Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 14

EXGSE140 – EXGSE149

http://matheux.ovh

Jacques Collot
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

Septembre 2017

EXGSE140 - EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2017.

On considère un tétraèdre régulier PQRS de l'espace euclidien, et un plan π passant par les points P et Q.

Déterminez l'angle α entre le plan π et la base PQR du tétraèdre, sachant que ce plan divise le tétraèdre en deux parties de même volume.

Solution proposée par Jan Frans Broeckx

Le volume d'un tétraèdre, régulier ou pas, est

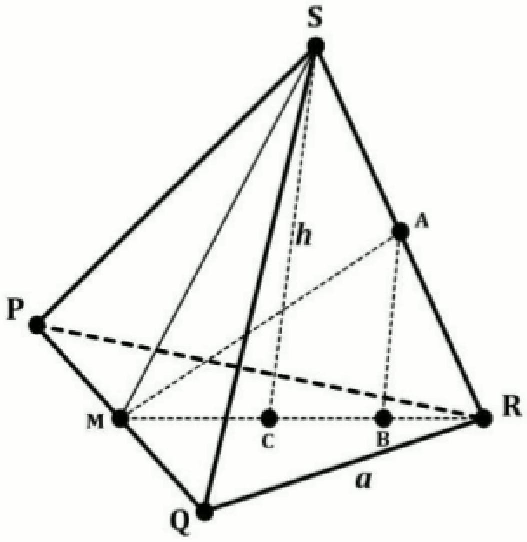
$$V = \frac{1}{3}(\text{aire base})(\text{hauteur})$$

Le tétraèdre PQRS est régulier de côté a. Soit M le milieu de l'arête [PQ]. La hauteur abaissée du sommet S sur la base PQR perce celle-ci en C, situé sur la hauteur [RM] de la base. Le volume du tétraèdre PQRS est

$$V_{PQRS} = \frac{1}{3}(\text{aire PQR}).h$$

Le plan π passant par les points P et Q coupe l'arête [SR] en un point A, d'où on abaisse la hauteur sur la base PQR qui perce celle-ci en B, situé également sur la hauteur [RM] de la base. Le volume du tétraèdre PQRA est

$$V_{PQRA} = \frac{1}{3}(\text{aire PQR}).\overline{AB}$$



Pour que $V_{PQRA} = \frac{1}{2}V_{PQRS}$, il faut que $\overline{AB} = \frac{h}{2}$ et par conséquent A est le milieu de l'arête [SR].

Dans un tétraèdre régulier, la droite reliant les milieux de deux arêtes opposées est perpendiculaire à chacune de ces arêtes. Par conséquent le triangle AMR est rectangle en A, et

$$\sin\alpha = \sin\widehat{AMR} = \frac{\overline{AR}}{\overline{MR}} = \frac{\frac{a}{2}}{\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \arcsin\frac{\sqrt{3}}{3} \cong 35{,}439°$$

7 septembre 2017

EXGSE141 - EPL, UCL, LLN, septembre 2017.

Soit un cube de longueur d'arête a. Les sommets d'une de ces faces sont nommés A, B, C et D (avec AB, BC, CD et DA définissant les 4 arêtes délimitant cette face). Les sommets de la face opposée sont désignés par A', B', C' et D', avec AA', BB', CC' et DD' décrivant 4 autres arêtes du cube.

(1) Calculer l'aire S du triangle $A'BD$ en fonction de a.

$$\boxed{S(a) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

(2) Calculez, en fonction de a, la hauteur h du tétraèdre $A'BDA$ calculée à partir de sa base $A'BD$.

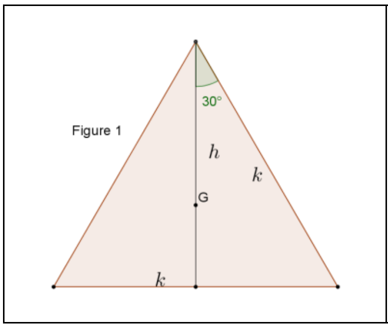
$$\boxed{h(a) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

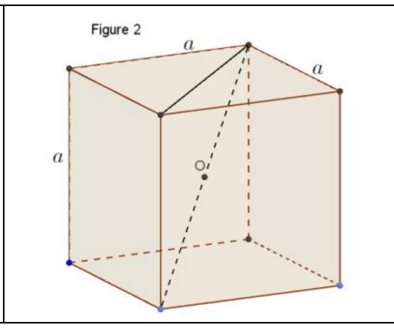
(3) Etant donné le point d'intersection A des diagonales $A'C, B'D, C'A$ et $D'B$, calculez le rapport entre le volume V_1 du tétraèdre $A'BDA$ et le volume V_2 du tétraèdre $A'BDO$.

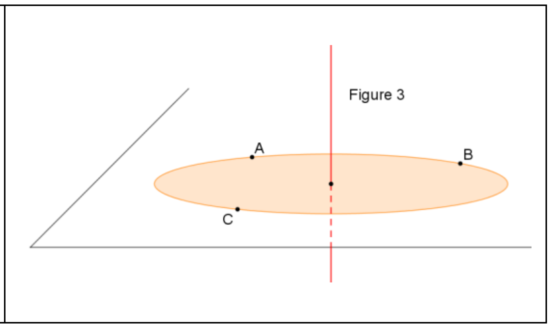
$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

N.B. Veillez à illustrer vos réponses sur un dessin clair et précis et justifiez vos développements. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration. Veuillez inscrire vos réponse finales dans les cadres prévus à cet effet et vos raisonnements/calculs ci-dessous ou sur feuilles supplémentaires (indiquez y votre nom/prénom).

Solution proposée par Louis François







Rappel de quelques propriétés

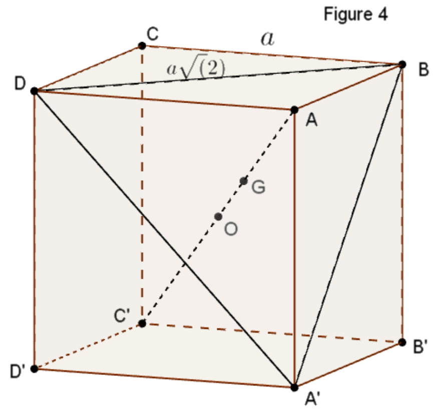
(A) Figure 1. Dans un triangle équilatéral de côté k, la hauteur vaut $h=\dfrac{k\sqrt{3}}{2}$ et l'aire $A=\dfrac{k^2\sqrt{3}}{4}$

Toute hauteur est également madiane, médiatrice et bissectrice.

Ces droites se coupent en G, centre de gravité du triangle.

(B) Figure 2. Dans un cube de côté a, la diagonale d'une face vaut $a\sqrt{2}$, et une diagonale du cube vaut $a\sqrt{3}$. Les quatre diagonales se coupent en leur milieu commun O, centre du cube.

(C) Figure 3. Le lieu des points équidistants de trois points non alignés est la droite orthogonale au plan défini par ces trois points, et passant par le centre du cercle circonscrit à ces points.



(1) $\Delta(A'BD)$ est équilatéral de côté $a\sqrt{2}$ et d'aire $A=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. Voir (A)

(2) Comme A est à la même distance de D, B et A', la projection orthogonale de A sur (DBA') est G le centre du $\Delta(DBA')$ (voir (C)) $\Rightarrow h(a)=\overline{AG}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot h(a)=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a^3}{6}$$

(3) Le centre O du cube est à la même distance de D, B et A'. Donc O, A et G sont alignés (voir (B) et (C)). La hauteur h_2 du tétraèdre $A'BDO$ vaut :

$$h_2=\overline{OG}=\overline{OA}-\overline{AG}=\frac{a\sqrt{3}}{2}-\frac{a\sqrt{3}}{3}=\frac{a\sqrt{3}}{6}=\frac{h(a)}{2}$$

Et donc $V_2=\dfrac{1}{3}\cdot h_2\cdot A=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\cdot\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{a^3}{12}$

Les deux tétraèdres ont la même base, le rapport des volumes est donc celui des hauteurs.

$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{h(a)}{h_2}=2$$

Remarques de Nicole Berckmans

(1) Si on ne trouve pas les deux hauteurs par la géométrie synthétique, on peut "parfois" travailler en géométrie analytique. Donnons des coordonnées en supposant C' l'origine du repère, $\overrightarrow{C'D'}$ l'axe des x, $\overrightarrow{C'B'}$ l'axe des y et $\overrightarrow{C'C}$ l'axe des z.

Le plan $D(a,0,a)\,B(0,a,a)\,A'(a,a,0)$ a pour équation $x+y+z=2a$. La distance de $A(a,a,a)$ à ce plan est $\dfrac{|a+a+a-2a|}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{3}=h(a)$.

La distance de $O\left(\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2},\dfrac{a}{2}\right)$ vaut $\dfrac{\left|\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{2}-2a\right|}{\sqrt{3}}=\dfrac{a}{2\sqrt{3}}=\dfrac{a\sqrt{3}}{6}=\dfrac{h(a)}{2}$

(2) Si on veut connaître les coordonnées de G centre de gravité du triangle $A'(0,a,0)\,B(0,a,0)\,D(a,0,a)$, on sait que $\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$$\Rightarrow G=\frac{A'+B+D}{3}=\frac{1}{3}(2a,2a,2a)$$

$$\Rightarrow h(a)=\overrightarrow{AG}=\sqrt{\left(a-\frac{2}{3}a\right)^2+\left(a-\frac{2}{3}a\right)^2+\left(a-\frac{2}{3}a\right)^2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$

(3) Le volume du tétraèdre $A'BDA=\dfrac{1}{3}$ le volume du prisme $DBB'D'$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\text{ volume du cube }=\frac{1}{6}a^3$$

5 octobre 2017

EXGSE142 - – POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2015

Solution proposée par Martin Scohier

Le 28 janvier 2016

EXGSE143 - EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 2.

Solution proposée par Louis François

Le 11 septembre 2016

EXGSE144 - EPL, UCL, LLN, juillet 2016 série 1.

Solution proposée par Nicole Berckmans

---

16 octobre 2016

EXGSE145 - POLYTECH, Umons, Mons, juillet 2016

Solution proposée par Fabienne Zoetard

Figure 1

Figure 2

Le 24 mars 2017

EXGSE146 - EPB, ULB, Bruxelles, juillet 2016.

Le 31 mars 2017

EXGSE147 - EPB, ULB, Bruxelles, septembre 2016

Le 31 mars 2017

EXGSE148 - EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 1

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux

---

Le 10 aout 2017

EXGSE149 - EPL, UCL, LLN, juillet 2017 série 2

Solution proposée par Nicole Berckmans, Louis François et Marc Decoux

---

Le 10 aout 2017

8

8