle $\widehat{RPB}=\alpha$ est le plus petit angle car PQ est perpendiculaire à la face $BCC'B'$

$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{y}{c/2}=\frac{2c/5}{c/2}=\boxed{\frac{4}{5}}$

---

2 octobre 2013

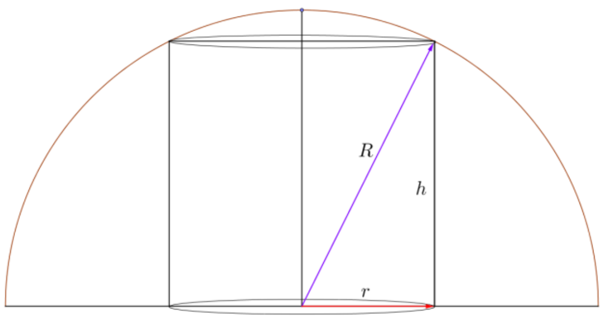
EXGSE115 - EPL, UCL, Louvain, juillet 2013, série 1

Un dôme à la forme d'une demi-boule sphérique de rayon R et de base plane horizontale. On considère un cylindre h et de rayon r, qui est inscrit dans le dôme. L'axe du cylindre vertical passe par le pôle du dôme. Soit V le volume et V_Y celui du cylindre.

On a $C = V_Y / V$ et $x = r/R$.

1. Exprimer C en fonction de x uniquement.
2. Calculer la valeur maximale de C, et les valeurs correspondantes de x et du rapport h/R.
3. Illustrer la solution avec un dessin clair et précis.

Solution proposée par Nicole Berckmans



$V_Y = \pi r^2 h; \qquad V = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi R^3; \qquad$ Lien entre $r, R, h : R^2 = r^2 + h^2$

1) $C = \frac{V_Y}{V} = \frac{\pi r^2 h}{\frac{2}{3}\pi R^3} = \frac{3}{2}\frac{x^2\sqrt{R^2 - r^2}}{R} = \frac{3}{2}x^2\sqrt{1 - x^2}$

2) $\frac{dC}{dx} = ... = \frac{3}{2}x.\frac{2 - 3x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$

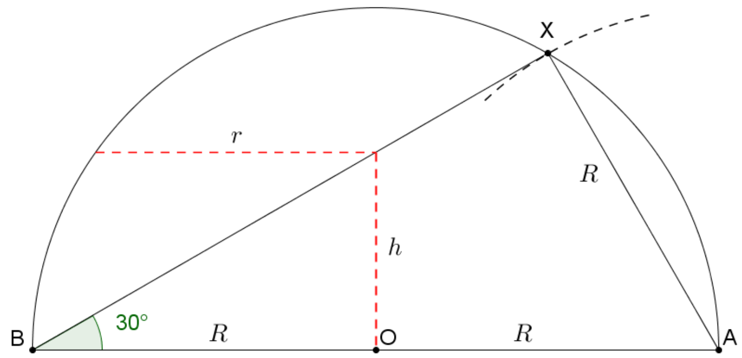
x	0		$\sqrt{2/3}$		1
dc/dx	0	$+$	0	$-$	
C		$\nearrow$	$\sqrt{3}/3$	$\searrow$	

Maximum de $C = \frac{\sqrt{3}}{3}$. On aurait pu aussi dire que C admet un maximum lorsque V_Y est maximum. En effet, V est constant :

$$V_Y = \pi r^2 h = \pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} \Rightarrow \frac{dV_Y}{dr} = ... = \frac{\pi r\left(2R^2 - 3r^2\right)}{\sqrt{R^2 - r^2}} \Rightarrow x = \frac{r}{R} = \sqrt{2/3}$$

$$\Rightarrow 3r^2 = 2R^2 . \text{Or } h^2 = R^2 - r^2 = R^2 - \frac{2}{3}R^2 = \frac{R^2}{3}.$$

Dans ce cas : $\frac{h}{R} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30°$



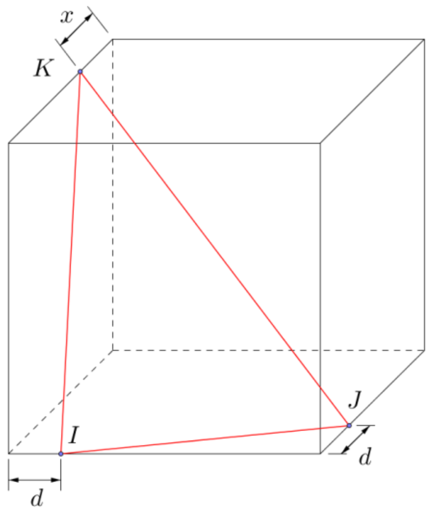
Par A on mène un cercle de rayon R. Celui-ci, coupe le cercle initial en X.
L'angle en X est droit car il sous-tend un demi-cercle.
$\sin\alpha = \frac{AX}{AB} = \frac{R}{2R} = \frac{1}{2}$. On en déduit que $\alpha = 30°$. On détermine h et r facilement.

Le 16 septembre 2013

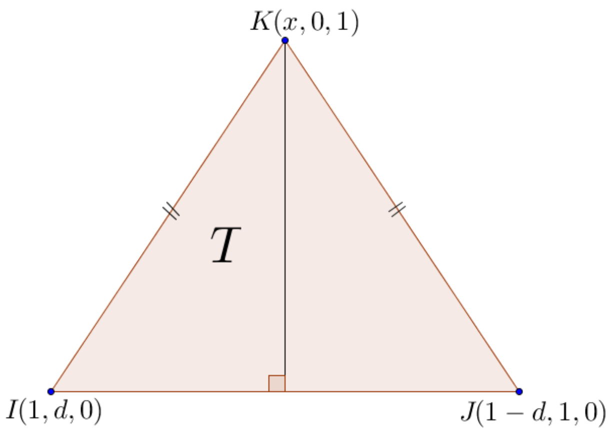
EXGSE116 - EPL, UCL, Louvain, juillet 11, série 2

La figure représente un cube de côté unité, dans lequel on considère trois points non-alignés I, J et K. On désigne par d et x les distances représentées sur la figure.

1. Exprimer les conditions que doivent vérifier d et x afin que les longueurs IK et JK soient égales. On considère uniquement cette situation pour le reste de l'exercice.
2. Calculer x pour chacune des quatre valeurs suivantes de d : $1/2$; $2/3$; $3/4$; 1. Commenter
3. On note T l'aire du triangle (I, J, K). Exprimer T en fonction de d uniquement.
4. Calculer T pour chacune des deux valeurs suivantes de d : $1/2$; 1. Commenter.



Solution proposée par Nicole Berckmans



Résolution par la géométrie analytique.

Mettre un repère sur le cube.

1) $\left.\begin{array}{l}\overline{IK}^2=(x-1)^2+d^2+1\\ \overline{JK}^2=(1-d-x)^2+1+1\end{array}\right\}$ $\overline{IK}=\overline{JK}$ ssi $2d(x-1)=0 \Rightarrow x=1-\dfrac{1}{2d}=\dfrac{2d-1}{2d}$

2)

d	x	Commentaires
$1/2$	0	K sommet du cube
$2/3$	$1/4$	
$3/4$	$1/3$	
1	$1/2$	I et J sommets du cube

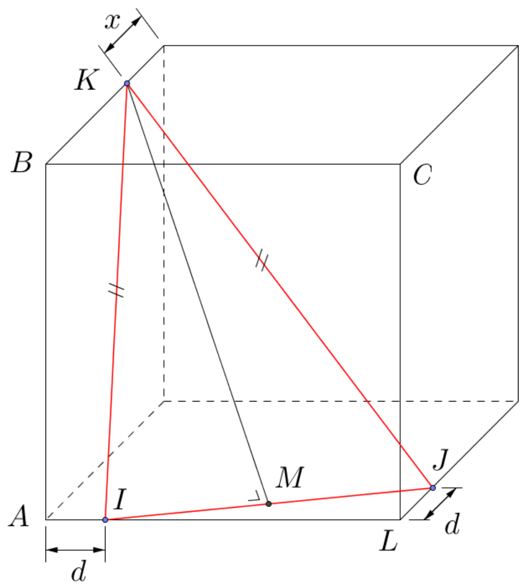
3) $T=\dfrac{1}{2}.\overline{IJ}.\overline{KM}$ où $\overline{IJ}=\sqrt{d^2+(d-1)^2}$; $M=\left(1-\dfrac{d}{2},\dfrac{d+1}{2},0\right)$

$$\overline{KM}=\sqrt{\left(x-1+\frac{d}{2}\right)^2+\left(\frac{d+1}{2}\right)^2+1}=\ldots=\frac{1}{2d}\sqrt{(d^2-1)^2+(d^2+d)^2+4d^2}$$

4) Si $d=1/2 \Rightarrow T=\ldots=\dfrac{\sqrt{17}}{8}$

Si $d=1 \quad \Rightarrow T=\ldots=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Solution proposée par Pierre Klaessens



Résolution par le produit scalaire

$$\overrightarrow{IK}^2=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}\right)^2=\overrightarrow{IA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BK}^2+\underbrace{2.\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\underbrace{2.\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BK}}_{0}+\underbrace{2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BK}}_{0}$$

$$=d^2+1+(1-x)^2$$

$$\overrightarrow{JK}^2=\left(\overrightarrow{JL}+\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BK}\right)^2$$

$$=\overrightarrow{JL}^2+\overrightarrow{LA}^2+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BK}^2+\underbrace{2.\overrightarrow{JL}.\overrightarrow{LA}}_{0}+\underbrace{2.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BK}}_{0}+\underbrace{2.\overrightarrow{JL}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\underbrace{2.\overrightarrow{JL}.\overrightarrow{BK}}_{-2(1-x).d}+\underbrace{2.\overrightarrow{LA}.\overrightarrow{AB}}_{0}+\underbrace{2.\overrightarrow{LA}.\overrightarrow{BK}}_{0}$$

$$=d^2+1+1+(1-x)^2-2(1-x)d$$

$$\overrightarrow{IK}^2=\overrightarrow{JK}^2\Rightarrow \cancel{d^2}+1+\cancel{(1-x)^2}=\cancel{d^2}+2+\cancel{(1-x)^2}-2(1-x)d$$

$$\Rightarrow d=\frac{1}{2(1-x)}\quad\text{ou}\quad x=\frac{2d-1}{2d}$$

Aire : $T=\dfrac{\overline{IJ}.\overline{KM}}{2}$

$$\overline{IJ}^2=\overline{IL}^2+\overline{LJ}^2=(1-d)^2+d^2$$

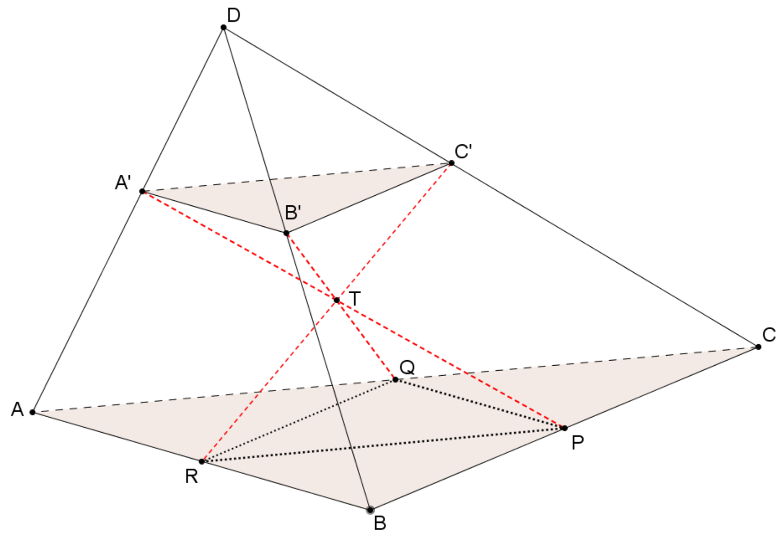
$$\overrightarrow{KM}^2=\overrightarrow{IK}^2-\frac{\overline{IJ}^2}{4}=d^2+1+(1-x)^2-\frac{(1-d)^2+d^2}{4}$$

En tenant compte que $1-x=\dfrac{1}{2d}$

$$\Rightarrow T=\frac{\sqrt{(1-d)^2+d^2}\sqrt{d^2+1+\dfrac{1}{4d^2}-\dfrac{(1-d)^2+d^2}{4}}}{2}$$

EXGSE117 - FACSA, ULG, Liège, juillet 2012

On considère un tétraèdre $ABCD$ et un plan parallèle à sa base ABC, qui coupe les arêtes $[AD],[BD]$ et $[CD]$ en des points notés respectivement A',B' et C'. Dans le triangle ABC, les milieux des côtés $[BC],[AC]$ et $[AB]$ sont respectivement notés P,Q et R.
Démontrer que les droites $A'P,B'Q$ et $C'R$ sont concourantes.



Les intersections de 2 plans parallèles par un troisième sont parallèles $\Rightarrow A'C'//AC$, $A'B'//AB$ et $B'C'//BC$.

D'autre part, la droite joignant le milieu de deux côtés d'un triangle est parallèle au troisième $\Rightarrow QR//BC, PQ//AB$ et $PR//AC$. De plus, $2\overline{QR}=\overline{BC}, 2\overline{PR}=\overline{AC}$ et $2\overline{PQ}=\overline{AB}$.

On a alors : $A'C'//PR, A'B'//PQ$ et $B'C'//QR$.

Les points $A'C'RP$ sont donc dans un même plan et les droites $A'P$ et RC' se soupent en un point T. Les triangles $A'TC'$ et PTR sont semblables car leurs angles homologues sont égaux (angles alternes-internes et angles opposés par le sommet). $\Rightarrow \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{PR}}=\dfrac{\overline{A'T}}{\overline{PT}}$ $\qquad(1)$.

De la même manière, les droites $A'P$ et $B'Q$ sont coplanaires et se coupent en T'.

Les triangles $A'B'T'$ et PQT' sont semblables $\Rightarrow \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{PQ}}=\dfrac{\overline{A'T'}}{\overline{PT'}}$ $\qquad(2)$.

Pour démontrer que les droites sont concourantes, il faut montrer que T et T' sont confondus.

Ce sera le cas si $\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{PR}}=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{PQ}}$ (Voir note)

En effet, les triangles $A'DC'$ et ADC sont semblables $\Rightarrow \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{DA'}}{\overline{DA}}$. De même les triangles $A'DB'$ et $ADB \Rightarrow \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{DA'}}{\overline{DA}}$. Et donc $\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \Rightarrow \dfrac{\overline{A'C'}}{2\overline{PR}}=\dfrac{\overline{A'B'}}{2\overline{PQ}} \Rightarrow \dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{PR}}=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{PQ}}$

Ce qui démontre la proposition.

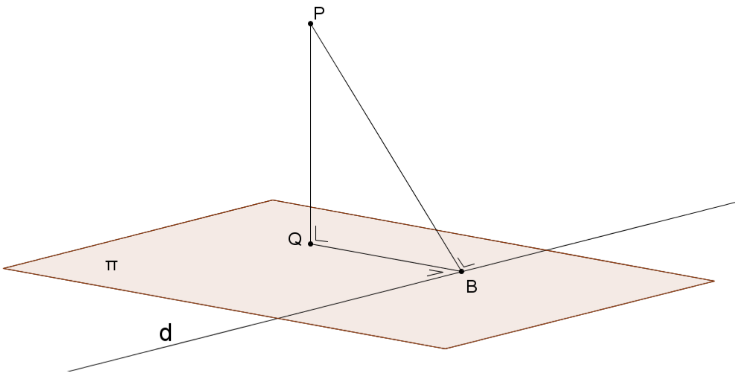
<u>*Note*</u> : Soit donc $\dfrac{\overline{A'C'}}{\overline{PR}}=\dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{PQ}}=a$

$$\Rightarrow .\begin{cases} \text{de } (1): \overline{A'T}=a\overline{PT} \Rightarrow \overline{A'P}-\overline{PT}=a\overline{PT} \Rightarrow \overline{A'P}=(1+a)\overline{PT} \Rightarrow \overline{PT}=\dfrac{\overline{A'P}}{1+a} \\ \text{de } (2): \overline{A'T'}=a\overline{PT'} \Rightarrow \overline{A'P}-\overline{PT'}=a\overline{PT'} \Rightarrow \overline{A'P}=(1+a)\overline{PT'} \Rightarrow \overline{PT'}=\dfrac{\overline{A'P}}{1+a} \end{cases}$$

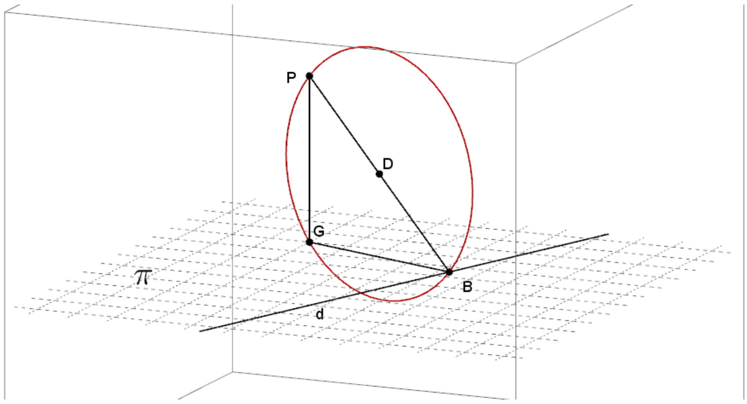
Et donc $\overline{PT}=\overline{PT'} \Rightarrow T\equiv T'$

EXGSE118 - FACSA, ULG, Liège, septembre 2012

On considère une droite d de l'espace et un point P n'appartenant par à d. Pour tout plan π contenant d, on désigne par Q la projection orthogonale du point P sur le plan π.
Déterminer le lieu géométrique décrit par le point Q lorsque π varie.

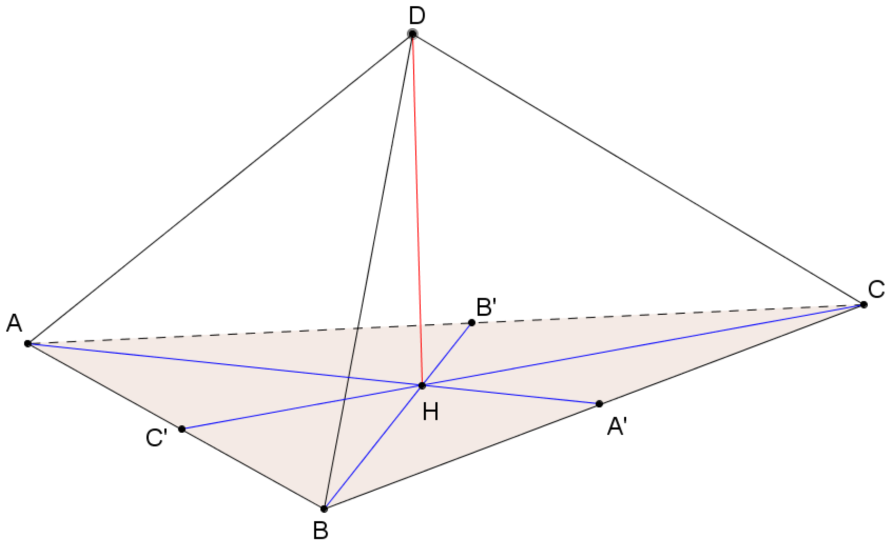


Abaissons la perpendiculaire PB sur d et joignons QB. La mesure de $\overline{PB}$ est une constante.
d est donc perpendiculaire à PB et comme PQ est perpendiculaire au plan π, d est orthogonale à PQ.
Par conséquent, d est perpendiculaire au plan PQB. Dans ce plan, le triangle PQB est rectangle en Q.
Par conséquent, le lieu de Q est le cercle situé dans le plan perpendiculaire à d, passant par P et de diamètre PB.



EXGSE119 - **FACSA, ULG, Liège, septembre 2012**

Soit un tétraèdre $ABCD$ dont les arêtes AD, BD et CD sont perpendiculaires deux à deux. Démontrer que la projection orthogonale du sommet D sur le plan ABC coïncide avec l'orthocentre du triangle ABC.



Soit H la projection orthogonale de d sur le plan ABC. Traçons AH qui coupe BC en A'. AD est perpendiculaire à DB et DC par hypothèse. AD est donc perpendiculaire au plan ADC et donc AD est orthogonale à BC. Or DH est perpendiculaire à ABC, donc DH est orthogonale avec BC. Par conséquent BC est perpendiculaire au plan ADH, ce qui implique que AA' est perpendiculaire à BC. Autrement dit AA' est une hauteur du triangle ABC.
On refait le même raisonnement pour montrer que les droites BH et CH sont aussi des hauteurs. H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

Le 18 octobre 2013.