Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 4

EXGSE040 – EXGSE049

http://www.matheux.be.tf

Jacques Collot

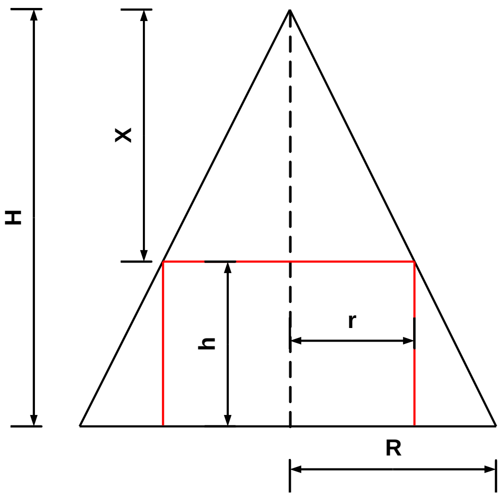
Mars 04

EXGSE040 – Louvain, juillet 2000, série 1.

Soit un cône circulaire droit dont le rayon de la base est R et dont la hauteur est H. Ce cône est circonscrit à un cylindre.

On vous demande :

- De déterminer X, la hauteur du cône partiel qui surmonte le cylindre, pour que l'aire latérale du cône partiel soit égale à l'aire latérale du cylindre.
- D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



Les variables sont définies sur le schéma.

On a :

Aire latérale du cylindre : $A_{LC} = 2\pi rh$

Aire latérale du cône partiel : $A_{CP} = \pi r\sqrt{r^2 + X^2}$

$\rightarrow \; A_{LC} = A_{CP} \; \rightarrow \; 2\pi rh = \pi r\sqrt{r^2 + X^2} \; \rightarrow \; 4h^2 = r^2 + X^2$

Or $\dfrac{h}{r} = \dfrac{H}{R}$ et $X + h = H \rightarrow X^2 = 4\left(H - X\right)^2 - \dfrac{X^2 R^2}{H^2}$

$$\rightarrow \left(3 - \frac{R^2}{H^2}\right) X^2 - 8HX + 4H^2 = 0$$

$$\rightarrow X = \frac{4H \pm 2\sqrt{H^2 + R^2}}{3 - \dfrac{R^2}{H^2}}$$

1) $3-\dfrac{R^2}{H^2}=0$

L'équation devient : $-8HX+H^2=0 \quad \rightarrow \quad X=\dfrac{H}{2}$

2) $X=\dfrac{4H-2\sqrt{H^2+R^2}}{3-\dfrac{R^2}{H^2}}$ avec $\dfrac{R}{H}\neq\sqrt{3}$

2.1) X doit être plus grand que zéro.

Le numérateur N est positif si : $4H\geq 2\sqrt{H^2+R^2}$ donc si $\dfrac{R}{H}\leq\sqrt{3}$

Le dénominateur D est positif si : $3-\dfrac{R^2}{H^2}$ donc si $\dfrac{R}{H}\leq\sqrt{3}$

$X=\dfrac{N}{D}$ est donc toujours positif

2.2) X doit être plus petit ou égal à H

2.2.1) Soit $D>0$ (donc $\dfrac{R}{H}<\sqrt{3}$)

$$\frac{4H-2\sqrt{H^2+R^2}}{3-\dfrac{R^2}{H^2}}\leq H \rightarrow \ 4H-2\sqrt{H^2+R^2}\leq H\left(3-\frac{R^2}{H^2}\right)\rightarrow H+\frac{R^2}{H}\leq 2\sqrt{H^2+R^2}$$

$$\rightarrow \ H\left(1+\frac{R^2}{H^2}\right)\leq 2H\sqrt{1+\frac{R^2}{H^2}} \ \rightarrow 1+\frac{R^2}{H^2}\leq 4 \ \rightarrow \frac{R}{H}\leq\sqrt{3}$$

2.2.2) Soit $D<0$ (donc $\dfrac{R}{H}>\sqrt{3}$)

$$\frac{4H-2\sqrt{H^2+R^2}}{3-\dfrac{R^2}{H^2}}\leq H \rightarrow \ 4H-2\sqrt{H^2+R^2}\geq H\left(3-\frac{R^2}{H^2}\right)\rightarrow H+\frac{R^2}{H}\geq 2\sqrt{H^2+R^2}$$

$$\rightarrow \ H\left(1+\frac{R^2}{H^2}\right)\geq 2H\sqrt{1+\frac{R^2}{H^2}} \ \rightarrow 1+\frac{R^2}{H^2}\geq 4 \ \rightarrow \frac{R}{H}\geq\sqrt{3}$$

Donc il existe une solution : $0\leq X\leq H$

3) $X = \dfrac{4H + 2\sqrt{H^2 + R^2}}{3 - \dfrac{R^2}{H^2}}$ avec $\dfrac{R}{H} \neq \sqrt{3}$

3.1) X doit être plus grand que zéro.

Le numérateur N est toujours positif. Le dénominateur D est positif si : $3 - \dfrac{R^2}{H^2}$ donc si $\dfrac{R}{H} \leq \sqrt{3}$

$\rightarrow X = \dfrac{N}{D}$ est positif si $\dfrac{R}{H} \leq \sqrt{3}$

2.2) X doit être plus petit ou égal à H

En vertu du point 2.1), on ne doit étudier que le cas où $D > 0 \rightarrow 4H + 2\sqrt{H^2 + R^2} \leq H\left(3 - \dfrac{R^2}{H^2}\right)$

$\rightarrow 2\sqrt{H^2 + R^2} \leq -H - \dfrac{R^2}{H}$ Ce qui est impossible.

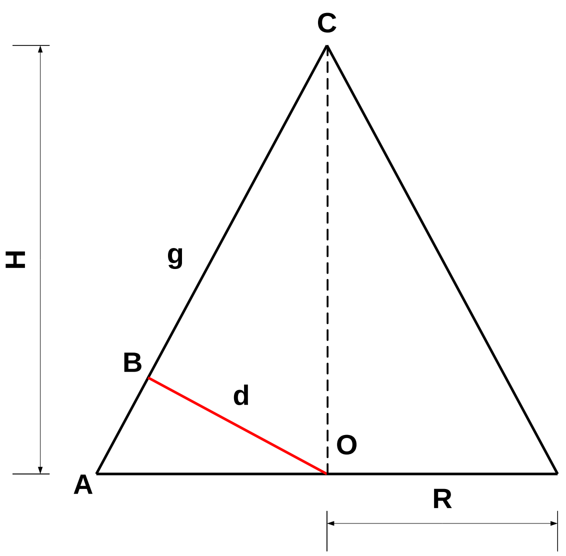
<u>Conclusion</u>

Une seule solution : $X = \dfrac{4H - 2\sqrt{H^2 + R^2}}{3 - \dfrac{R^2}{H^2}}$ avec $X = \dfrac{H}{2}$ si $\dfrac{R}{H} = \sqrt{3}$

EXGSE041 – Louvain, juillet 2000 série 2.

Soit un cône de révolution, on vous demande :

- D'exprimer le volume de ce cône en fonction de son aire latérale S_L et de la distance d entre le centre de la base et la génératrice.
- D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



Les variables sont définies sur le schéma.

On a :

Volume du cône : $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

Aire latérale du cône : $S_L = \pi R g$

On divise membre à membre : $\frac{V}{S_L} = \frac{1}{3}\frac{RH}{g}$

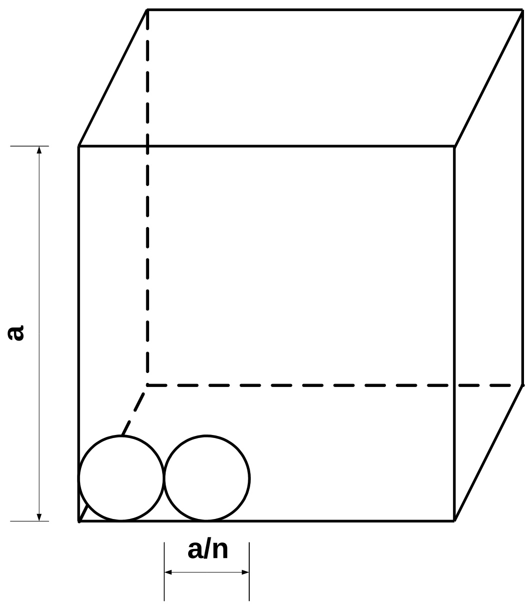
Les triangles rectangles ABO et AOC sont semblables car ils ont un angle à côtés perpendiculaires : $\rightarrow \frac{g}{R} = \frac{H}{d} \rightarrow d = \frac{RH}{g}$

Conclusion : $\boxed{V = \frac{1}{3} S_L d}$

EXGSE042 – Louvain, septembre 2000.

Soit un cube d'arête a. On remplit ce cube avec des sphères de diamètre a/n.
On vous demande :

- De déterminer n pour que la somme des volumes des sphères soit maximale.
- D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



Les variables sont définies sur le schéma.

On a :

Une couche comprend n^2 sphères

On met n souches, donc on met n^3 sphères dans le cube.

Volume d'un sphère : $V_S = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2n}\right)^3$

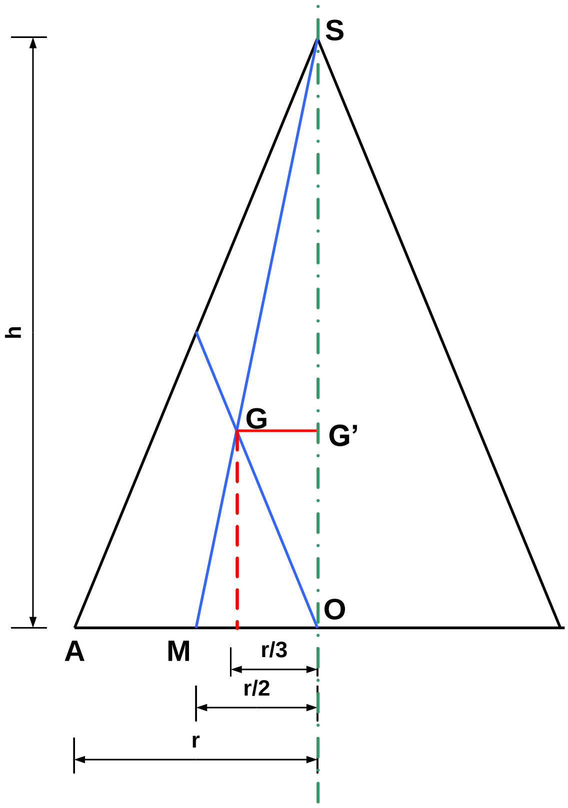
Volume des sphères : $V = n^3 . \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a}{2n}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi a^3$

La somme du volume des sphères est donc indépendant de n et est égal au volume de la sphère inscrite dans le cube.

EXGSE043 – Louvain, juillet 2001, série 1.

Soit un cône circulaire droit. On vous demande :

- D'exprimer le volume de ce cône en fonction de l'aire du triangle générateur et de la longueur de la circonférence engendrée par le point de concours des médianes de ce triangle.
- D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



Les variables sont définies sur le schéma. Le triangle générateur est le triangle AOS.

Surface du triangle : $S_\Delta = \frac{rH}{2}$

Comme G est au $\frac{2}{3}$ de la médiane SM, $GG' = \frac{2}{3}\frac{r}{2} = \frac{r}{3}$

Longueur de la circonférence générée par G : $L = 2\pi\frac{r}{3}$

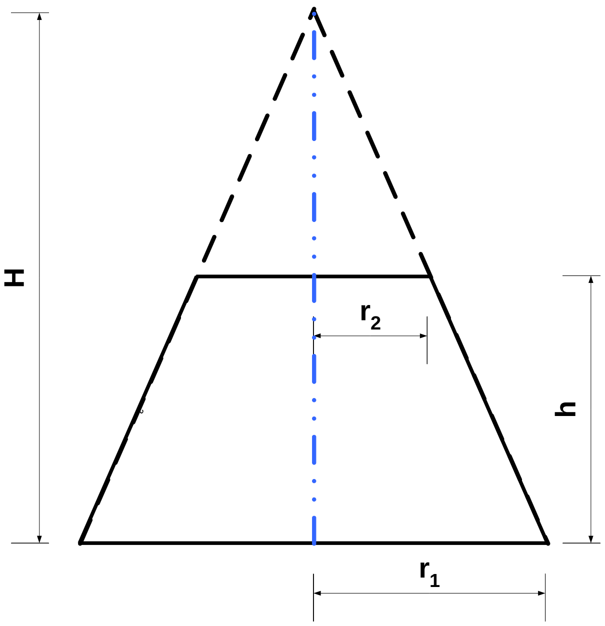
Volume du cône : $V_C = \frac{1}{3}\pi r^2 H = \frac{2\pi r}{3}\frac{rH}{2} = \boxed{L.S_\Delta}$

Note : Voir aussi : EXGSE045

EXGSE044 – Louvain, juillet 2001, série 2.

Soit un tronc de cône droit dont la hauteur est égale à quatre fois la différence des rayons des deux bases du tronc de cône. On vous demande :

- D'exprimer le volume du tronc de cône en fonction des deux sphères qui auraient pour rayon ceux des bases du tronc.
- D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



Les variables sont définies sur le schéma.

On a :

$h = 4(r_1 - r_2)$

Volumes des sphères : $V_1 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \quad (1)$ et $V_2 = \frac{4}{3}\pi r_2^3 \quad (2)$

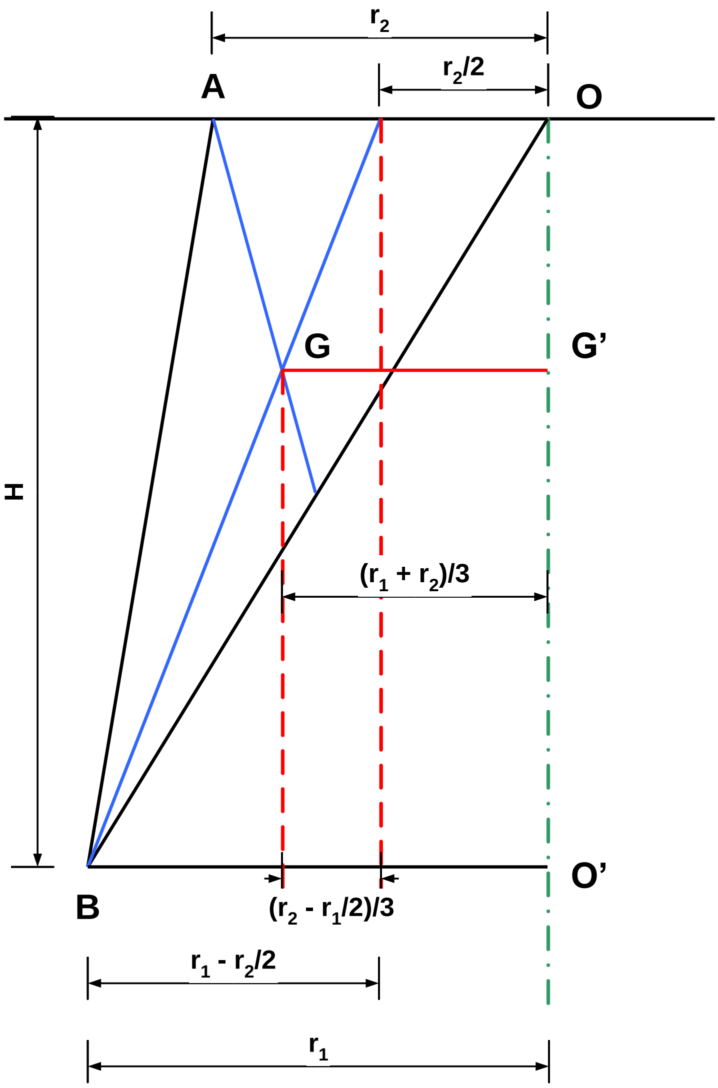
Volume du tronc de cône : $V_{TC} = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)h = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)4(r_1 - r_2)$

$\rightarrow V_{TC} = \frac{4}{3}\pi\left(r_1^3 - r_2^3\right) = \boxed{V_1 - V_2}$

EXGSE045 – Louvain, septembre 2001.

Soit dans un plan un triangle quelconque. Par un des sommets, on trace un axe qui ne traverse pas le triangle et qui est perpendiculaire à un ces côtés de ce sommet.
On vous demande :

- D'exprimer le volume engendré par la rotation du triangle autour de cet axe en fonction de l'aire du triangle et de la longueur de la circonférence que décrit son centre de gravité.
- D'expliquer votre démarche au moyen d'un dessin clair et précis.



Les variables sont définies sur le schéma.

G est situé au $\frac{2}{3}$ de la médiane issue de B. $\rightarrow$ $GG' = \frac{r_2}{2} + \frac{1}{3}\left(r_1 - \frac{r_2}{2}\right) = \frac{r_1 + r_2}{3}$

Longueur de la circonférence engendrée par $G : L = 2\pi \frac{r_1 + r_2}{3}$

Le volume engendré par la rotation du triangle ABO est égale au volume du tronc de cône engendré par $AOO'B$ diminué du volume du cône engendré par AOO'.

Surface du triangle $ABO : S_\Delta = \frac{r_2 H}{2}$

Volume du cône : $V_C = \frac{1}{3}\pi r_1^2 H$

Volume du tronc de cône : $V_{TC} = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)H$

Volume engendré par le triangle $ABO : V_\Delta = V_{TC} - V_C = \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2 - r_1^2\right)H$

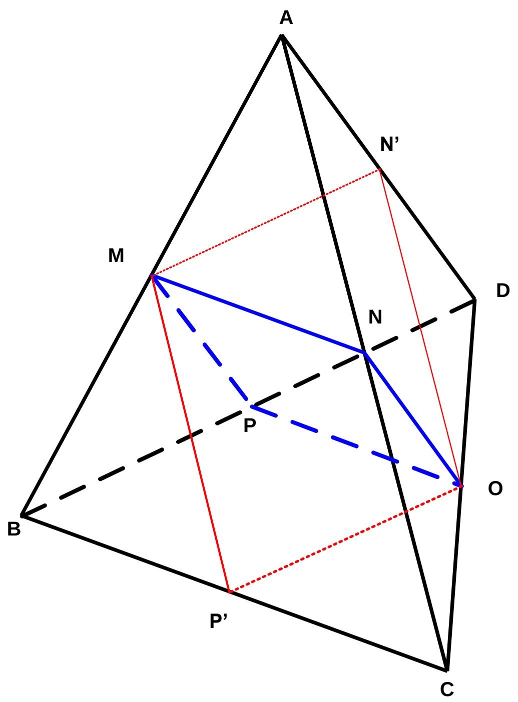
$\rightarrow V_\Delta = \frac{1}{3}\pi r_2 \left(r_1 + r_2\right)H = \frac{2\pi\left(r_1 + r_2\right)}{3}\frac{r_2 H}{2} = \boxed{L.S_\Delta}$

Note : Voir aussi EXGSE043

EXGSE046 – Liège, juillet 2002.

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note M le milieu de $[A, B]$ et π le plan contenant M et parallèle à AD et à BC. Ce plan coupe AC en N, CD en O et DB en P.

1. Montrer que $MNOP$ est un parallélogramme
2. En déduire que les droites joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes



1) π // $BC \to \pi$ coupe le dièdre d'arête BC, selon deux droites parallèles : MN et PO

De plus, M est le milieu de $AC \to N$ est le milieu de AC

De même, π // $AD \to \pi$ coupe le dièdre d'arête AD, selon deux droites parallèles : MP et NO

De plus, M est le milieu de $AC \to P$ est le milieu de BD

On en déduit que O est le milieu de CD (car PO est // à BC)

Conclusion, $MNOP$ est un parallélogramme et MO et PN sont deux diagonales qui se coupent en leur milieu.

2) On recommence avec un plan π' parallèle à BD et AC et passsant par M.

On en déduira que $MN'OP'$ est un parallélogramme dont les diagonales MO et $N'P'$ se coupent en leur milieu, avec N' milieu de AD et P' milieu de BC.

Les deux parallélogrammes ont une diagonale commune : MO

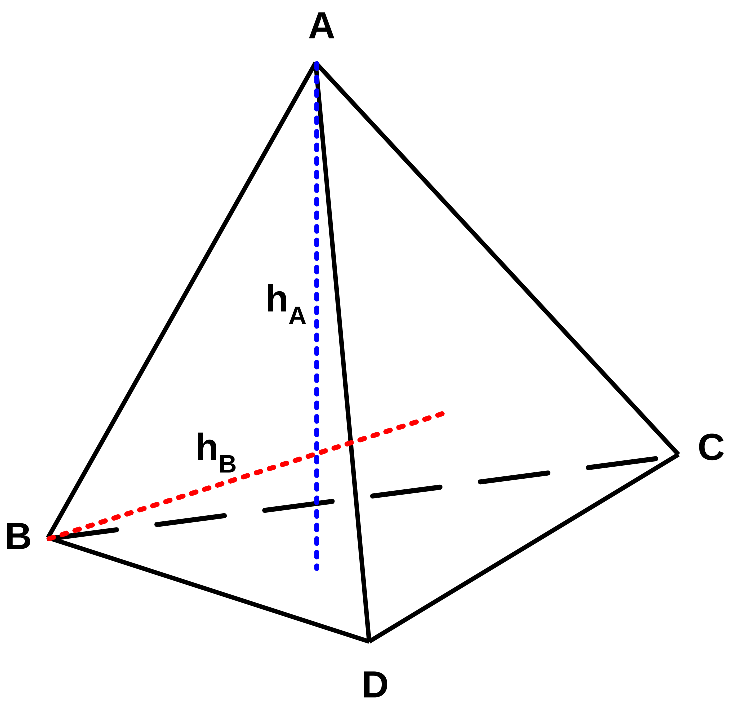
Finalement, on déduit que les doites joignant les milieux des arêtes opposées d'un tétraèdre sont concourantes.

Résolu lé 17 février 2004. Modifié le 22 août 2004

EXGSE047 – Liège, septembre 2002.

Soit $ABCD$ un tétraèdre. On note respectivement h_A et h_B les hauteurs issues de A et de B

1. Démontrer que h_A et h_B sont concourantes si et seulement si la droite AB est orthogonale à la droite CD
2. Démontrer que les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes si les arêtes opposées de ce tétraèdre sont orthogonales deux à deux.



1) a) La condition est suffisante

Soit BA et DC orthogonales : $BA \perp DC$

$h_A \perp$ Plan BDC $\rightarrow$ $h_A \perp DC$ $\rightarrow$ $DC \perp$ Plan BAh_A

$h_B \perp$ Plan ADC $\rightarrow$ $h_B \perp DC$ $\rightarrow$ $DC \perp$ Plan BAh_B

$\rightarrow$ h_A et h_B sont coplanaires et donc concourantes.

b) La condition est nécessaire

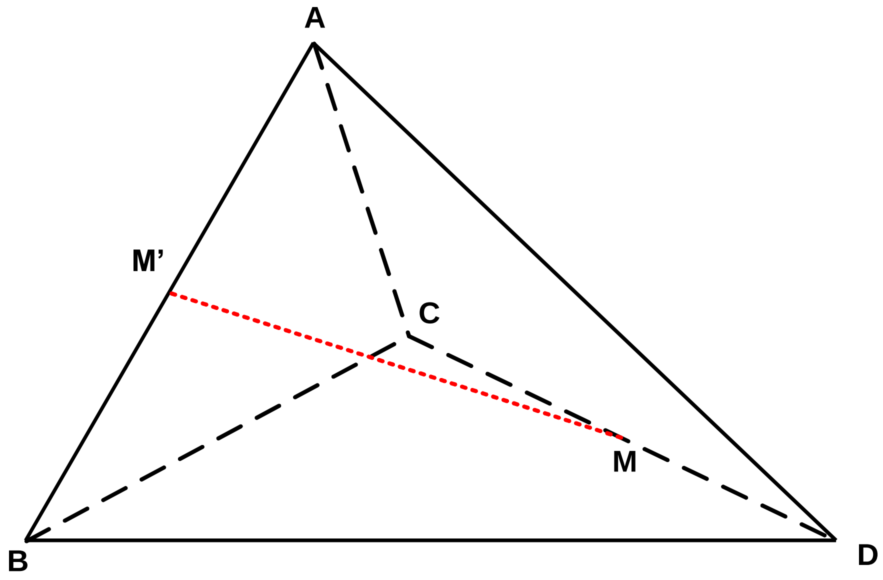
Soit h_A et h_B concourantes $\rightarrow$ $DC \perp h_Ah_B$ $\rightarrow$ $BA \perp DC$

2) Il suffit de refaire mutadis mutandis la démonstration pour les arêtes DB et AC; BC et AD.

On en conclut que les hauteurs d'un tétraèdre sont concourantes si les arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

EXGSE048 – Liège, juillet 2003.

Soit *ABCD* un tétraèdre tel que $|AC| = |AD|$ et $|BC| = |BD|$ et tel que les triangles *ACD* et *BCD* aient même aire. Si *M* et *M'* sont les milieux de [*C*,*D*] et [*A*,*B*], démontrer que *MM'* est la perpendiculaire commune à *AB* et *CD*



$$\left.\begin{array}{l} \Delta ACD \text{ isocèle } \rightarrow S_{ACD} = \dfrac{|CD|.|AM|}{2} \\ \Delta BCD \text{ isocèle } \rightarrow S_{BCD} = \dfrac{|CD|.|BM|}{2} \end{array}\right\} \rightarrow |AM| = |BM|$$

$\rightarrow \Delta AMB$ isocèle $\rightarrow MM' \perp AB$ $\left(\text{car } MM' \text{ est aussi médiane}\right)$

De plus, $AM \perp CD$ et $BM \perp CD$ (car médianes d'un triangle isocèle)

$\rightarrow CD \perp \text{plan } AMB \rightarrow MM' \perp CD$

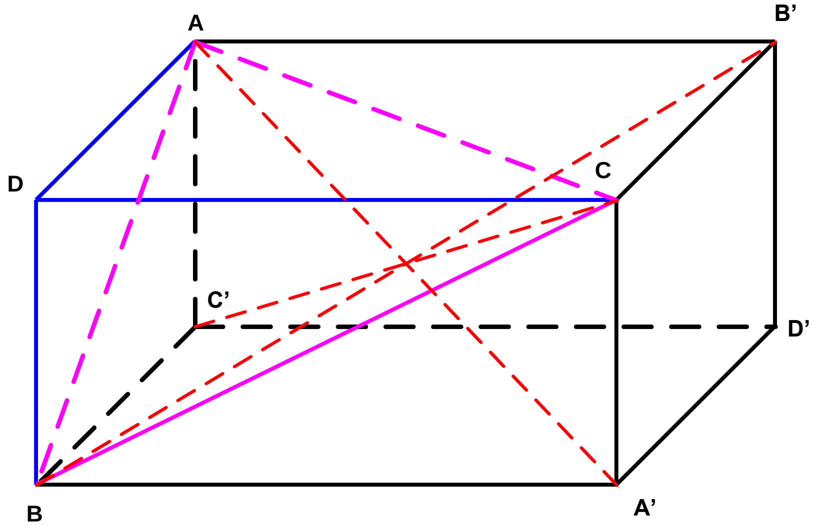
Conclusion : MM' est la perpendiculaire commune à CD et AB

EXGSE049 – Liège, septembre 2003.

On considère un parallélépipède dont *DA*, *DB*, *DC* sont des arêtes et *AA', BB', CC'* des diagonales.

Montrer que

$$\left|\overrightarrow{AA'}\right|^2+\left|\overrightarrow{BB'}\right|^2+\left|\overrightarrow{CC'}\right|^2=\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CA}\right|^2+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{DA}\right|^2+\left|\overrightarrow{DB}\right|^2+\left|\overrightarrow{DC}\right|^2$$



$$\left|\overrightarrow{AA'}\right|^2=\overrightarrow{AA'}^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA'}\right)^2=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)^2$$

$$\left|\overrightarrow{BB'}\right|^2=\overrightarrow{BB'}^2=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB'}\right)^2=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}\right)^2$$

$$\left|\overrightarrow{CC'}\right|^2=\overrightarrow{CC'}^2=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC'}\right)^2=\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}\right)^2$$

Si on développe et additionne les derniers membres, on retrouve tous les carrés demandés. Il suffit de vérifier que les doubles produits s'annulent.

En effet,

$$2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=2\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}\right).\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}$$

$$2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA}=2\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}\right).\overrightarrow{DA}=2\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{DA}+2\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA}$$

$$2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}=2\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}\right).\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB}$$

La somme des derniers membres est nulle.