Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 13

EXGSE130 – EXGSE139

http://matheux.ovh

Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Novembre 15

EXGSE130 - EPL, UCL, LLN, septembre 2015.

Soit un triangle d'aire $A>0$. On note $V_i\,(i=1,2,3)$ le volume du solide obtenu par révolution autour du côté du triangle de longueur a_i.

1) Exprimer V_i en fonction de a_i et de A uniquement. Illustrer l'énoncé et la méthode de résolution par un dessin clair.

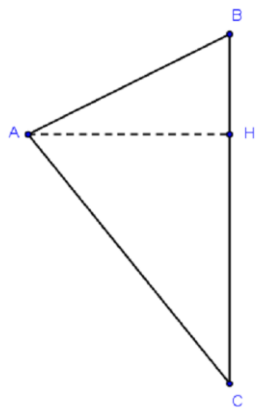
2) Que vaut le produit a_iV_i ? La valeur maximale de V_i est-elle obtenue pour la plus grande ou la plus petite valeur de a_i ?

3) Pour un triangle rectangle, trouver une relation simple entre V_1^{-2}, V_2^{-2} et V_3^{-2}.

NB: (i) Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration;

(ii) Justifier vos réponses.

Solution proposée par Emilie Jacqmin



$$\overline{BC}=a_i$$

$$A=\frac{\overline{BC}.\overline{AH}}{2}\Leftrightarrow \overline{AH}=\frac{2A}{a_i}$$

1) $$V_i=\frac{1}{3}\pi\overline{AH}^2\left(\overline{BH}+\overline{HC}\right)=\frac{1}{3}\pi\overline{AH}^2\,\overline{BC}=\frac{1}{3}\pi\frac{4A^2}{a_i^2}a_i=\frac{4\pi}{3}.\frac{A^2}{a_i}$$

2) $a_i.V_i=\dfrac{4\pi}{3}.A^2\Rightarrow V_i$ est maximal lorsque a_i est minimal.

3) $$V_1=\frac{4\pi}{3}.\frac{A^2}{a_1};\ V_2=\frac{4\pi}{3}.\frac{A^2}{a_2};\ V_3=\frac{4\pi}{3}.\frac{A^2}{a_3}$$

$$\Rightarrow V_1^{-2}=\frac{9}{16\pi^2}.\frac{a_1^2}{A^4};\ V_2^{-2}=\frac{9}{16\pi^2}.\frac{a_2^2}{A^4};\ V_3^{-2}=\frac{9}{16\pi^2}.\frac{a_3^2}{A^4}$$

Or, par Pythagore, on sait que $a_1^2=a_2^2+a_3^2$, on a donc :

$$V_1^{-2}=V_2^{-2}+V_3^{-2}$$

---

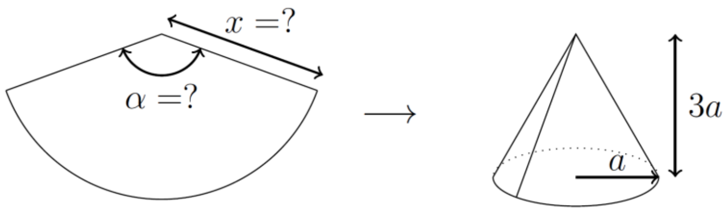
12 février 2016

EXGSE131 - FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2015.

On souhaite fabriquer un "chapeau pointu" de forme conique à partir du développement représenté ci-dessous.

a) Sachant que le chapeau obtenu devrait avoir une hauteur de $3a$ et sa base un rayon a, calculez la longueur x nécessaire sur le développement.

b) De même, calculer l'angle α.



---

x est la génératrice du cône. Par pythagore, on a directement :

$$x = \sqrt{9a^2 + a^2} = a\sqrt{10}$$

La base du cône est un cercle dont la circonférence vaut :

$$l = 2\pi a$$

On peut alors déterminer l'angle α du secteur circulaire correspondant au développement du cône. Le rayon de ce secteur est $r = x$:

$$l = \pi r \frac{\alpha}{180} \Rightarrow 2\pi a = \pi a\sqrt{10}\frac{\alpha}{180} \Rightarrow \boxed{\alpha = 360\sqrt{10} \simeq 113.84°}$$

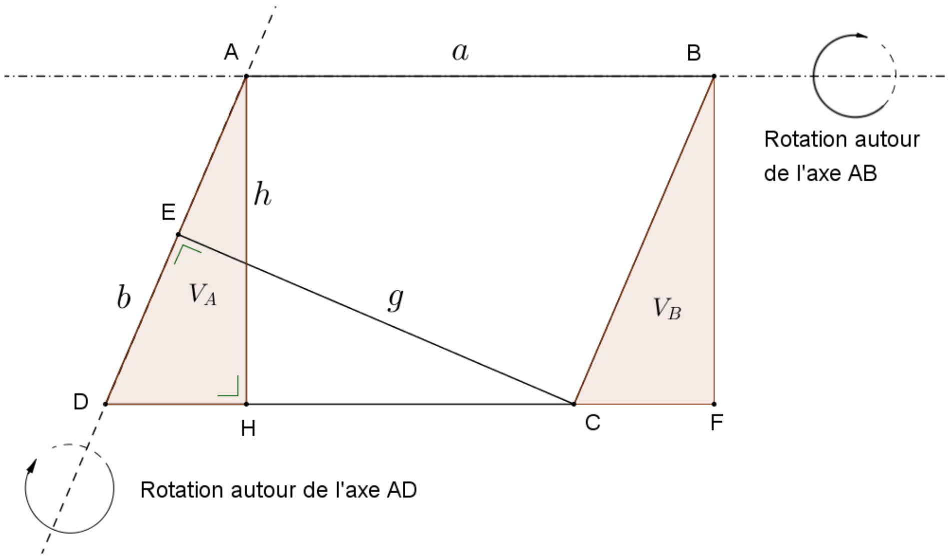
---

16 février 2016

EXGSE132 - – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2015

Soit $ABCD$ un parallèlogramme dont les longueurs des côtés AB et CD sont appelées "a" et dont les longueurs des côtés AD et BC sont appelées "b", avec $b < a$. La distance entre AB et DC sera notée "h" et celle entre AD et BC sera notée "g".
On fait d'abord tourner ce parallèlogramme autour de AB considéré comme 1er axe de rotation : on engendre ainsi un volume de révolution appelé "V". On fait ensuite tourner ce parallèlogramme autour de AD considéré comme second axe de rotation: : on engendre ainsi un volume de révolution appelé "V'".
Exprimer d'abord V en fonction de a et h, puis V'en fonction de b et g.
Exprimer ensuite le rapport V / V' en fonction de a et de b.

Solution proposée par Martin Scohier



Rotation autour de l'axe AB

Une simple analyse de la figure ci-dessus indique que le volume V_A engendré par le triangle AHD est identique au volume V_B engendré par le triangle BCF.

On en déduit que le volume engendré par le parallèlogramme $ABCD$ est égal au volume du cylindre engendré par le rectangle $ABFH \Rightarrow \qquad V = \pi h^2 a \qquad (1)$

Rotation autour de l'axe AD

Par un raisonnement similaire, on déduit que $\qquad V' = \pi g^2 b \qquad (2)$

D'autre part, on note que les triangles rectangles AHD et AED sont semblables car ils ont l'angle non-droit $\widehat{ADC}$ en commun.

$$\Rightarrow \frac{\overline{AH}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{h}{g} = \frac{b}{a} \qquad (3)$$

De (1),(2) et (3), on déduit :

$$\Rightarrow \frac{V}{V'} = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{a}{b} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{V}{V'} = \frac{b}{a}}$$

Le 28 janvier 2016

EXGSE133 - EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 2.

On se propose de modéliser d'une manière simple une horloge de sable, supposée faite de deux parties tronconiques identiques. Chacune est une partie d'un cône de révolution d'angle au sommet α, avec deux bases circulaires horizontales de rayons R_i et $R_e > R_i$. Les deux parties sont collées le long de leur base commune de rayon R_i et ont même axe vertical.

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

Initialement, la partie supérieure est remplie de grains de sable considérés comme des billes sphériques de rayon $r < R_i$. Le nombre total de grains N est obtenu en divisant le volume de la partie supérieure par celui du grains, puis en multipliant le résultat par une contante $k \in [0,1]$.

(2) Exprimer N en fonction des données.

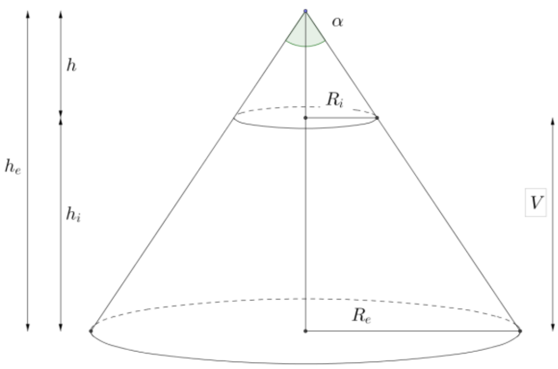
On suppose que le nombre de grains qui passent de la partie supérieure à la partie inférieure par unité de temps vaut $k\left(\frac{R_i}{r}\right)^2$. On souhaite calculer R_i tel que tous les grains passent au bout de t unités de temps. On pose $X = \frac{R_e}{R_i}$.

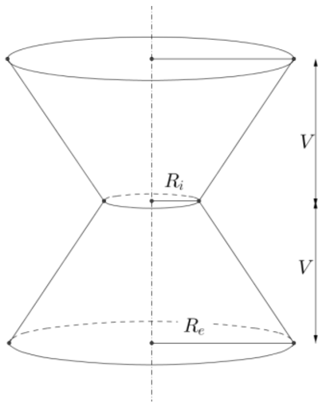
(3) Montrer que X doit satisfaire une équation que l'on demande d'établir sans la résoudre.

Application numérique : $\alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{R_e}{r} = 100\sqrt{3}, t = 6500$ unités de temps.

(4) Parmi les valeurs suivantes de X, indiquer celle qui vérifie l'équation du point (3) : $X = 2; \frac{5}{2}; 3$

Solution proposée par Louis François





$(1)\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{R_i}{h_i}=\frac{R_e}{h_e}\Rightarrow h_i=\frac{R_i}{\tan\frac{\alpha}{2}}$ et $h_e=\frac{R_e}{\tan\frac{\alpha}{2}}$

$$V=\frac{1}{3}\pi R_e^2 h_e-\frac{1}{3}\pi R_i^2 h_i=\frac{1}{3}\pi\frac{R_e^3}{\tan\frac{\alpha}{2}}-\frac{1}{3}\pi\frac{R_i^3}{\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{\pi}{3}.\frac{\left(R_e^3-R_i^3\right)}{\tan\frac{\alpha}{2}} \qquad (i)$$

$$(2)\ N=\frac{V}{\frac{4}{3}\pi r^3}.k=\frac{\frac{\pi}{3}.\frac{\left(R_e^3-R_i^3\right)}{\tan\frac{\alpha}{2}}}{\frac{4}{3}\pi r^3}.k=\frac{R_e^3-R_i^3}{4r^3\tan\frac{\alpha}{2}}.k$$

(3) Il faut : $k\left(\frac{R_i}{r}\right)^2=\frac{R_e^3-R_i^3}{4r^3\tan\frac{\alpha}{2}}.k\Rightarrow 4rR_i^2\tan\frac{\alpha}{2}t=R_e^3-R_i^3.$

En divisant pas R_i^3 : $\quad 4r\frac{1}{R_i}\tan\frac{\alpha}{2}=\left(\frac{R_e}{R_i}\right)^3-1$

Or $\frac{R_e}{R_i}=X\Rightarrow \quad \boxed{4r\tan\frac{\alpha}{2}.\frac{X}{R_e}=X^3-1} \qquad (ii)$

(4) Pour $\alpha=\frac{\pi}{3};\left(\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}\right);\frac{R_e}{r}=1000\sqrt{3};\ t=6500$

$(ii)\Rightarrow 4\frac{\sqrt{3}}{3}\frac{1}{1000\sqrt{3}}X\,6500=X^3-1\Rightarrow \boxed{3X^3-26X-3=0}$

Cette dernière équation admet 3 comme solution.

Remarque : En partant de la formule $V=\frac{1}{3}\pi h\left(R_e^2+R_eR_i+R_i^2\right)$ et en remplaçant h par

$h_e-h_i=\frac{R_e-R_i}{\tan\frac{\alpha}{2}}$, on obtient (i).

EXGSE134 - EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Un triangle (A, B, C) isocèle rectangle en B a pour longueurs de côtés $AB = BC = a$ et $AC = b$. Les bissectrices s'intersectent en un point O, centre du cercle inscrit qui est tangent aux côtés (AB) en M, (AC) en N et (BC) en P.

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

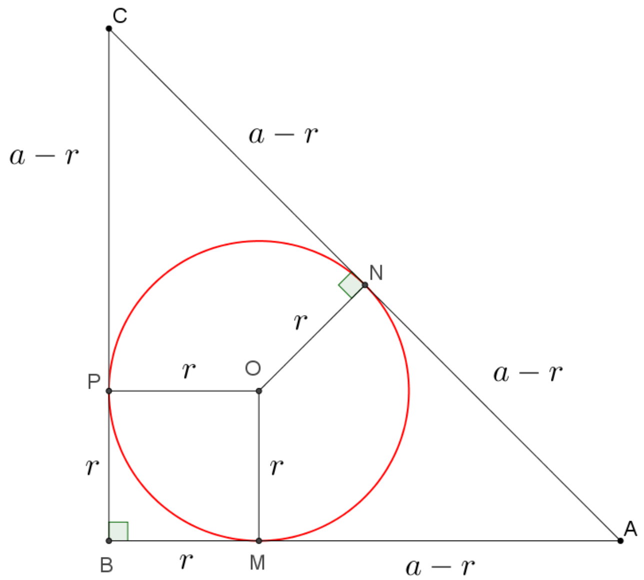
(2) Exprimer en fonction de a et b uniquement chacune des longueurs AM, OM, OA et MN.

(3) Calculer le volume du solide de révolution obtenu par rotation du quadrilatère (A, M, O, N) autour su segment (O, A)

NB : Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration

---

Solution proposée par Nicole Berckmans



$b = 2(a-r) = \sqrt{2a^2}$; $\qquad AM = a - r = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $\qquad OM = r = a\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$$OA = \sqrt{r^2 + (a-r)^2} = \sqrt{a^2\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{2}} = \ldots = a\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

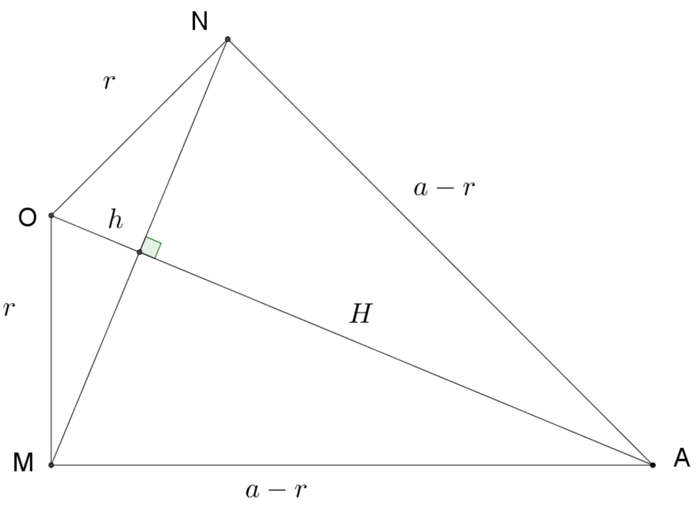
MN calculé dans le triangle MON.

$MN^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos 135°$

car le quadrilatère $AMON$ est inscriptible et donc $O = 180° - A$

$$\Rightarrow MN^2 = 2r^2\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow MN = r\sqrt{2+\sqrt{2}} = \frac{a}{2}\left(2-\sqrt{2}\right)\sqrt{2+\sqrt{2}} = a\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}$$



Le solide est composé de 2 cônes.

1) Cône de sommet O et de base MN.

L'aire de la base est l'aire d'un cercle de diamètre $MN = \pi\left(\frac{MN}{2}\right)^2$

La hauteur : $h = \sqrt{r^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2}$

Volume du cône : $V_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{MN}{2}\right)^2 \sqrt{r^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2}$

2) Cône de sommet A et de base MN

La hauteur : $H = \sqrt{(a-r)^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2}$

Volume du cône : $V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{MN}{2}\right)^2 H = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{MN}{2}\right)^2 \sqrt{(a-r)^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2}$

3) La volume du solide est la somme des deux cônes.

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{MN}{2}\right)^2\left(\sqrt{r^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2} + \sqrt{(a-r)^2 - \left(\frac{MN}{2}\right)^2}\right)$$

Expression dans laquelle il faudrait encore remplacer MN. Ce qui conduit a une expression tellement compliquée que cela n'a aucun intérêt.

16 octobre 2016

EXGSE135 - POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2016

Al'aide de tôle d'acier, on souhaite réaliser un entonnoir en tronc de cône de révolution de 57.4 cm de hauteur. La petite base aura un diamètre de 11 cm et la surface de la grande base vaudra 1 m^2. On demande quelles sont les dimmensions de la plus petite tôle rectangulaire convenant à la fabrication de cet entonnoir au départ de la découpe d'une seule pièce.
Pour ce calcul, on négligera l'épaisseur de la tôle et celle de la soudure.
Pour vous guider dans la résolution de ce problème, vous établirez d'abord la relation permettant de déterminer l'amplitude de l'angle du secteur circulaire nécessaire à la réalisation d'un cône de révolution de rayon R et de hauteur H.

Solution proposée par Fabienne Zoetard

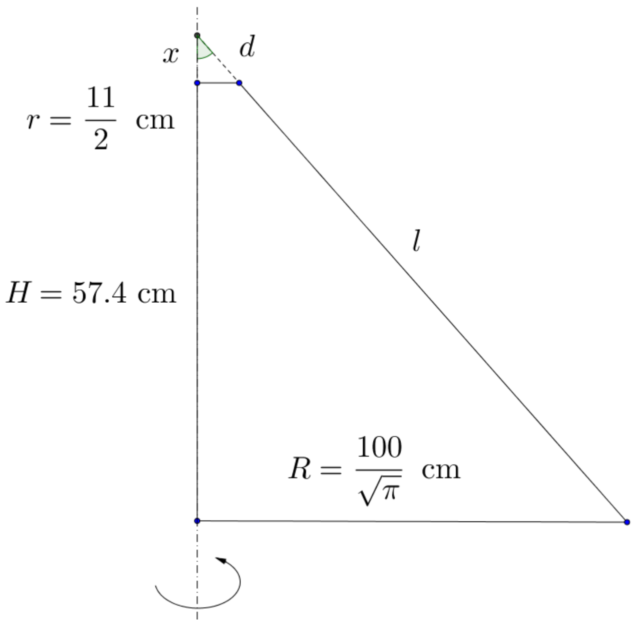


Figure 1

Figure 1 :

Rayon du cercle formant la base : $\pi R^2 = 10000\ (\text{cm}^2) \Rightarrow R = \dfrac{100}{\sqrt{\pi}}$ cm

Périmètre du grand cercle : $p = 2\pi R = 200\sqrt{\pi}$ cm.

On peut facilement calculer la génératrice du cône $g = d + l$ car on a

$$\frac{x}{x+H} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{x}{x+57.4} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{100}{\sqrt{\pi}}} \Rightarrow x = 6.2 \text{ cm}$$

$$\Rightarrow g = \sqrt{R^2 + (x+H)^2} = \sqrt{\frac{10^4}{\pi} + (6.2+57.4)^2} = 85.02 \text{ cm}$$

De même : $d = \sqrt{\left(\dfrac{11}{2}\right)^2 + 6.2^2} = 8.29 \text{ cm} \Rightarrow l = 85.02 - 8.29 = 76.73$ cm.

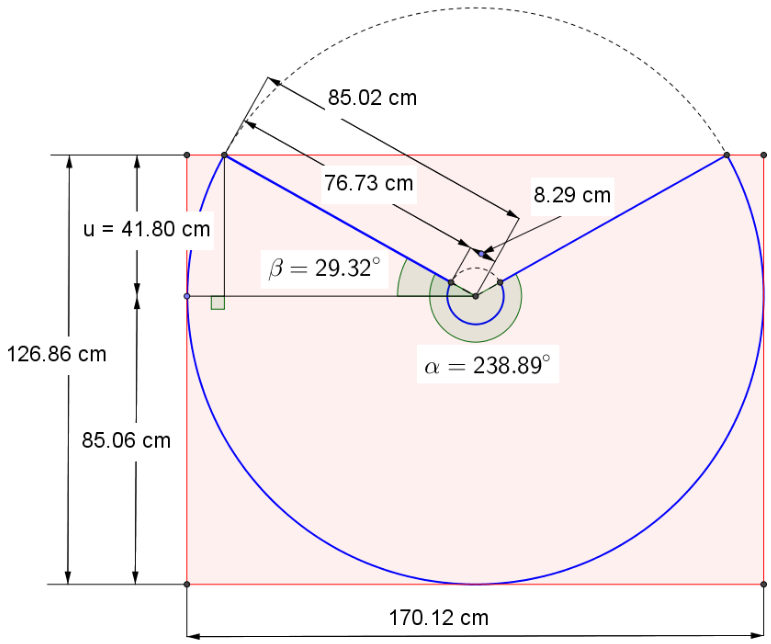


Figure 2

Figure 2 :

L'angle au sommet du secteur représentant le développement du cône est :

$$\alpha = 180° \frac{p}{\pi g} = 180° \frac{2\pi R}{g} = 360° \frac{R}{g} = 360° \frac{100\sqrt{\pi}}{85.02} = 238.89°$$

On en déduit : $\beta = \dfrac{238.89 - 180}{2} = 29.45° \Rightarrow u = 85.02 \sin 29.45° = 41.80$ cm.

Finalement, les dimmensions de la tôle sont donc:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Largeur : } 2 \times 85.06 = 170{,}12 \text{ cm} \\ \text{Longueur : } 41.8 + 85.06 = 126.86 \text{ cm} \end{array}}$$

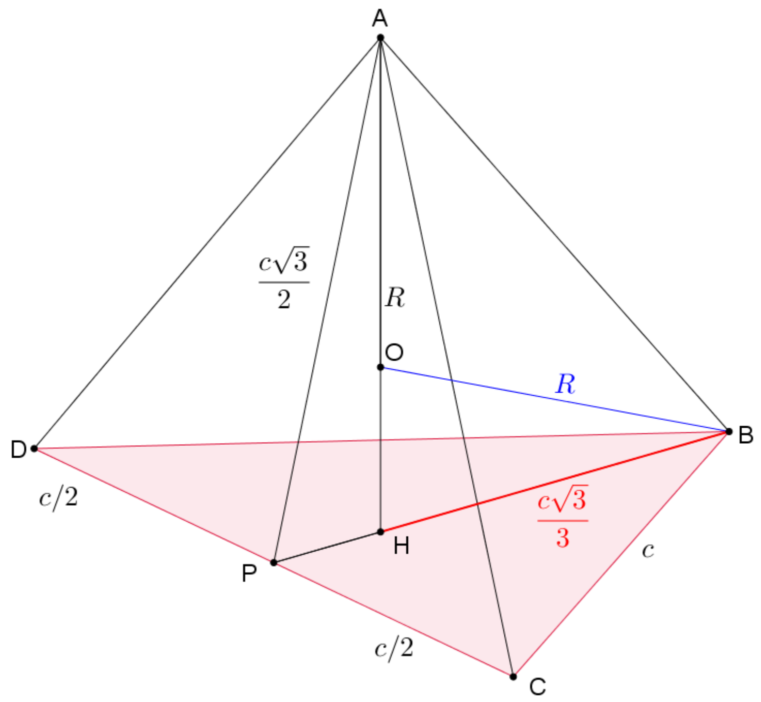
Le 24 mars 2017

EXGSE136 - EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

Soit $\mathscr{S}$ une sphère de rayon unité de l'espace euclidien.

a) Calculer la longueur c des côtés d'un cube inscrit à $\mathscr{S}$ (c'est-à-dire dont chacun des sommets appartient à la sphère).

b) Même question pour un tétraèdre régulier (polyèdre à 4 sommets dont chacune des 4 faces est un triangle équilatéral).



a) La diagonale d'un carré vaut $c\sqrt{2}$. la diagonale d'un cube vaut $c\sqrt{3}$.

Donc : $\dfrac{R}{2} = c\sqrt{3}$. Ici $R = 1 \Rightarrow \dfrac{1}{2} = c\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{c = \dfrac{\sqrt{3}}{6}}$

b) Soit un tétraèdre régulier $ABCD$. Abaissons la hauteur AH sur la base BCD. BCD étant un triangle équilatéral, H est en mème temps l'orthocentre et le centre de gravité du triangle BCD. BH coupe DC en son milieu P. Soit O, le centre de la sphère $\mathscr{S}$ de rayon R et circonscrite au tétraèdre. $\Rightarrow \overline{OB} = \overline{OA} = R$

On a alors :

$$\Delta \text{ rect } BPC : \overline{BP} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2}{4}} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{BH} = \frac{c\sqrt{3}}{3} \text{ car } PB \text{ est aussi une médiane}$$

$$\Delta \text{ rect } AHP : \overline{AH} = \sqrt{\left(\frac{c\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{c\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{c\sqrt{6}}{3} \Rightarrow \overline{OH} = \frac{c\sqrt{6}}{3} - R$$

$$\Delta \text{ rect } OHB : c^2 = \left(\frac{c\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{c\sqrt{6}}{3} - R\right)^2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{6}}{3}.R$$

or ici $R = 1 \Rightarrow \boxed{c = \dfrac{2\sqrt{6}}{3}}$

Le 31 mars 2017

EXGSE137 - EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2016

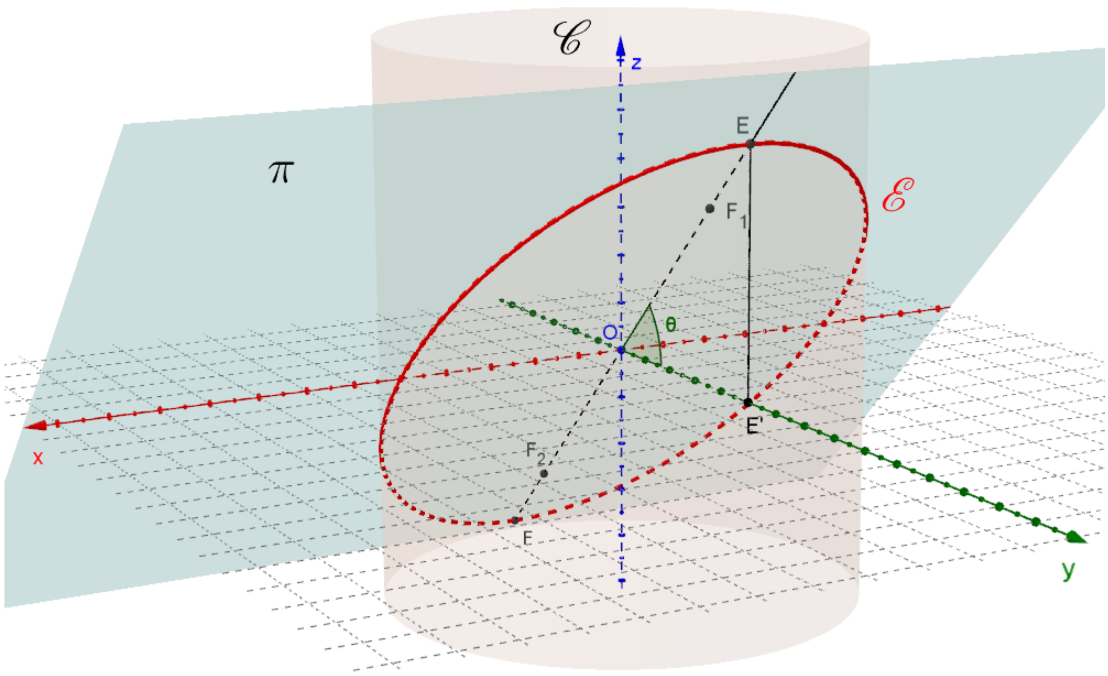
Dans l'espace euclidien rapporté au système d'axes orthonormés, *Oxyz*, soit $\mathscr{C}$ le cylidre de rayon unité centré sur l'axe *Oz* et π un plan passant par l'axe *Ox* et faisant un angle θ avec le plan *Oxy*. On considère l'éllipse $\mathscr{E}$ formée par l'intersection entre $\mathscr{C}$ et π.

Déterminez en fonction de θ :

a) la longueur a du grand axe de $\mathscr{E}$

b) la longueur b du petit axe de $\mathscr{E}$

c) les coordonnées des foyers de $\mathscr{E}$



a) Le petit axe est confondu avec l'axe des x et sa longueur est constante quelque soit $\theta \Rightarrow b = 2$

b) Le grand axe se trouve dans le plan Oyz et fait un angle θ avec l'axe Oy. Soit E l'intersection entre le cylindre $\mathscr{C}$ et le grand axe $\left(E_y > 0\right)$ et soit E' sa projection sur l'axe Oy. On a alors :

$$\overline{OE} = \frac{\overline{OE'}}{\cos\theta} = \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow a = \frac{2}{\cos\theta}$$

c) La distance c entre le centre O de l'ellipse et les foyers F_1 et F_2 est

$$c = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1} = \sqrt{\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}} = \tan\theta$$

On en déduit les coordonnées des foyers :

$$\begin{cases} F_1 = \left(0, \tan\theta.\cos\theta, \tan\theta.\sin\theta\right) = \left(0, \sin\theta, \dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) \\ F_2 = \left(0, -\tan\theta.\cos\theta, -\tan\theta.\sin\theta\right) = \left(0, -\sin\theta, -\dfrac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right) \end{cases}$$

Le 31 mars 2017

EXGSE138 - EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 1

Une sphère transparente $\mathscr{B}$ de rayon unité et de centre O est posé sur un plan horizontal Π qu'elle touche au point S. N est le point diamétralement opposé à S sur la surface de la sphère. Un plan Π', parallèle à Π et intersectant le segment de droite NS, est situé à une distance $1+x$ de N (avec $x \in [-1,1]$). Le plan Π' intersecte la surface de $\mathscr{B}$ en un cercle $\mathscr{C}'$.

L'*ombre* $\mathscr{C}$ de $\mathscr{C}'$ sur Π par rapport au point N est l'intersection de Π avec le cône circulaire infini de sommet N et contenant $\mathscr{C}'$. Autrement dit, $\mathscr{C}$ est l'ombre de $\mathscr{C}'$ sur Π si une source lumineuse ponctuelle est placée en N.

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair et précis[1].

(2) Déterminez en fonction de x le volume du cône circulaire de sommet N et de base $\mathscr{C}$ dans Π.

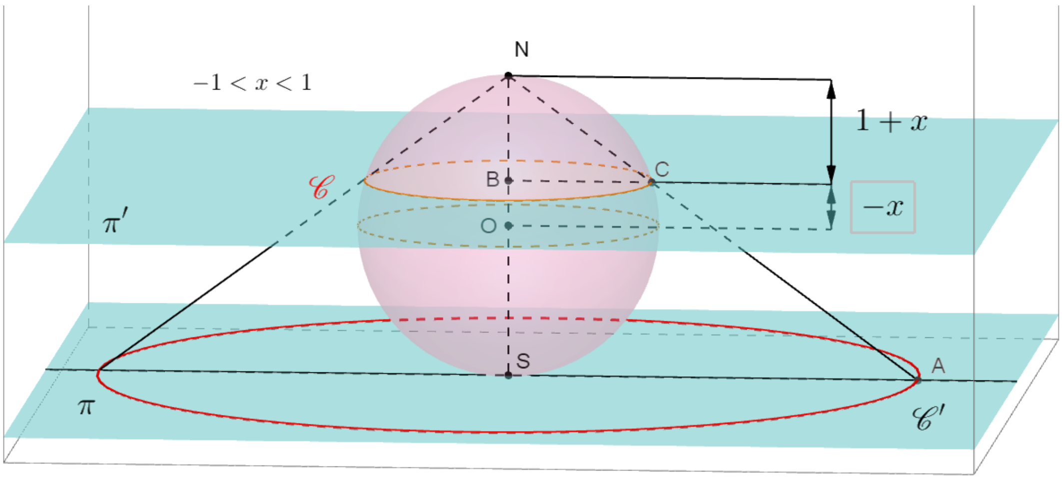
(3) Pour quelle valeur de x le volume de ce cône égale-t-il celui de la sphère?

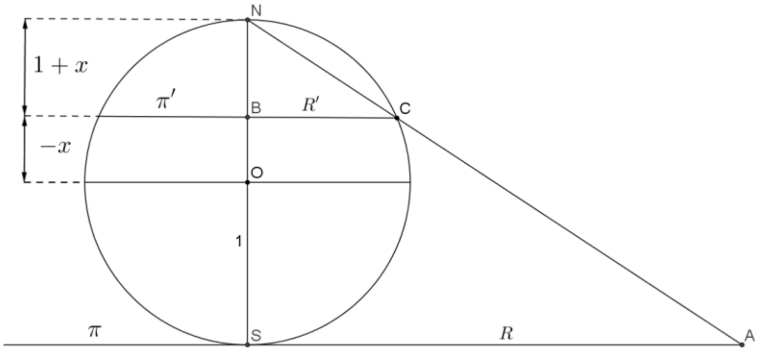
N.B. Veillez à justifier vos développements et mentionnez toutes les propriétés géométriques utilisées. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

---

[1]Vous pouvez visualiser le problème dans la section du plan vertical passant par la droite NS

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux





$(1)\ V_{\text{cône } NSA} = \frac{1}{3}\pi R^2.2$

Les triangles NSA et NBC sont semblables $\Rightarrow \frac{R}{R'} = \frac{2}{1+x}$

Le triangle OBC est rectangle $\Rightarrow R' = \sqrt{1-x^2}$

Donc : $R = \frac{2\sqrt{1-x^2}}{1+x} \Rightarrow V = \frac{1}{3}\pi\frac{4(1-x^2)}{(1+x)^2}.2 = \frac{8\pi}{3}.\frac{1-x}{1+x}$

$(2)\ \frac{8\pi}{3}.\frac{1-x}{1+x} = \frac{4\pi}{3}.1^3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Le 10 aout 2017

EXGSE139 - EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 2

Durant son enfance, le jeune magicien Houdini s'entraînait déjà à ses tours en plaçant sur sa tête un chapeau conique noir afin d'y cacher un lapin.
On considère que la tête du magicien est une sphère de rayon $4R$, et que le lapin se met en boule selon une sphère de rayon R posée au sommet de la tête de l'enfant. Le chapeau est un cône à base circulaire parfaitement ajusté au magicien, autrement dit, sur son bord circulaire, le cône est parfaitement tangent à la tête.

(1) Calculez, en fonction de R, la hauteur minimale de h du chapeau afin que ce dernier cache le lapin en restant ajusté à Houdini.

$\boxed{h =}$

(2) Calculez, en fonction de h, le volume V du chapeau.

$\boxed{V(h) =}$

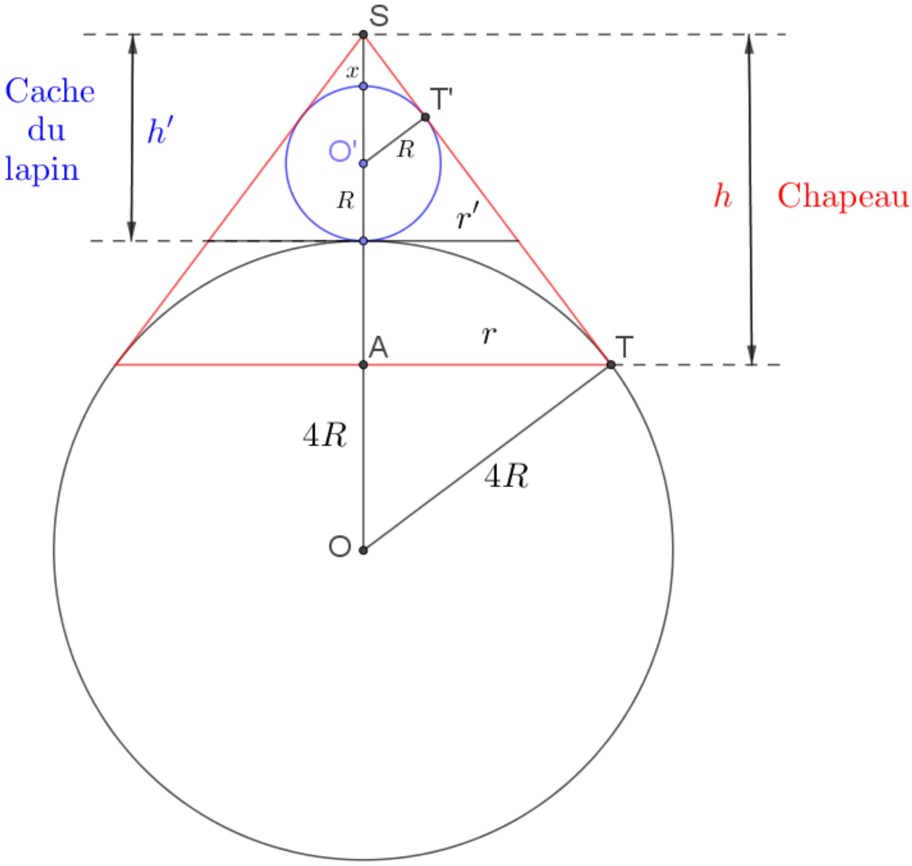
Ayant déterminé en (1) la hauteur optimale h de son chapeau, Houdini souhaite créer l'illusion que son chapeau est vide pour réaliser son tour de magie face à ses camarades.
Il place donc un disque noir $\mathscr{D}$ (amovible) à l'intérieur du chapeau, de sorte que ce disque soit percé en son centre par l'axe de symétrie du chapeau conique tout en étant perpendiculaire à ce dernier.
En outre, ce disque est tangent à la sphère du lapin dans la configuration décrite précédemment et son rayon est tel que ses bords touchent la surface du chapeau.
Grâce à ce stratagème, Houdini pourra rapidement montrer l'intérieur intégralement noir de son chapeau qui d'*apparence* semblera vide, afin que, plus tard, en suprimant le disque, il puisse fièrement faire apparaître son lapin.

(3) Sachant que le chapau à la hauteur h déterminée en (1), quel est le rapport entre le volume V' du chapeu contenu entre son sommet et le disque $\mathscr{D}$, et le volume total $V = V(h)$ déterminé en (2)?

$\boxed{\dfrac{V'}{V} =}$

Pour résoudre ce problème, il vous est aussi demandé d'illustrer le contexte par un dessin clair et précis, selon une section verticale plane du chapeau passant par son axe.
Pour ces trois questions, veuillez inscrire vos réponses finales dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/caculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires.

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux



1) Les triangles $SO'T'$ et SOT sont semblables. Donc $\frac{R}{4R}=\frac{R+x}{6R+x}\Rightarrow x=\frac{2}{3}R.$

Dans le triangle $STO,$ h est la projection orthogonale de ST sur l'hypoténuse $SO.$

Un théorème nous apprend que $\overline{ST}^2=h.\overline{SO}$ $\quad (i).$

Or $\overline{ST}^2=\overline{SO}^2-\overline{OT}^2$ $\quad (Pythagore)\quad (ii).$

(i) et (ii) impliquent que $: h=\frac{\overline{ST}^2}{\overline{SO}}=\overline{SO}-\frac{\overline{OT}^2}{\overline{SO}}=(6R+h)-\frac{16R^2}{6R+x}$

$\Rightarrow \boxed{h=\frac{64R}{15}}$

2) Le volume du cône $V(h)=\frac{\pi}{3}r^2h.$

Calculons r en fonction de $R.$

Dans le triangle rectangle relative à l'hypoténuse, on peut donc dire que $r^2=\overline{SA}.\overline{OA}$

Or $\overline{SA}=h$ et $\overline{OA}=\overline{SO}-h=6R+\frac{2}{3}R-h.$ Dès lors $r^2=h\left(\frac{20R}{3}-h\right)$ or $R=\frac{15h}{64}$

On obtient $r^2=\frac{9}{16}h^2\Rightarrow \boxed{V(h)=\frac{3\pi}{16}h^3}$

3) Le rapport d'homothétie entre les 2 volumes est égal à $\left(\frac{r'}{r}\right)^3.$

or les triangles SBC et SAT sont semblables. Dès lors

$$\frac{r'}{r}=\frac{x+2R}{h}=\frac{\frac{2}{3}R+2R}{\frac{64R}{15}}=\frac{5}{8}\Rightarrow \boxed{\frac{V'}{V}=\left(\frac{5}{8}\right)^3}$$