

Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 12

EXGSE120 – EXGSE129

<http://www.matheux.c.la>

**Jacques Collot
Benoît Baudalet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard**

Novembre 13

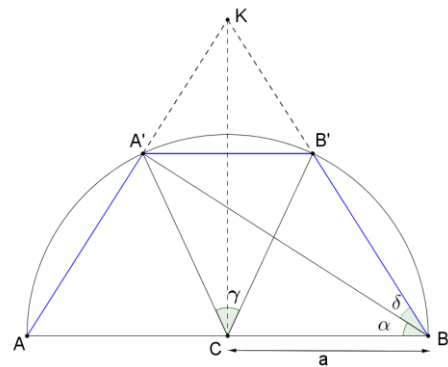
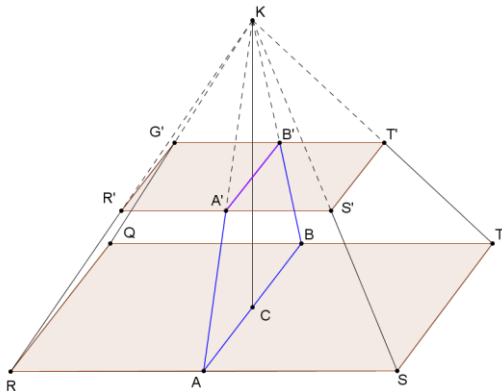
EXGSE120 - POLYTECH, Umons, Mons, Juillet 2012.

Soit une pyramide de base inférieure $QRST$ appartenant au plan horizontal π et de sommet K , situé à la verticale du centre de gravité C de cette base. Soit A le milieu de RS et B le milieu de TQ . Coupons cette pyramide par un plan horizontal π' de façon à former un tronc de pyramide : la base supérieure de ce tronc de pyramide est un autre carré $Q'R'S'T'$. Coupons le tronc de pyramide par un plan $\rho \perp \pi$ et de contenant AB . Ce plan coupe $R'S'$ en A' et $T'Q'$ en B' .

On se focalise sur le cas particulier où la distance entre les plans π et π' est telle que la **circonférence circonscrite au polygone $AA'B'B$ (appartenant au plan ρ) et de centre C admet le côté AB comme diamètre.** On appelle α l'angle ABA' et δ l'angle $B'BA'$.

On demande d'établir, par les méthodes de la géométrie synthétique, l'aire du secteur de cercle défini par l'angle au centre $A'CB'$ en fonction de AB et de l'angle α . Pour vous aider, étudiez d'abord la relation liant l'angle δ à l'angle α .

Solution proposée par Fabienne Zoetard



Aire recherchée : $A = \frac{\pi a^2}{360^\circ} \cdot \hat{\gamma}_{\text{en } ^\circ} = \frac{\pi a^2}{2\pi} \cdot \hat{\gamma}_{\text{en rad}}$ où a est le demi côté de la base de la pyramide.

Le $\triangle AA'B$ est rectangle en A' , donc $\alpha = 90^\circ - \widehat{AA'B} = 90^\circ - \widehat{B'BA} = 90^\circ - (\alpha + \hat{\delta})$ car CK est un axe de symétrie. $\Rightarrow 2\alpha = 90^\circ - \hat{\delta}$.

Le $\triangle BCB'$ est isocèle en C , ainsi

$$\widehat{B'CB} = 180^\circ - 2\widehat{CBB'} = 180^\circ - 2(\alpha + \hat{\delta}) = 180^\circ - 2(90^\circ - \alpha) = 2\alpha$$

$$\text{D'autre part : } \hat{\gamma} = 2\widehat{KCB'} = 2(90^\circ - \widehat{BC'B}) = 2(90^\circ - 2\alpha) = 180^\circ - 4\alpha$$

$$\text{Conclusion : } A = \frac{\pi a^2}{360^\circ} \cdot (180^\circ - 4\alpha) = \frac{\pi a^2}{90^\circ} (45^\circ - 4\alpha)$$

Remarque: La pyramide n'intervient que pour définir le trapèze $AA'B'B$

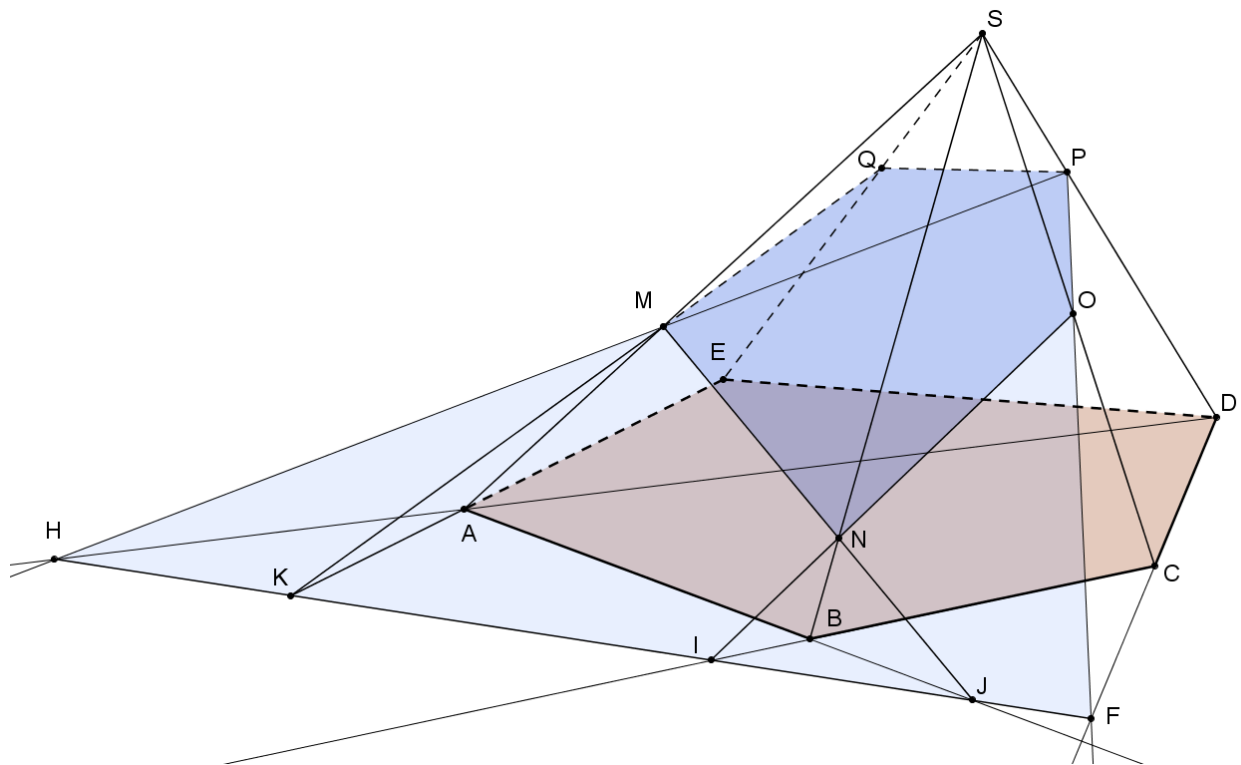
EXGSE121 - POLYTECH, Umons, Mons, Juillet 2013

Soit un pyramide de sommet S et de base non régulière $ABCDE$. Soient les trois points M, O et P respectivement sur les arêtes SA, SC et SD .

Ces points déterminent un plan π .

Construire la figure géométrique.

Déterminer par construction les points N et Q , intersections du plan π respectivement sur les arêtes SB et SE , afin de définir complètement la section plane passant par les trois points M, O et P .



P et $O \in \text{face } SCD \Rightarrow F = PO \cap DC$ et donc $F \in$ à la base $ABCDE$.

Faisons passer un plan par S, P et M qui coupe la base en $DA \Rightarrow H = PM \cap DA$ et donc H est aussi à la base. Traçons alors HF qui est l'intersection du plan π et de la base. HF coupe les arêtes AB et $BC \Rightarrow I = HF \cap CB$ et $J = HF \cap AB$.

Mais I est aussi dans la base $SAB \Rightarrow N = IO \cap SB$. De même J est dans la base SAB et $N = JM \cap SB$.

D'autre part soit $K = AE \cap HF$. $K \in \pi$ et à la face SAE . On a alors $Q = KM \cap SE$.

$MNOQ$ est l'intersection de la pyramide et du plan π .

EXGSE122 - – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013

On considère un point P et un plan π situés à une distance 2 l'un de l'autre. Soit S la sphère de centre P et de rayon 3.

- Déterminer le rayon R du cercle C formé par l'intersection entre le plan et la sphère.
- Calculer le volume du cône dont la base est le cercle C et le sommet est le point P .
- Un plan ρ parallèle à π coupe ce cône en deux parties ayant le même volume.
Déterminer la distance entre les plans π et ρ

Solution proposée par Dominique Druetz

$$\text{Pythagore : } R = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

$$\text{Volume cône : } \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{10}{3}\pi$$

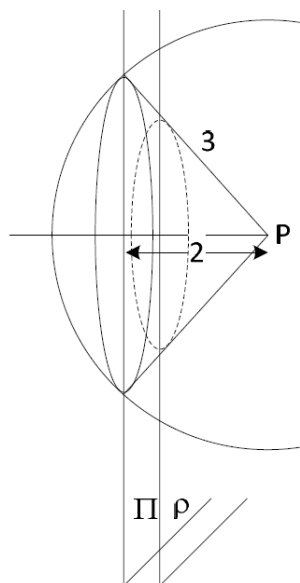
$$\text{Vol}_{\pi P} = 2\text{Vol}_{\rho P}$$

Soit x la hauteur du cône section de ρ et r le rayon de section, exprimons l'égalité des volumes:

$$\frac{10}{3}\pi = 2\frac{1}{3}\pi r^2 x \rightarrow 5 = r^2 x \quad (1)$$

Thalès : $\frac{R}{2} = \frac{r}{x} \rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, remplaçons dans (1) :

$$5 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2 x = \frac{5}{4}x^3 \rightarrow x = \sqrt[3]{4}$$



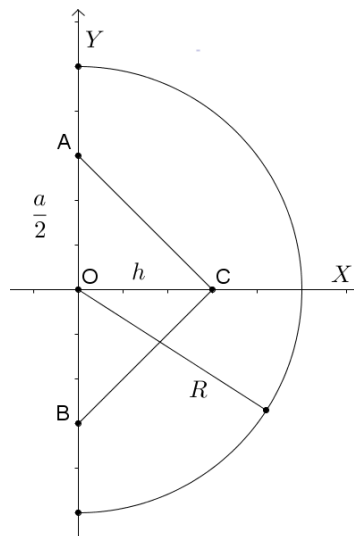
EXGSE123 - EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 1.

Dans le plan XY , un demi-cercle de centre O et de rayon $R > 0$ est tel que son centre et son diamètre sont sur l'axe Y . A l'intérieur du demi-cercle, un triangle ABC est tel que A et B sont situés sur l'axe Y , O est le milieu du côté AB et les côtés CA et CB sont de même longueur. On note $a > 0$ la longueur de la base AB et $h \in]0, R [$ la hauteur du triangle. On effectue une révolution autour de l'axe Y . Soit V_e le volume engendré par le demi-cercle, et V_i celui engendré par le triangle.

- (1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.
- (2) Exprimer le rapport $\frac{V_i}{V_e}$ en fonction de a , h et R uniquement.
- (3) Calculer la valeur maximale du rapport $\frac{V_i}{V_e}$ quand les côtés CA et CB ont :
 - la même longueur,
 - des longueurs différentes.

N.B. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Michel Goffin



On supposera R constant, tandis que $\frac{a}{2}$ et h varient dans $]0, R[$.

$$(2) V_e = \text{volume d'une sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$V_i = 2$ fois le volume d'un cône de rayon h et de hauteur $\frac{a}{2}$

$$= 2 \times \frac{1}{3}\pi h^2 \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{V_i}{V_e} = \frac{h^2 a}{4R^3}}$$

(3) (a) Si $\overline{CA} = \overline{AB}$, le triangle est équilatéral et dans le ΔAOC on a :

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2 \Rightarrow h = a \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } a = \frac{2h}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{V_i}{V_e} = \frac{2h^3}{4\sqrt{3}R^3} = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \left(\frac{h}{R}\right)^3$$

$$\boxed{\text{Le maximum est obtenu pour } h = R \text{ et vaut } \frac{\sqrt{3}}{6}}$$

Le a correspondant vaut alors : $a = \frac{2R}{\sqrt{3}} < 2R$

$$(b) \text{ Si } \overline{CA} \neq \overline{AB}, \frac{V_i}{V_e} \text{ est maximal pour } h = R \text{ et } a = 2R \Rightarrow \boxed{\frac{V_i}{V_e} = \frac{2R^3}{4R^3} = \frac{1}{2}}$$

EXGSE124 - EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 2.

Dans le plan XY , un rectangle (A, B, C, D) est tel que A et D sont situés sur l'axe des Y , la longueur des côtés AB et CD est l , et celle des côtés AD et BC est h . Le rectangle est coupé par une droite qui l'intercepte aux points M_1 situé sur le côté AB à une distance x_1 de A , et M_2 sur DC à une distance x_2 de D . On suppose $x_1 > x_2$. On effectue une révolution autour de l'axe Y . Soit V_R le volume engendré par le rectangle et V_T celui engendré par la révolution du trapèze (A, M_1, M_2, D) .

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

Pour toute la suite, on considère uniquement le cas : $V_T = \frac{V_R}{2}$

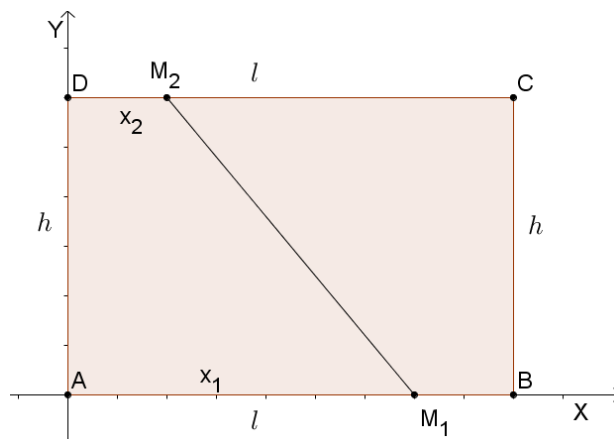
(2) Trouver l'équation liant x_1, x_2 et l .

(3) Calculer les valeurs -si elles existent- de x_2 dans les cas $x_1 = 2x_2$ et $x_1 = 3x_2$

(4) On pose $x_1 = \alpha x_2$. Trouver l'ensemble des valeurs admissibles de α . En déduire l'ensemble des valeurs possibles de x_2 .

N.B. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Michel Goffin



(1) Conditions : $0 \leq x_2 < x_1 \leq l \Rightarrow 0 \leq x_2^2 < x_1^2 \leq l^2$

(2) Cylindre : $V_R = \pi l^2 h$

Tronc de cône : $V_T = \frac{1}{3} \pi h (x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2)$

$$V_T = \frac{V_R}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} \pi h (x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2) = \frac{1}{2} \pi l^2 h \Rightarrow \boxed{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = \frac{3}{2} l^2} \quad (\text{éq 1})$$

(3) Si $x_1 = 2x_2$, (éq 1) devient $7x_2^2 = \frac{3l^2}{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{3}{14}} l$

On vérifie que : $0 < x_2 < l$ et $x_1^2 = 4x_2^2 = \frac{4 \times 3}{14} l^2 < l^2$

Si $x_1 = 3x_2$, (éq 1) devient $13x_2^2 = \frac{3l^2}{2} \Rightarrow x_2^2 = \frac{3}{26} l^2$

Qui est à rejeter car alors : $x_1^2 = 9x_2^2 = \frac{27}{26} l^2 > l^2$

(4) $x_1 = \alpha x_2$ Comme $x_1 > x_2$, il faut $\alpha > 1$

$$(\text{éq 1}) \Rightarrow x_2^2 (\alpha^2 + \alpha + 1) = \frac{3l^2}{2} \Rightarrow x_2^2 = \frac{3l^2}{2(\alpha^2 + \alpha + 1)}$$

Cette expression doit rester inférieure à l^2 . Ce qui est évident pour $\alpha = 1$.

$$x_1^2 = \alpha^2 x_2^2 = \frac{3\alpha^2 l^2}{2(\alpha^2 + \alpha + 1)} \leq l^2 \Rightarrow 3\alpha^2 \leq 2\alpha^2 + 2\alpha + 2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 2 \leq 0$$

Les racines de cette dernière équation sont $\alpha = 1 \pm \sqrt{3}$.

On en déduit : $\boxed{1 < \alpha \leq 1 + \sqrt{3}}$

On a alors

$$\begin{aligned} 1 &< \alpha^2 &&\leq 4 + 2\sqrt{3} \\ 3 &< \alpha^2 + \alpha + 1 &&\leq 6 + 3\sqrt{3} \\ 2 &< \frac{2}{3}(\alpha^2 + \alpha + 1) &&\leq 2(2 + \sqrt{3}) \\ \frac{1}{2(2 + \sqrt{3})} &\leq \frac{3}{2(\alpha^2 + \alpha + 1)} &&< \frac{1}{2} \\ \frac{l^2}{2(2 + \sqrt{3})} &\leq \frac{3l^2}{2(\alpha^2 + \alpha + 1)} = x_2^2 &&< \frac{l^2}{2} \\ \frac{l}{\sqrt{2(2 + \sqrt{3})}} &\leq x_2 &&< \frac{l}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\frac{l}{2} \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \leq x_2 < \frac{l\sqrt{2}}{2}}$

EXGSE125 - FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

- (a) Démontrer que si un point P est équidistant de deux droites sécantes en un point A , alors les projections orthogonales de P sur ces deux droites sont équidistantes de A .
- (b) En déduire que si les six arêtes d'un tétraèdre $ABCD$ sont tangentes à une même sphère, alors on a

$$|AB| + |CD| = |AC| + |BD| = |AD| + |BC|$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segment XY

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
<http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/>

- (a) Notons P' et P'' les projections orthogonales respectives de P sur les deux droites. Par hypothèse, on a $PP' \perp P'A$, $PP'' \perp P''A$ et $|PP'| = |PP''|$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles $PP'A$ et $PP''A$, on obtient

$$|P'A| = \sqrt{|PA|^2 - |PP'|^2}$$

et

$$|P''A| = \sqrt{|PA|^2 - |PP''|^2},$$

dont on déduit $|P'A| = |P''A|$, étant donné que l'on a $|PP'| = |PP''|$.

- (b) Notons respectivement E, F, G, H, I et J les points de tangence de la sphère aux arêtes $[AB], [AC], [AD], [BC], [BD]$ et $[CD]$ du tétraèdre. Ces points correspondent aux projections orthogonales du centre O de la sphère sur ces arêtes. Puisqu'ils appartiennent à cette sphère, ils sont également équidistants de O .

En appliquant le résultat établi au point (a), on obtient

$$|AE| = |AF| = |AG|,$$

$$|BE| = |BH| = |BI|,$$

$$|CF| = |CH| = |CJ|,$$

$$|DG| = |DI| = |DJ|,$$

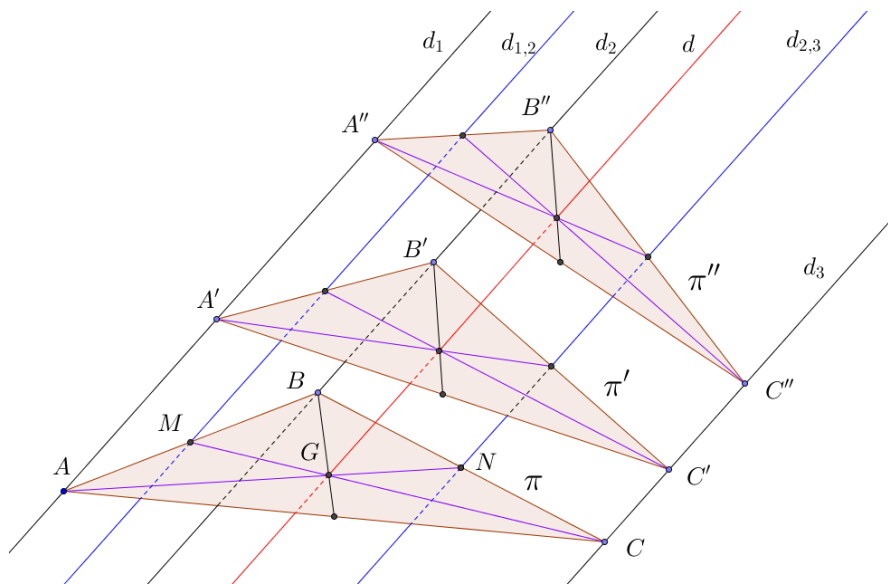
dont on déduit

$$\begin{aligned} |AB| + |CD| &= |AE| + |BE| + |CJ| + |DJ| \\ &= |AF| + |CF| + |BI| + |DI| = |AC| + |BD| \\ &= |AG| + |DG| + |BH| + |CH| = |AD| + |BC|. \end{aligned}$$

EXGSE126 - FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

On note d_1, d_2 et d_3 trois droites parallèles de l'espace distinctes et non coplanaires, et π, π' et π'' trois plans sécants à ces droites. Les points de percée de d_1 dans π, π' et π'' sont respectivement notés A, A' et A'' . De même les points de percée de d_2 et d_3 dans ces plans sont respectivement notés B, B', B'' et C, C', C'' . Démontrer que les centres de gravité des triangles $ABC, A'B'C'$ et $A''B''C''$ sont alignés

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) : <http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/>



Appelons $d_{1,2}$ la droite parallèle à d_1 et de d_2 dans le plan formé par ces deux droites, et située à égale distance de d_1 et de d_2 . La droite $d_{1,2}$ coupe le segment $[AB]$ en son milieu M . De même, elle coupe $[A'B']$ et $[A''B'']$ en leurs milieux.

De la même manière, on définit la droite $d_{2,3}$ située à égale distance de d_2 et de d_3 dans le plan formé par ces deux droites. Cette droite $d_{2,3}$ coupe les segments $[BC]$, $[B'C']$ et $[B''C'']$ en leurs milieux. On note N le milieu de $[BC]$.

Le centre de gravité G du triangle ABC est situé à l'intersection des médianes AN et CM de ce triangle. La droite AN correspond à l'intersection du plan π avec le plan α formé par les deux droites parallèles d_1 et $d_{2,3}$, car les points A et N appartiennent tous les deux à ces deux plans. De même, la droite CM correspond à l'intersection du plan π avec le plan β formé par les deux droites parallèles d_3 et $d_{1,2}$. Etant donné que G appartient aux plans α et β , il appartient à leur intersection, que l'on note d .

Le même raisonnement dans les triangles $A'B'C'$ et $A''B''C''$ permet d'établir que les centres de gravité de ces triangles sont également situés sur la droite d . Ces trois points sont donc bien alignés.

EXGSE127 - EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 1

Un cône de révolution a pour demi angle au sommet $\frac{\pi}{6}$ et pour hauteur H . On place à

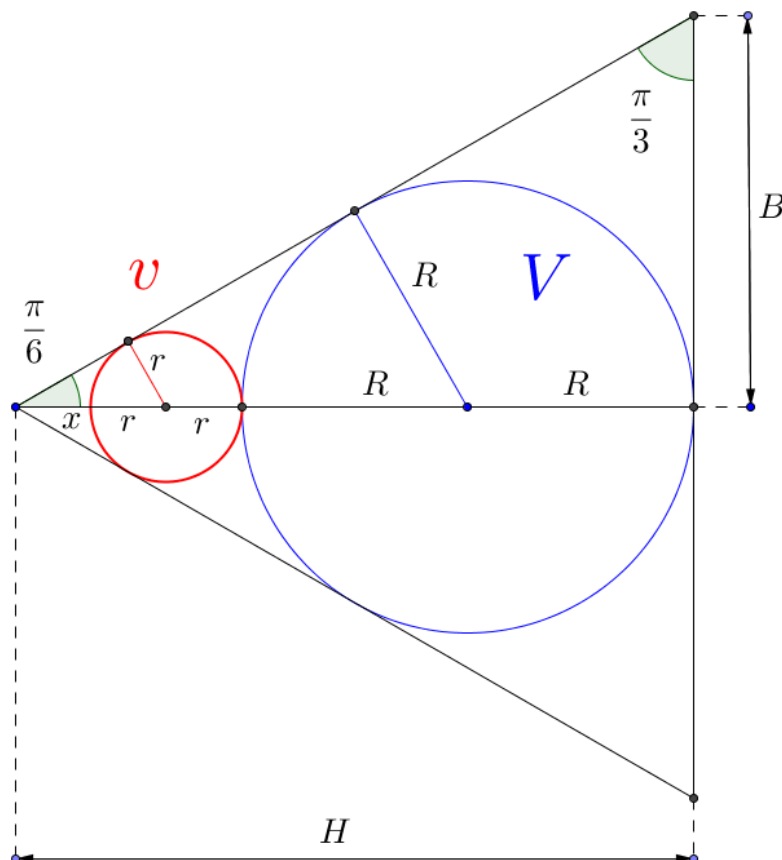
l'intérieur deux boules sphériques dont les centres sont situés sur l'axe de cône.

On souhaite maximiser la somme des volumes des boules.

- (1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.
- (2) Calculer les rayons des boules en fonction H uniquement.
- (3) Calculer le rapport de la somme des volumes des boules par le volume du cône.

NB: Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans



On a : $x + 2r + 2R = H$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} = \frac{r}{x+r} = \frac{R}{x+2r+R}$

De (1), on tire $x = r$ et de (2) $\frac{R}{3r+R} = \frac{1}{2} \Rightarrow R = 3r$

Dès lors : $H = 3r + 6r = 9r \Rightarrow \begin{cases} r = \frac{H}{9} \\ R = \frac{H}{3} \end{cases}$

D'autre part, $v = \frac{4}{3}\pi r^3$ et $V = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow v + V = \frac{4}{3}\pi(r^3 + R^3)$

On a aussi $V_{c\hat{o}ne} = \frac{1}{3}\pi B^2 H$ or $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{B}{H}$. Donc : $V_{c\hat{o}ne} = \frac{1}{9}\pi H^3$

Ce qui donne : $\frac{v+V}{V_{c\hat{o}ne}} = \frac{\frac{4}{3}\pi(r^3 + R^3)}{\frac{1}{9}\pi H^3} = \frac{12(r^3 + R^3)}{H^3} = \frac{12\left(\frac{1}{9^3} + \frac{1}{3^3}\right)H^3}{H^3} = \frac{112}{243} \approx 0.461$

Le 26 septembre 2015

EXGSE128 - EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 2

Une sphère de rayon R est coupée par un plan horizontal, créant ainsi une calotte sphérique de hauteur $H < R$. On considère un cylindre de hauteur y et rayon x , inscrit dans la calotte, et d'axe vertical passant par le pôle de celle-ci. On note V_i le volume du cylindre et V_e celui de la calotte, qui est donné par l'expression suivante (que l'on ne demande pas de démontrer) :

$$V_e = \frac{\pi}{3} H^2 (3R - H).$$

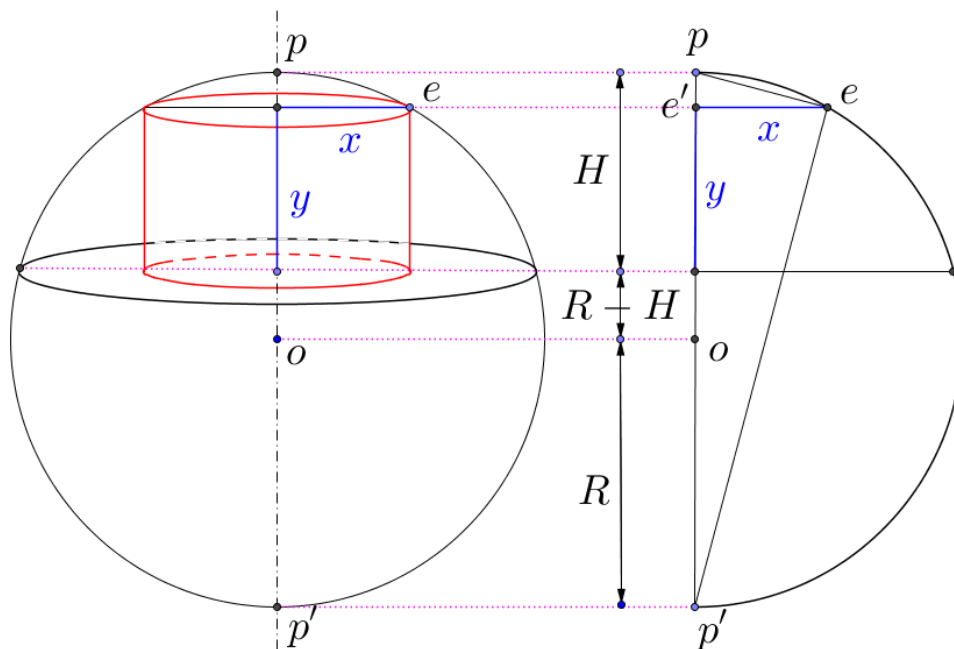
- (1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.
- (2) Exprimer V_i en fonction de R , H et y uniquement.

Pour la suite, on considère que $H = \frac{R}{2}$

- (3) Exprimer en fonction de H uniquement la valeur de y pour laquelle V_i est maximal.
- (4) Calculer la valeur correspondant du rapport $\frac{V_i}{V_e}$.

Note : Les calculs doivent se faire sans machine

Solution proposée par Louis François



(2) Le triangle (p, e, p') est rectangle en e : x est moyenne géométrique en $\|pe'\|$ et $\|e'p'\|$.

$$\begin{cases} \|pe'\| = H - y \\ \|e'p'\| = R + R - H + y \end{cases} \Rightarrow x^2 = (H - y)(2R - H + y)$$

Donc :
$$V_i = \pi x^2 y = \pi (H - y)(2R - H + y) y$$

Et pour $R = 2H \Rightarrow V_i = \pi (3H + y)(H - y) y$

(3)
$$\frac{dV_i}{dy} = \pi [(H - y)y - (3H + y)y + (3H + y)(H - y)]$$

$$= \dots = \pi (-3y^2 - 4Hy + 3H^2)$$

| | | | | |
|---|-------|-----|------------|-----|
| y | y_1 | 0 | y_2 | H |
| $\frac{dV_i}{dy} = 0$: $y = \frac{2H \pm \sqrt{13}H}{-3} = \begin{cases} y_1 < 0 \\ y_2 > 0 \end{cases}$ | - | 0 | + | + |
| V_i | | 0 | \nearrow | Max |
| | | 0 | \searrow | 0 |

Le V_i maximum est obtenu pour :

$$y = y_2 = \frac{\sqrt{13} - 2}{3} H \text{ et vaut alors } V_i = \frac{2\pi}{27} (13\sqrt{13} - 35) H^3 \approx 2.763 H^3$$

(4)
$$\frac{V_i}{V_e} = \frac{\frac{2\pi}{27} (13\sqrt{13} - 35) H^3}{\frac{\pi}{3} H^2 (3R - H)} = \frac{2(13\sqrt{13} - 35)}{45} \cdot \frac{1}{H}$$

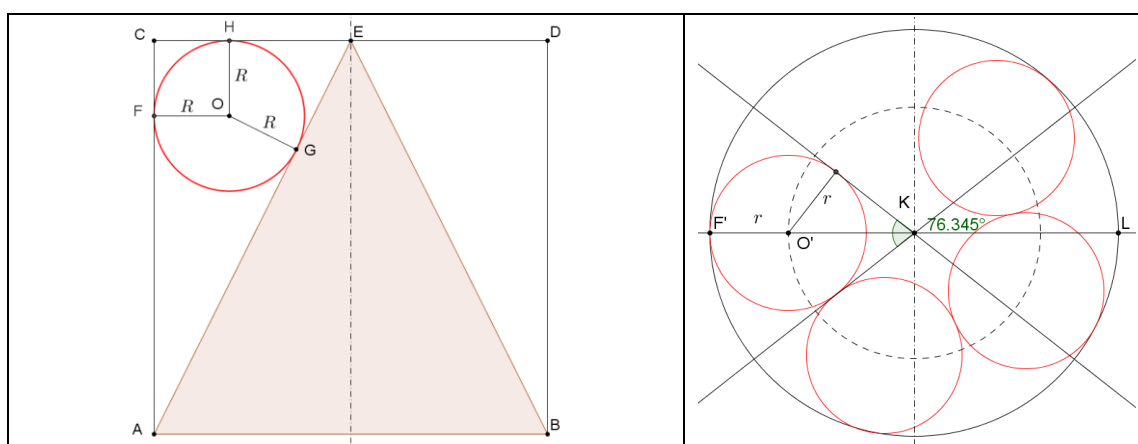
Si on dispose d'une machine à calculer : $\frac{V_i}{V_e} \cong \frac{0.528}{H}$. Ce calcul a peu d'intérêt.

EXGSE129 - Polytech, Umons, Mons, juillet 2015

Soit un récipient cylindrique ($h = 10$ et $r = 5$) à l'intérieur duquel on vient déposer un cône de même hauteur et de même base que le cylindre. Le cône est déposé sur sa base.

On demande :

1. Que vaut le diamètre d maximum de la sphère qu'il est possible d'insérer intégralement entre le cylindre et le cône? Faire un dessin.
2. Combien de ces sphères de diamètre d peut-on placer au maximum dans le cylindre contenant le cône?
3. Que vaut le volume intérieur résiduel du cylindre contenant le cône et le nombre maximum de sphère de rayon $\frac{d}{2}$?



- 1) Le rayon de la sphère correspond au rayon du cercle inscrit au triangle rectangle ACE .

Ce rayon est donné par : $R = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CE}}{\overline{AC} + \overline{CE} + \overline{AB}}$ (Voir en annexe la justification)

$$\Rightarrow R = \frac{10 \times 5}{10 + 5 + \sqrt{10^2 + 5^2}} = \frac{10}{3 + \sqrt{5}} = \frac{5}{2}(3 - \sqrt{5}) \Rightarrow \boxed{d = 5(3 - \sqrt{5}) \approx 3.8197}$$

- 2) Déterminons l'angle α sous lequel on voit une sphère à partir de l'axe du cylindre.

$$\Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{R}{F'K - F'O'} = \frac{\frac{5}{2}(3 - \sqrt{5})}{5 - \frac{5}{2}(3 - \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 38.1727^\circ \Rightarrow \alpha = 76.3454^\circ$$

Le nombre maximum de sphère est alors : $\left\lfloor \frac{360}{76.3454^\circ} \right\rfloor = \boxed{4}$

Rappel : $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ donne l'entier immédiatement inférieur au résultat de $\frac{a}{b}$

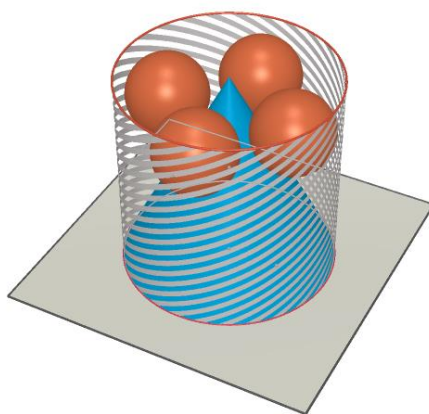
3) Si le rayon vaut $d/2$ alors on a 4 sphères.

Il reste à calculer le volume :

$$V = V_{\text{cylindre}} - V_{\text{cône}} - 4V_{\text{sphère}} = \pi r^2 h - \frac{1}{3} \pi r^2 h - 4 \cdot \frac{\pi d^3}{6} = \frac{2\pi}{3} r^2 h - 4 \cdot \frac{\pi d^3}{6}$$

En tenant compte que $2r = h$, on obtient :

$$V = \frac{2\pi}{3} (h^3 - d^3) = \frac{2\pi}{3} \left[10^3 - \left(5(3 - \sqrt{5}) \right)^3 \right] \cong 1977.68 \text{ uv}$$



Dessin fournit par Hugues Vermeiren

Rayon du cercle inscrit à un triangle : voir

http://le-castillon.etab.ac-caen.fr/sites/le-castillon.etab.ac-caen.fr/IMG/pdf/Calcul_du_rayon_du_cercle_inscrit_a_un_triangle_rectangle.pdf

Le 10 octobre 2015