

Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 1

EXGSE010 – EXGSE019

<http://www.matheux.be.tf>

Jacques Collot

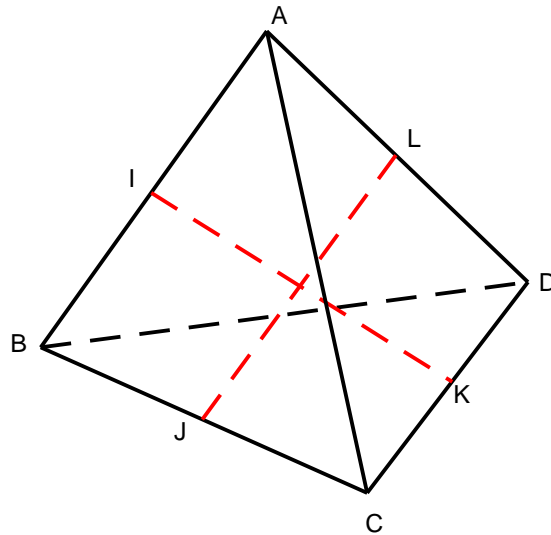
1 avril 03

EXGSE010 – Liège, septembre 1998.

Soit $ABCD$ un tétraèdre ; On désigne par I, J, K, L les milieux de AB, BC, CD et DA .

Démontrer que

- si AB est perpendiculaire à AC et BD , il est aussi perpendiculaire à IK .
- Si en outre $|AC| = |BD|$, IK est perpendiculaire à JL .



- a) Puisque I, J, K, L sont les milieux de leur segment respectif, le plan $IJKL$ est parallèle à BD , qui est perpendiculaire à AB .
(En effet IL est // à BD et KJ est // à BD).

Pour les mêmes raisons, le plan $IJKL$ est aussi parallèle à AC qui est aussi perpendiculaire à AB .

$$\rightarrow AB \text{ est } \perp \text{ au plan } IJKL \rightarrow AB \perp IK.$$

Note : On peut résoudre la question par analyse vectorielle.

En vertu de l'hypothèse, $AB \cdot AC + AB \cdot BD = 0$

$$\rightarrow AB \cdot (AI + IK + KC) + AB \cdot (AI + IK + KD) = 0$$

$$\rightarrow AB \cdot AI + AB \cdot BI + 2AB \cdot IK + AB \cdot KC + AB \cdot KD$$

Or $AB \cdot AI = -AB \cdot BI$ et $AB \cdot KC = -AB \cdot KD$

$$\rightarrow AB \cdot IK = 0 \rightarrow AB \perp IK$$

b) Les triangles BIJ et BAC sont semblables

$$\rightarrow \frac{BI}{BA} = \frac{BJ}{BC} = \frac{IJ}{AC} \quad (1)$$

Les triangles AIL et ABD sont semblables

$$\rightarrow \frac{AI}{AB} = \frac{AL}{AD} = \frac{IL}{BD} \quad (2)$$

or les rapports (1) et (2) sont égaux car I est le milieu de BA
donc comme $AC = BD$ (par hypothèse), on déduit que $IJ = IL$.
Autrement dit, I est sur la médiatrice de JL

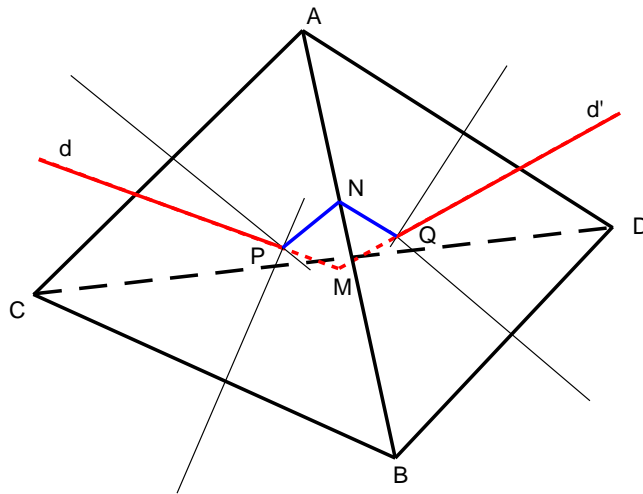
On peut refaire le même raisonnement, pour les deux autres faces
d'où on déduira que K est aussi sur la médiatrice de JL .

Par conséquent : $IK \perp JL$

EXGSE011 – Liège, juillet 1997.

Soit ABCD un tétraèdre.

On désigne par P le point d'intersection des médiatrices du triangle ABC, par d la perpendiculaire au plan ABC passant par p, par Q le point d'intersection des médiatrices de ABD et par d' la perpendiculaire au plan ABD passant par Q. Démontrer que d et d' sont sécantes et caractériser leur point d'intersection. En déduire que les perpendiculaires à chaque face passant par le point d'intersections des médiatrices de celle-ci sont concourantes.



a) $d \perp$ au plan $ABC \rightarrow d \perp AB$

Soit PN la médiatrice de AB .

Comme $PN \perp AB \rightarrow AB \perp$ plan dPN

Soit de même le plan $d'QN$, on en déduira aussi que $AB \perp$ plan $d'QN$

Par conséquent les plans dPN et $d'QN$ sont identiques.

$\rightarrow d$ et d' sont coplanaires, donc sécantes et se coupent en M .

b) M est équidistant de A , C et B puisque $M \in d$

M est équidistant de A , B , et D puisque $M \in d'$

M est donc équidistant de tous les sommets .

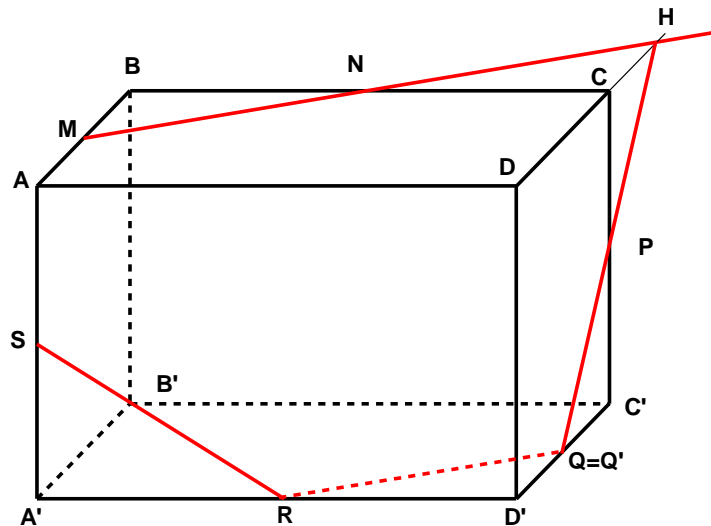
C'est donc le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre.

On en déduit immédiatement que les perpendiculaires de chaque

face passant par le point d'intersection des médiatrices passent par M .

EXGSE012 – Liège, juillet 1997.

Soit $ABCD A'B'C'D'$ un parallélépipède. Démontrer que le plan passant par les milieux M , N et P des arêtes AB , BC et CC' passe aussi par les milieux Q , R et S des arêtes $C'D'$, $A'D'$ et AA' .



Les plans MNP et SRQ sont parallèles.

Il suffit de démontrer qu'ils ont un point commun.

Construisons l'intersection du plan MNP avec le parallélépipède.

$$\text{Soit } H \equiv MN \cap DC \rightarrow \triangle NHC = \triangle NBM \rightarrow CH = MB$$

De même, traçons HP qui coupe $D'C'$ en Q' .

$$\triangle CHP = \triangle PC'Q' \rightarrow C'Q' = CH = MB$$

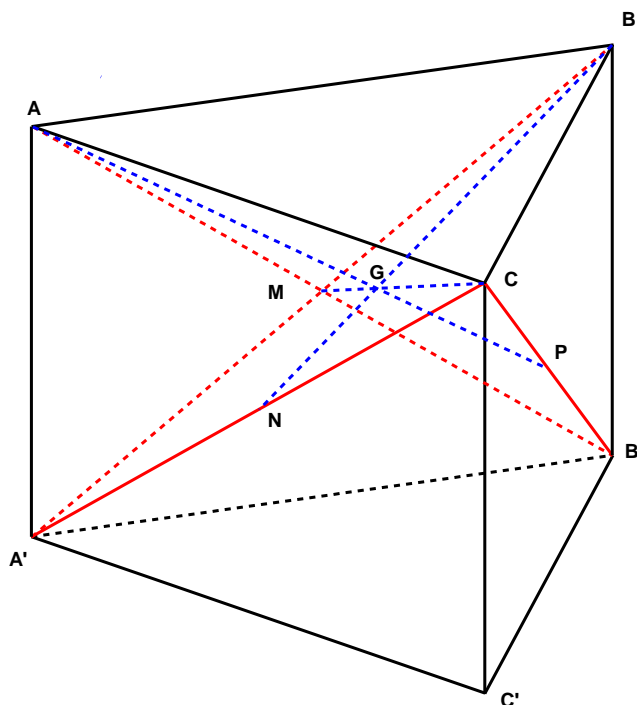
Par conséquent, Q' est le milieu de $D'C'$ et donc confondu avec Q .

Les deux plans ont donc un point commun et le plan MNP passe par SRQ

EXGSE013 – Liège, septembre 1997.

Soit $ABCA'B'C'$ un prisme.

Démontrer que les triangles $A'BC$ et $B'CA$ ont même centre de gravité.



Soit $M \equiv AB' \cap A'B$. (M est le milieu de AB' et $A'B$)

CM est médiane des triangles ACB' et $A'BC$.

Soit AP une deuxième médiane du triangle ACB' , qui détermine

G centre de gravité du triangle $\rightarrow GM = \frac{1}{3}CM$.

Cette relation est conservée dans le triangle $A'BC$.

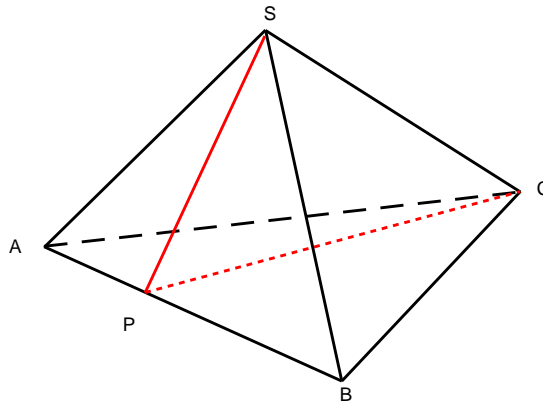
Par conséquent, G est le centre de gravité des deux triangles.

EXGSE014 – Liège, septembre 1997.

Soit $SABC$ un tétraèdre tel que les arêtes SA , SB et SC soient perpendiculaire deux à deux.

La perpendiculaire abaissée de C sur AB coupe AB en P .

Démontrer que SP est perpendiculaire à AB et que tout plan perpendiculaire à AB est parallèle à SC .



$$a) \quad SC \perp \text{plan } SAB \rightarrow AB \perp SC$$

$$AB \perp \text{aussi à } PC \rightarrow AB \perp \text{plan } SPC$$

$$\text{Et donc } SP \perp AB$$

b) Si AB est \perp à SCP , tout plan \perp à AB est // au plan SCP
et donc // à SC .

Note.

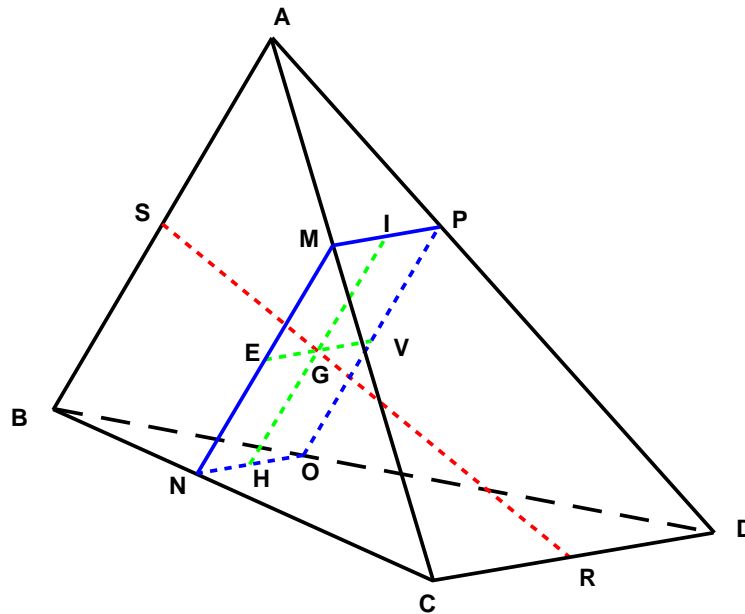
On a aussi par analyse vectorielle :

$$\begin{aligned} \overline{SP} \cdot \overline{AB} &= (\overline{SC} + \overline{CP}) \cdot \overline{AB} \\ &= \overline{SC} \cdot \overline{AB} + \overline{CP} \cdot \overline{AB} \\ &= \overline{SC} (\overline{AS} + \overline{SB}) \quad \text{car } \overline{CP} \cdot \overline{AB} = 0 \\ &= \overline{SC} \cdot \overline{AS} + \overline{SC} \cdot \overline{SB} = 0 \end{aligned}$$

$$\rightarrow SP \perp AB$$

EXGSE015 – Liège, septembre 2000.

Un tétraèdre ABCD est coupé par un plan p suivant un rectangle.
 Démontrer que le tétraèdre a un couple d'arêtes opposées parallèles à P et orthogonales l'une à l'autre et que la droite joignant les milieux de ces arêtes passe par le point d'intersection des médianes du triangle.



- a) Le dièdre ADC / BCD est coupé par le plan π selon deux droites parallèles $\rightarrow CD // MP // ND$ (voir note).
 De même, pour l'autre dièdre $\rightarrow NM // OP // BA$

Or $MP \perp MN \rightarrow CD \perp MN$
 et comme $MN // CD \rightarrow CD \perp AB$

b) Soit le ΔSCD dont SR est une médiane.

Soit EV une des médianes du rectangle $MNOP$.

$EV \in \text{plan } SCD$ puisque $E \in SC$ et $V \in SD$

(En effet, par exemple pour E , les triangles CNM et CBA sont semblables, puisque $NM \parallel BA$ et donc E est homothétique de S).

EV et SR se coupe en G , point de percée de SR dans le plan du rectangle.

De plus $EG = GV$.

(En effet, on a ici aussi deux triangles semblables : ΔSEV et ΔSCD)

Même chose pour l'autre médiane.

Soit le ΔBRA dont SR est aussi une médiane.

Soit IH l'autre médiane du rectangle $MNOP$

$IH \in \text{plan } BRA$ puisque $H \in BR$ et $I \in AR$.

IH et SR se coupe aussi en G , et $HG = GI$

Conclusion : G est le point d'intersection des médianes et SR passe par G .

Note

Si un dièdre $(\pi_1 \pi_2)$ est coupé par un troisième plan π_3 selon deux droites parallèles $(d_1$ et $d_2)$, alors $i \equiv \pi_1 \cap \pi_2$ est parallèle à d_1 et d_2 , et à π_3 .

En effet, soit P_1 un point de d_1 (dans π_1), et P_2 un point de d_2 (dans π_2).

Si i n'est pas parallèle à d_1 , alors ils ont un point commun : H .

Or H appartient aux trois plans.

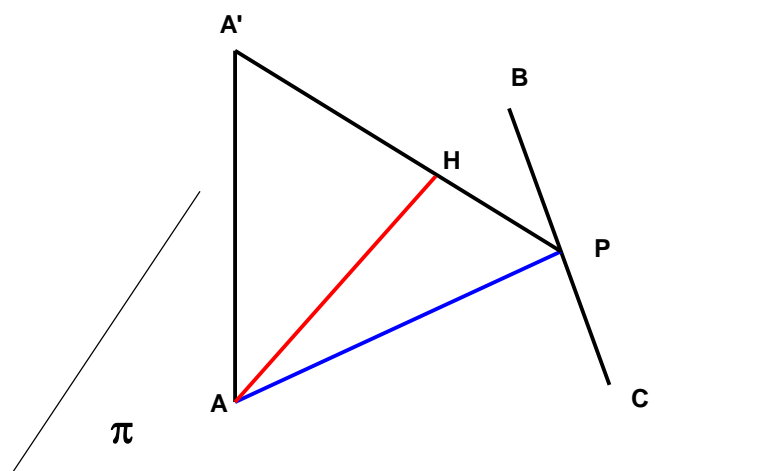
HP_2 est alors l'intersection de π_2 et π_3 , et HP_2 n'est autre que d_2

Autrement dit, d_1 et d_2 ont un point commun, ce qui est impossible.

Par conséquent, $i \parallel d_1 \parallel d_2$ et $i \parallel \pi_3$

EXGSE016 – Liège, 1996.

Soient π un plan et A, B, C trois points non alignés de π .
On fixe A' différent de A tel que AA' soit perpendiculaire à π .
De A' on abaisse la perpendiculaire à la droite BC qui coupe BC en H .
Démontrer que les plans $AA'P$ et $A'BC$ sont perpendiculaires et que la perpendiculaire au plan $A'BC$ passant par A rencontre la droite $A'P$.



$$A'A \perp \pi \rightarrow A'A \perp BC$$

$$\text{or } A'P \perp BC \rightarrow \text{plan } A'AP \perp BC$$

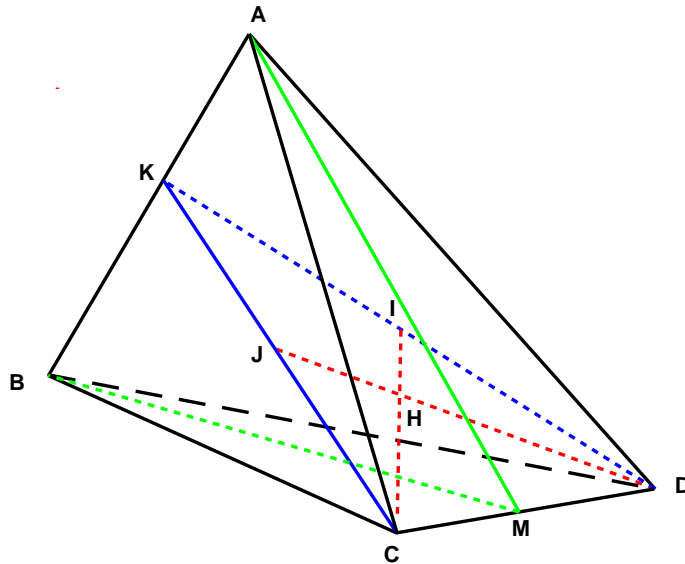
$$\text{Par conséquent : } \text{plan } A'AP \perp \text{plan } A'BC$$

La perpendiculaire AH au plan $A'BC$ est contenue dans le plan $A'AP$

$\rightarrow AH$ rencontre $A'P$.

EXGSE017 – Liège, 1996.

Soit un tétraèdre $ABCD$ tel que $|AC| = |AD|$ et $|BC| = |BD|$.
 Démontrer que CD est orthogonal à AB et que les hauteurs du tétraèdre issues de C et de D sont coplanaires.



a) Le plan ABM , déterminé par AM et BM , respectivement médianes des triangles isocèles ACD et BDC , est perpendiculaire à DC

→ $DC \perp AB$

Par analyse vectorielle, on a également

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} \\ &= -\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \quad \rightarrow \quad AB \perp CD \end{aligned}$$

b) Le plan CID est \perp au plan ABD donc à AB .

DI coupe AB en K , et DK est une hauteur du triangle ABD .

De même le plan DJC est \perp au plan ABC donc à AB .

Et comme les triangles ABC et ABD sont égaux CJ coupe aussi AB en K

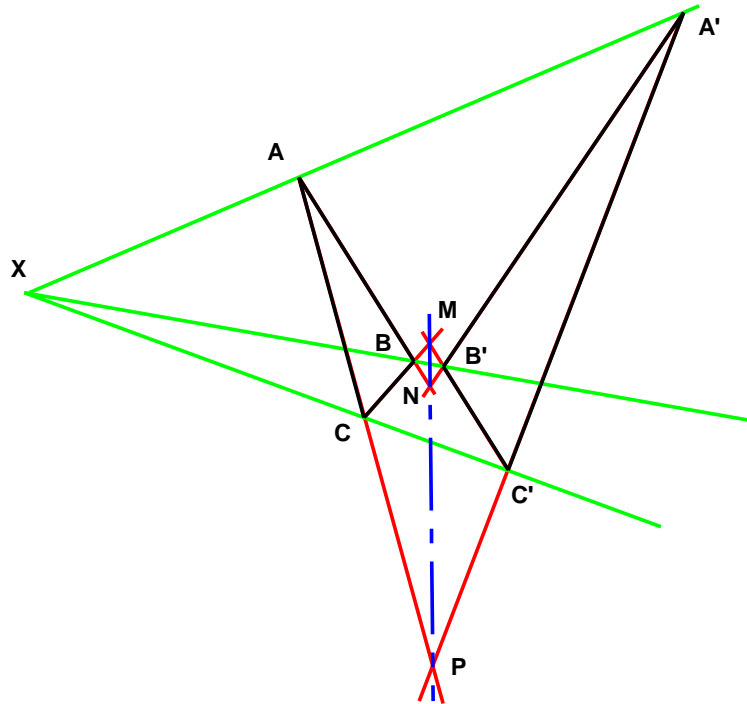
→ IC et DJ sont coplanaires.

EXGSE018 – Liège, 1996.

Considérons deux triangles non coplanaires ABC et $A'B'C'$ tels que les droites déterminées par AB et $A'B'$ soient sécantes, ainsi que celles déterminées par BC et $B'C'$, et AC et $A'C'$.

Démontrer que :

- Les trois points d'intersections sont colinéaires.
- Les droites AA' , BB' et CC' sont parallèles ou concourantes.



C'est le théorème de Desargues dans l'espace.

a) Les points MNP sont colinéaires.

En effet, La droite MNP est l'intersection des plans ABC et $A'B'C'$.

b) Les droites sont concourantes ou parallèles car :

AA' est l'intersection des plans APA' et ANA'

BB' est l'intersection des plans ANA' et CMC'

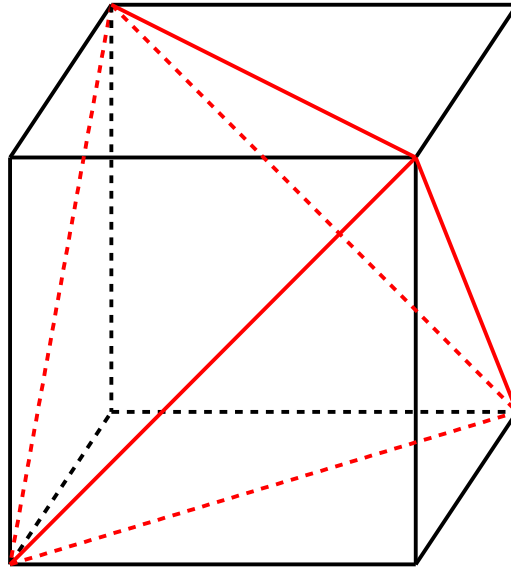
CC' est l'intersection des plans APA' et CMC'

Ces plans sont les trois faces d'un tétraèdre dont les arêtes se coupent en X .

Si le point X se trouve à l'infini, on a alors un prisme, dont les arêtes sont parallèles.

EXGSE019 – Mons, questions-types 2000-2001.

Choisir les quatre sommets d'un cube de telle sorte qu'ils soient les sommets d'un tétraèdre régulier.



Le dessin donne une des possibilités.

Chaque arête est égale à $a\sqrt{2}$, où a désigne le côté du cube.

C'est donc bien un tétraèdre régulier.