

**Exercices résolus de mathématiques.**

# **Géométrie synthétique dans l'espace**

## **GSE 3**

**EXGSE030 – EXGSE039**

<http://www.matheux.c.la>

Jacques Collot

1 avril 03

## EXGSE030 – Mons, questions-types 2000-2001.

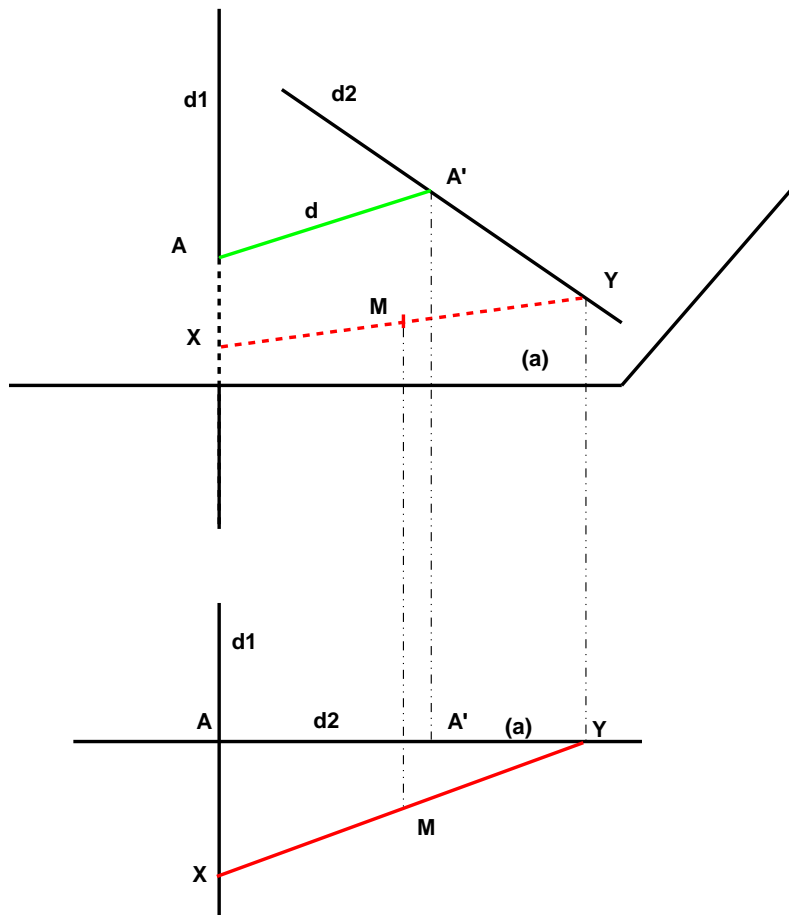
Dans l'espace, on considère un plan  $(a)$  et une droite  $(d1)$  perpendiculaire à ce plan et passant par un point  $A$  de ce plan. Une seconde droite  $(d2)$  appartient au plan  $(a)$ , mais ne passe pas par  $A$ . Soit  $d$  la distance de ce point  $A$  à  $(d2)$ .

Un segment de longueur constante s'appuie par ses extrémités sur  $(d1)$  et  $(d2)$  ; les extrémités de ce segment se déplacent en glissant le long de  $(d1)$  et  $(d2)$ . Le segment  $d$  se déplace donc dans l'espace.

On appelle  $M$  le point milieu de ce segment.

On demande :

- de déterminer dans quel plan se déplace le point  $M$ .
- de déterminer, pour chaque position de la droite, à quelle hauteur se situe le point  $M$  par rapport au plan  $(a)$ .



Il faut bien sûr supposer que  $L > d$ .

Sur la figure, on a représenté la situation en perspective et en projection.

Soit  $x$ , l'extrémité de  $L$  qui s'appuie sur  $(d1)$  et  $y$ , l'extrémité qui s'appuie sur  $(d2)$ .

En examinant la projection, il est immédiat que le point  $M$  se déplace dans le plan médiateur de  $d$ .

Si on considère que  $x$  définit également la distance  $Ax$ ,

on voit que la hauteur du point  $M$  par rapport au plan  $(a)$  est  $\frac{x}{2}$ .

On notera que les valeurs extrêmes de  $x$  sont :

$$-\sqrt{L^2 - d^2} \leq x \leq \sqrt{L^2 - d^2}$$

## EXGSE031 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit un parallélogramme ABCD appartenant à un plan P1.

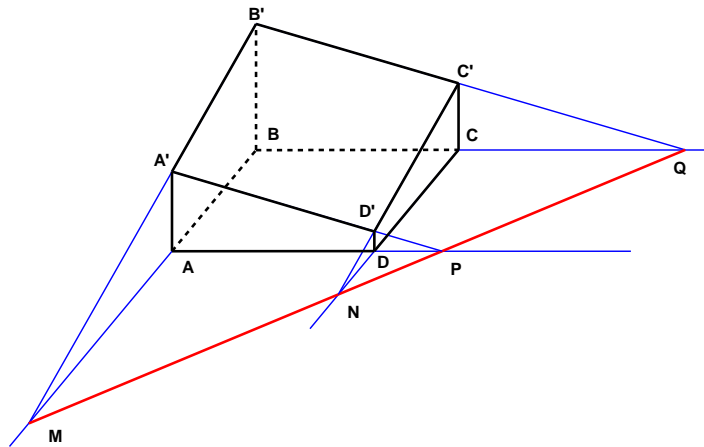
Les côtés de ce parallélogramme sont tels que  $|AB| = 2$  et  $|AD| = 1$  et l'angle  $BAD = 60^\circ$

Par chacun des sommets du parallélogramme, on mène une droite perpendiculaire à P1.

Un second plan P2 distinct de P1 coupe ces quatre droites en les points A', B', C' et D'.

Démontrer que A'B'C'D' est un parallélogramme.

Déterminer la relation liant AA', BB', CC' et DD'.



- a)  $AA', BB', CC'$  et  $DD'$  sont  $\perp$  à  $P1$
- Les plans  $AA'DD'$  et  $BB'CC'$  sont parallèles.
  - Le plan  $P2$  est donc coupé par des plans parallèles
  - $A'D' \parallel B'C'$
- De même,  $A'B' \parallel C'D'$
- $A'B'C'D'$  est un parallélogramme.

b)  $AA' \parallel DD' \rightarrow \frac{AA'}{DD'} = \frac{A'D'}{AD}$

$BB' \parallel CC' \rightarrow \frac{BB'}{CC'} = \frac{B'C'}{BC}$

or  $\frac{A'D'}{AD} = \frac{B'C'}{BC}$  (car  $AD = BC$  et  $A'D' = B'C'$ )

→  $\frac{AA'}{DD'} = \frac{BB'}{CC'}$

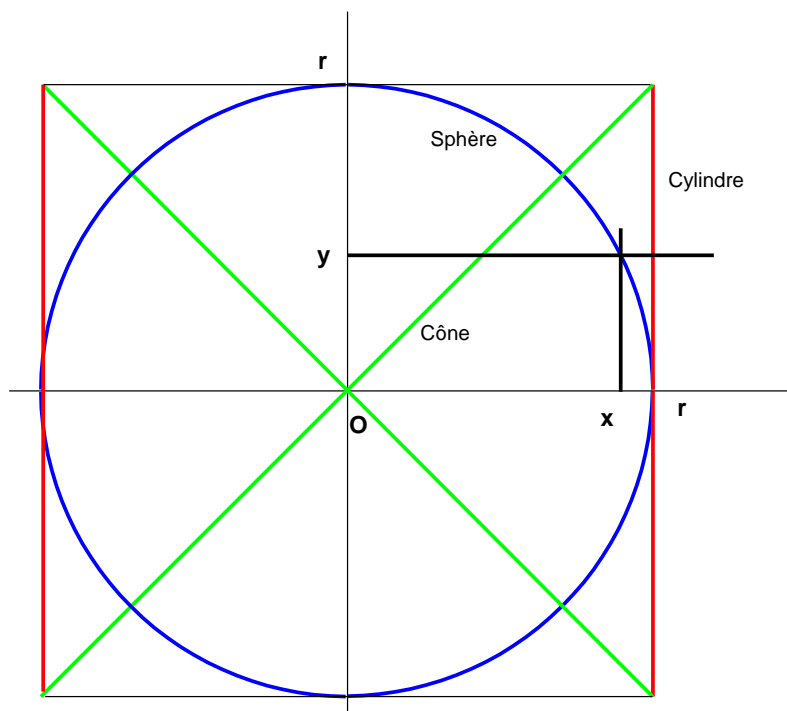
## EXGSE032 – Mons, questions-types 2000-2001.

On considère un cylindre de révolution circonscrit à une sphère et le double cône dont le sommet est le centre de la sphère, les deux bases étant celles du cylindre.

On coupe les trois corps (cylindre, sphère et double-cône) par un plan perpendiculaire à leur axe commun.

Montrez que l'aire de la section totale dans le cylindre est égale à la somme des deux autres.

Si on note  $R$  le rayon de sphère, calculez le volume du cylindre et celui du double-cône.



*Coupons les solides par un plan passant par l'axe du cylindre.*

*a) Vu dans ce plan,*

*le cône a pour équation:  $y = x$*

*la sphère a pour équation:  $x^2 + y^2 = R^2$*

*le cylindre a pour équation:  $x = R$*

*Si maintenant, on coupe par un plan perpendiculaire à l'axe  
les aires sont :*

$$S_{\text{cylindre}} = \pi R^2$$

$$S_{\text{cône}} = \pi y^2$$

$$S_{\text{sphère}} = \pi (R^2 - y^2)$$

*On vérifie immédiatement que :*

$$S_{\text{cylindre}} = S_{\text{cône}} + S_{\text{sphère}}$$

*b) De même:*

$$V_{\text{cylindre}} = 2R \cdot \pi R^2 = 2\pi R^3$$

$$V_{\text{cône}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \pi R^2 \cdot R = 2\pi R^3$$

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

*On vérifie immédiatement que :*

$$V_{\text{cylindre}} = V_{\text{cône}} + V_{\text{sphère}}$$

### NOTE

*Archimède avait montré que les volumes du double cône,  
de la sphère et du cylindre sont dans les rapports 1 : 2 : 3.*

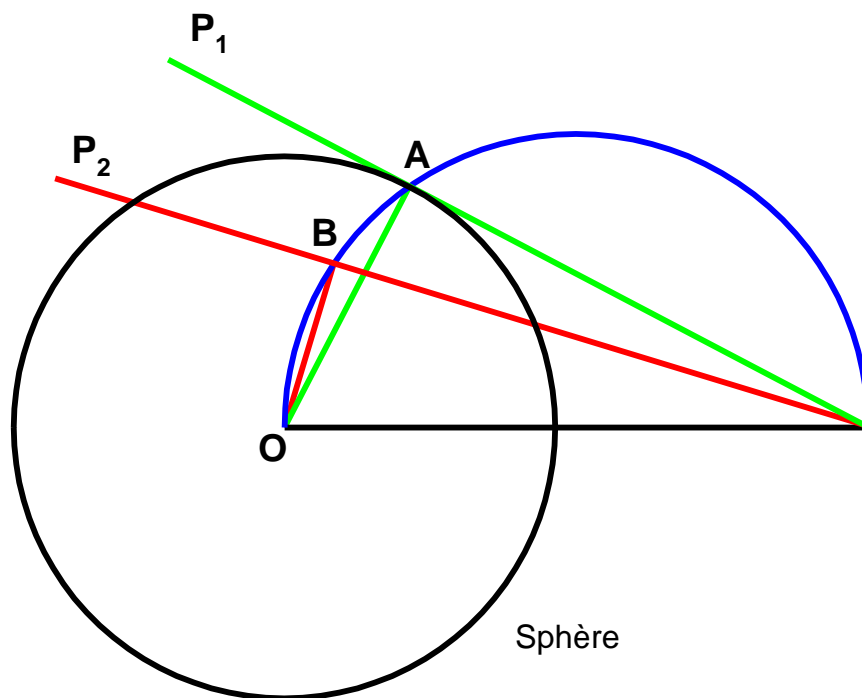
*Ce que nous vérifions bien ici.*

### EXGSE033 – Mons, questions-types 2000-2001.

Soit une sphère de centre  $O$  et un point  $I$  situé à l'extérieur de celle-ci à une distance  $1$  de  $O$ .

On demande :

- Quel est le lieu des centres des cercles sections de cette sphère avec l'ensemble des plans passant par  $I$ .
- De calculer le volume engendré par la rotation autour de  $OI$ , du triangle équilatéral dont  $OI$  est un des côtés (Le volume sera calculé en fonction de  $1$ ).



a) Coupons la sphère par un plan  $\pi$  passant par  $OI$ .

Considérons les plans  $P_1$  et  $P_2$  perpendiculaires au plan  $\pi$  et passant par  $I$ .

Le plan  $P_1$  est tangent à la sphère en  $A$  (avec  $A \in \pi$ ).

Dans le plan  $\pi$ ,  $OA$  est perpendiculaire au plan  $P_1$

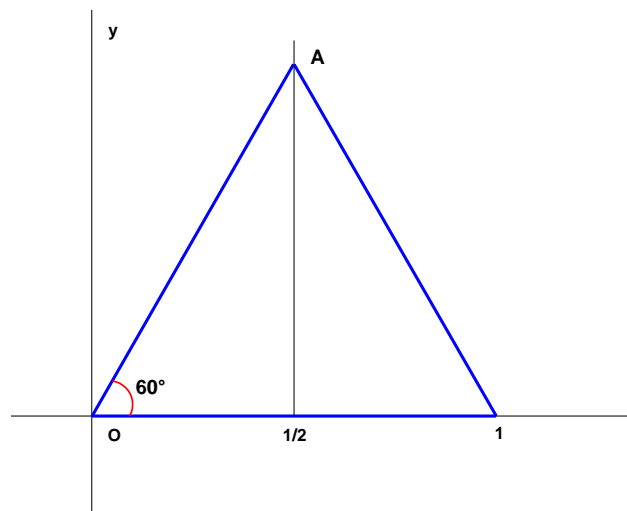
Le plan  $P_2$  est sécant à la sphère.

Le plan  $P_2$  coupe la sphère selon un cercle dont le centre est  $B$  (avec  $B \in \pi$ )

$OB$  est perpendiculaire au plan  $P_2$

On voit que  $A$  et  $B$  sont situés sur le cercle de diamètre  $OI$ .

Par extrapolation, on en déduit que le lieu recherché est la portion de la sphère de diamètre  $OI$ , située à l'intérieur de la sphère donnée.



b) En se référant à la deuxième figure, on voit que la droite  $OA$

a pour équation  $y = \sqrt{3} x$

Le volume recherché est donné par :

$$V = 2.\pi.\int_0^{\frac{1}{2}} (\sqrt{3} x)^2 dx = 2.\pi.3.\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

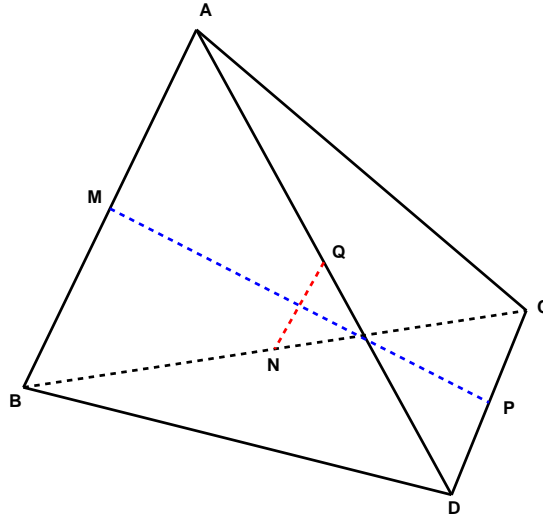


## EXGSE034 – Liège, 1997.

Soient ABCD quatre points de l'espace et soient MNPQ les milieux respectifs des segments AB, BC et DA.

Démontrer que :

$$2\left(|\overline{MP}|^2 + |\overline{NQ}|^2\right) = |\overline{AC}|^2 + |\overline{BD}|^2$$



Comme  $Q$  est le milieu de  $AD$  et  $P$  le milieu de  $CD$ ,

$QP$  est parallèle à  $AC$  et vaut  $\frac{AC}{2}$ .

De même :

$$MQ = \frac{BD}{2} \quad MN = \frac{AC}{2} \quad NP = \frac{BD}{2}$$

On a:

$$\overline{MP} = \overline{MQ} + \overline{QP} \quad \text{et} \quad \overline{NQ} = \overline{NP} + \overline{PQ}$$

$$|\overline{MP}|^2 = |\overline{MQ}|^2 + 2\overline{MQ} \cdot \overline{QP} + |\overline{QP}|^2$$

$$|\overline{NQ}|^2 = |\overline{NP}|^2 + 2\overline{NP} \cdot \overline{PQ} + |\overline{PQ}|^2$$

$$|\overline{MP}|^2 + |\overline{NQ}|^2 = 2\left(\frac{|\overline{BD}|}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{|\overline{AC}|}{2}\right)^2 + 2\overline{PQ}(\overline{NP} + \overline{QM})$$

Le dernier terme est nul car  $\overline{NP}$  et  $\overline{QM}$  sont parallèles et de sens contraires.

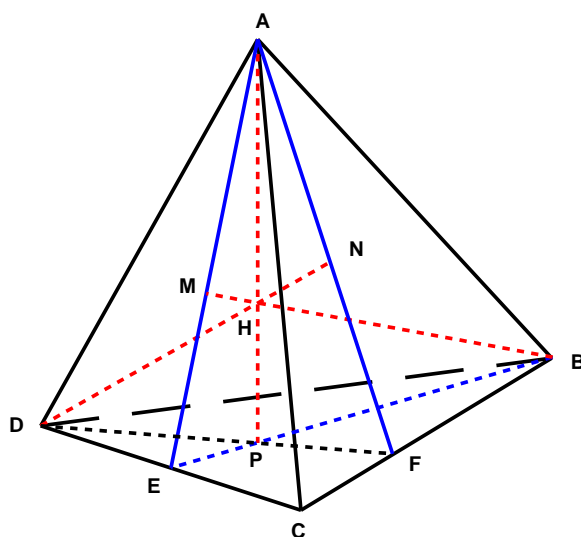
Finalement :

$$2\left(|\overline{MP}|^2 + |\overline{NQ}|^2\right) = |\overline{AC}|^2 + |\overline{BD}|^2$$

## EXGSE035 – Liège, juillet 2001.

On considère un tétraèdre régulier (c'est-à-dire dont tous les côtés sont égaux)  
Soit E le milieu du côté [C, D].

- Montrer que la droite CD est perpendiculaire au plan ABE.
- Montrer que la hauteur du triangle ABE issue de A est perpendiculaire à la face BCD et que la hauteur du triangle ABE issue de B est perpendiculaire à la face ACD.  
(Rappelons qu'une hauteur du tétraèdre est une droite passant par un des sommets et perpendiculaire à la face opposée. Le pied d'une hauteur est son intersection avec la face à laquelle elle est perpendiculaire.)
- Montrer que les pieds des hauteurs du tétraèdre sont les orthocentres des faces correspondantes.
- En déduire que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes.



a)  $\triangle ADC$  est équilatéral  $\rightarrow AE$  est hauteur, donc  $AE \perp CD$   
De même,  $BE$  est hauteur du  $\triangle BCD \rightarrow BE \perp CD$   
 $\rightarrow CD \perp$  au plan  $ABE$

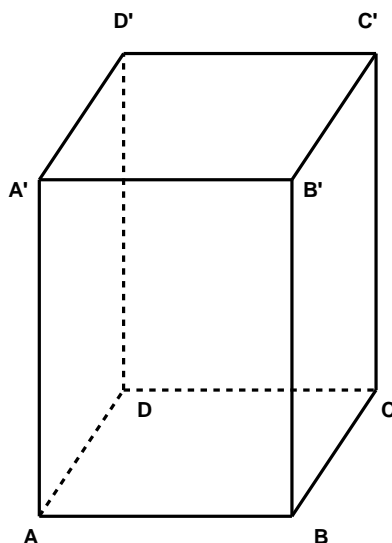
b)  $AP$  hauteur du  $\triangle ABE \rightarrow AP \perp EB$ .  
Et comme  $AP \in$  au plan  $ABE$ ,  $AP \perp$  à la face  $BCD$   
 $AM$  hauteur du  $\triangle ABE \rightarrow AM \perp AE$ .  
Et comme  $AP \in$  au plan  $ABE$ ,  $AM \perp$  à la face  $ACD$

c) Soit par exemple la face  $BCD$ .  
Plan  $APD \perp BC \rightarrow AP$  est une hauteur du  $\triangle BCD$   
 $\rightarrow P$  est l'orthocentre du  $\triangle BCD$   
Idem pour les autres faces :  $M$  orthocentre de  $ACD$ ,  $N$  orthocentre de  $ABC$ .

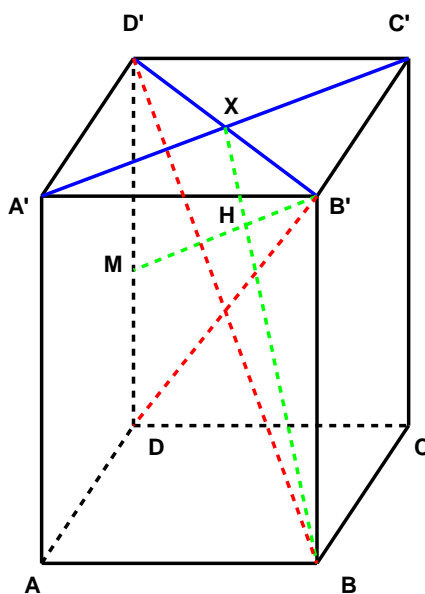
d)  $BM \perp AE \rightarrow BM$  est une hauteur du  $\triangle ABE$ .  
 $\rightarrow H \equiv AP \cap AE$  est l'orthocentre du  $\triangle ABE$ .  
 $DN \perp AF \rightarrow DF$  est une hauteur du  $\triangle ADF$ .  
Mais comme les  $\triangle ABE$  et  $ADF$  sont égaux (tétraèdre régulier), et que ces deux triangles ont une hauteur commune ( $AP$ ),  $H$  est aussi l'orthocentre du  $\triangle ADF$   
Même raisonnement pour la quatrième hauteur relative à la face  $ADB$ .  
Conclusion : Les quatres hauteurs sont concourantes.

## EXGSE036 – Liège, septembre 2001.

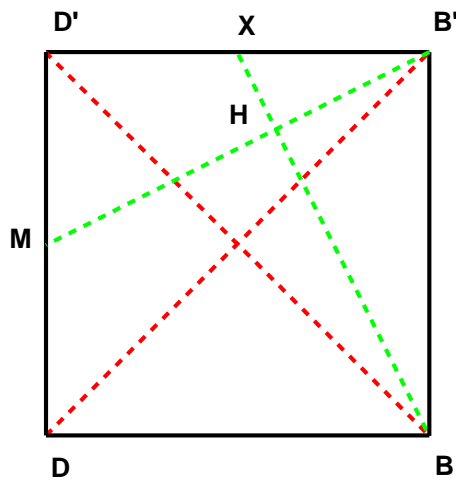
On considère un prisme droit  $ABCD A'B'C'D'$ , à base carrée  $ABCD$ .



- Si  $X$  est le centre (intersection des diagonales) de la face  $A'B'C'D'$ , la hauteur du triangle  $BXB'$  issue de  $B'$  est perpendiculaire au plan  $A'C'B$ .
- Prouver que si les diagonales  $BD'$  et  $B'D$  sont perpendiculaires, alors la perpendiculaire abaissée de  $B'$  sur le plan  $A'C'B$  passe par le milieu de l'arête  $DD'$ .



$a) A'C' \perp D'B' \rightarrow A'C' \perp \text{plan } XB'B$   
 $\rightarrow HB'$  est orthogonal au plan  $XB'B$   
 et comme  $HB' \perp XB \rightarrow HB' \perp \text{plan } A'C'B$ .



$b)$  Reprenons le plan  $D'DBB'$  dans la figure 3.  
 Si  $BD' \perp B'D \rightarrow D'DBB'$  est un carré.  
 $\angle XBB' = \angle MB'D'$  car angles à côtés perpendiculaires.  
 $\rightarrow \triangle XBB' = \triangle MD'B'$  et comme  $DD' = D'B'$ ,  $M$  est le milieu de  $DD'$ .

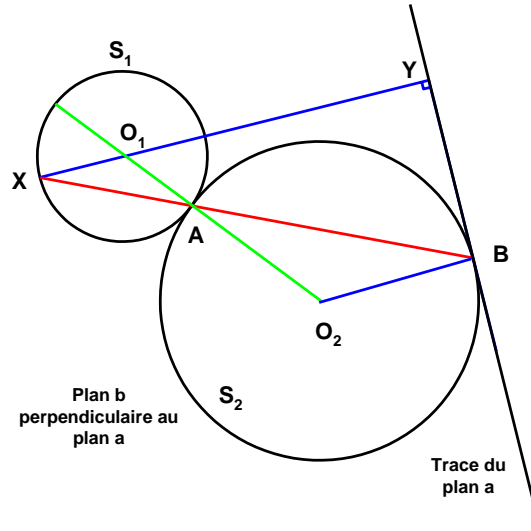
---

Résolu le 19 mars 2003, Modifié le 7 juillet 2004

## EXGSE037 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Soit une sphère  $S_1$  et un plan extérieur à cette sphère. On construit une sphère  $S_2$ , tangente à la fois au plan  $a$  et à la sphère  $S_1$ .

Démontrez que la droite qui joint les points de contact de  $S_1$  avec  $S_2$  et de  $S_2$  avec  $a$  passe par l'une des extrémités du diamètre de la sphère perpendiculaire au plan  $a$ .



Soient  $O_1$  et  $O_2$  les centres respectifs des sphères  $S_1$  et  $S_2$ . Travaillons dans le plan contenant la droite  $O_1O_2$  et perpendiculaire au plan  $a$ .

Appelons  $A$  et  $B$  les points de contact de  $S_2$  avec  $S_1$  et de  $S_2$  avec  $a$ .

Appelons  $Y$  le pied de la perpendiculaire abaissée de  $O_1$  au plan  $a$  et  $X$  le point de percée de cette droite dans la sphère  $S_1$ .

La droite  $O_1Y$  est parallèle à  $O_2B$ , car ces deux droites sont perpendiculaires au plan  $a$ .

Par suite, l'angle  $XO_1A$  est égal à  $AO_2B$  et les triangles  $XO_1A$  et  $AO_2B$  sont semblables (un angle égal et leurs deux côtés adjacents sont proportionnels).

$$\frac{O_1A}{O_2A} = \frac{O_1X}{O_2B} = \frac{R}{r}$$

( $R$  et  $r$  étant les rayons respectifs des sphères  $S_1$  et  $S_2$ )

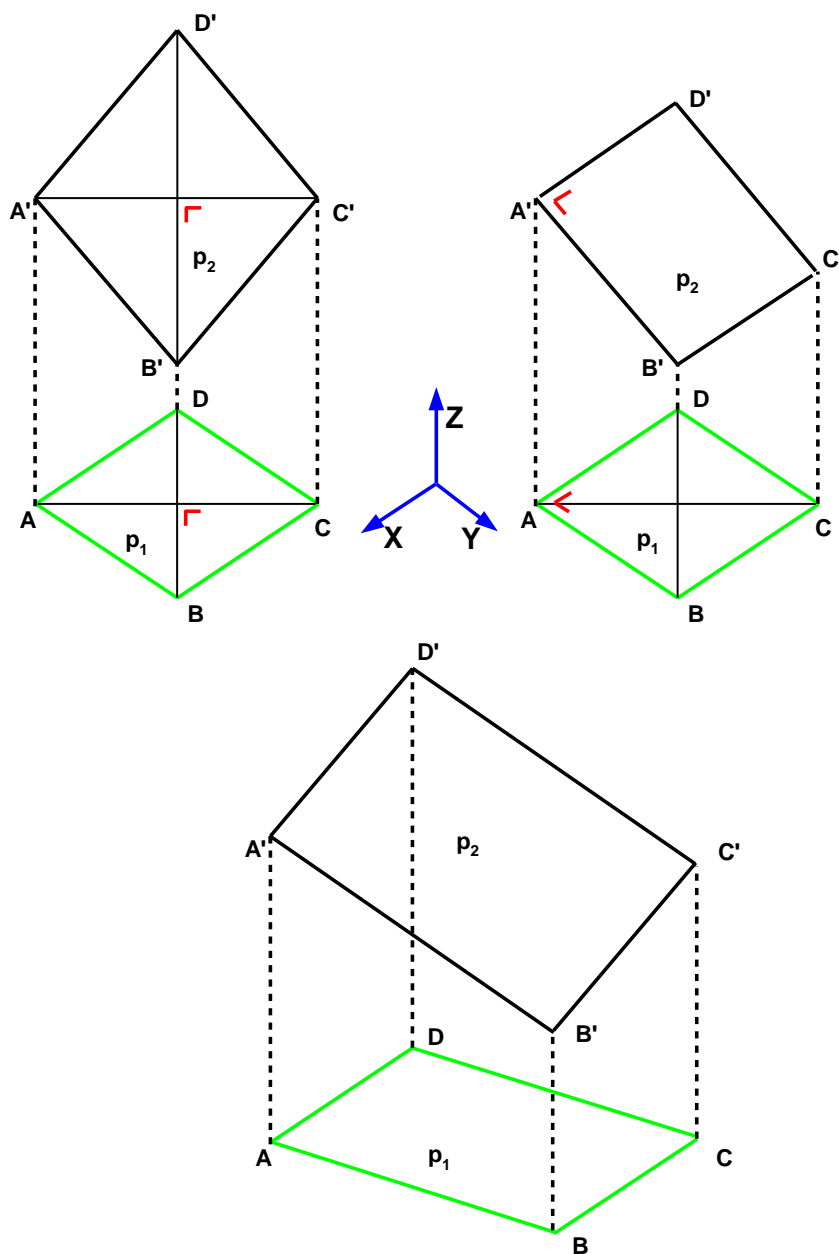
Il en résulte que les angles  $XAO_1$  et  $O_2AB$  sont égaux et que  $X$  est sur le prolongement de  $AB$ .

## EXGSE038 – Mons, questions posées de 1995 à 1998.

Soit  $p_1$  et  $p_2$  deux plans de l'espace qui ne sont pas perpendiculaires entre eux.  
Soit dans le plan  $p_1$ , un carré  $ABCD$  que l'on projette orthogonalement sur  $p_2$   
 $A'B'C'D'$ .

Déterminer quelles conditions imposées pour que

- $A'B'C'D'$  soit un losange
- $A'B'C'D'$  soit un rectangle
- $A'B'C'D'$  soit un carré
- $A'B'C'D'$  soit un parallélogramme



On sait que pour qu'un angle droit se conserve par projection orthogonale sur un plan, il faut qu'un de ses côtés soit parallèle à ce plan.

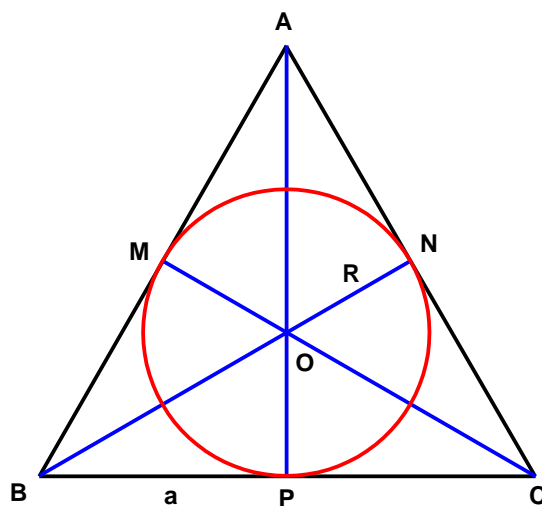
- a) Les diagonales d'un losange  $A'B'C'D'$  sont perpendiculaires entre elles, d'où la condition  $A'C'$  parallèle à  $p_1$  cas de la première figure ou  $D'B'$  est parallèle à  $p_1$ .
- b) Les côtés d'un rectangle sont perpendiculaires entre eux. D'où la condition  $A'D'$  ( $B'C'$ ) parallèle à  $p_1$  (cas de la seconde figure) ou  $A'B'$  ( $D'C'$ ) parallèle à  $p_1$ .
- c) Pour un carré, une des diagonales et l'un des côtés doivent être parallèles à  $p_1$ . Par conséquent, le plan  $p_2$  est parallèle à  $p_1$ .
- d) Les côtés d'un parallélogramme sont parallèles 2 à 2 et leurs angles ne sont pas droits (troisième figure). Les plans  $ADD'A'$  et  $BCC'B'$  sont parallèles entre eux. Les plans  $ABB'A'$  et  $DCC'D'$  sont parallèles entre eux. Les plans  $ADD'A'$  et  $BCC'B'$  sont coupés par  $p_2$  selon 2 parallèles  $A'D'$  et  $B'C'$  qui ne sont pas parallèles à  $p_1$ . Les plans  $ABB'A'$  et  $DCC'D'$  sont coupés par  $p_2$  selon 2 parallèles  $A'B'$  et  $D'C'$  qui ne sont pas parallèles à  $p_1$ . Il n'y a donc pas de conditions particulières à imposer.



## EXGSE039 – Bruxelles, juillet 2000

Par rotation d'un triangle équilatéral et de sa circonférence inscrite, autour d'une hauteur, on obtient un cône et sa boule inscrite.

Démontrer que si le volume de la boule est de quatre litres celui du cône en vaut neuf.



$$\text{Soit } a \text{ la longueur du côté} \rightarrow BH = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$\rightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{6}$  car le centre du cercle inscrit d'un triangle équilatéral est aussi le centre de gravité

$$\text{Sphère : } V_s = \frac{4}{3}\pi \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^3$$

$$\text{Cône : } V_c = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$\rightarrow \frac{V_c}{V_s} = \frac{9}{4}$$