Exercices résolus de mathématiques.

Géométrie synthétique dans l'espace

GSE 12

EXGSE120 – EXGSE129

http://www.matheux.c.la

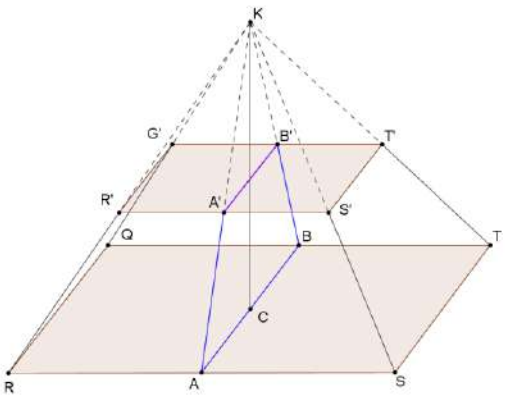
Jacques Collot
Benoit Baudelet – Steve Tumson
Nicole Berckmans – Jan Frans Broeckx
Fabienne Zoetard

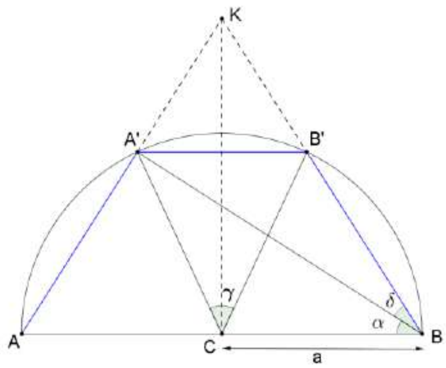
Novembre 13

EXGSE120 - POLYTECH, Umons, Mons, Juillet 2012.

Soit une pyramide de base inférieure $QRST$ appartenant au plan horizontal π et de sommet K, situé à la verticale du centre de gravité C de cette base. Soit A le milieu de RS et B le milieu de TQ. Coupons cette pyramide par un paln horizontale π' de façon à former un tronc de pyramide : la base supérieure de ce tronc de pyramide est un autre carré $Q'R'S'T'$.
Coupons le tronc de pyramide par un plan $\rho \perp \pi$ et de contenant AB. Ce plan coupe $R'S'$ en A' et $T'Q'$ en B'.
On se focalise sur le cas particulier où la distance entre les plans π et π' est telle que la **circonférence circonscrite au polygone AA'B'B (appartenant au plan ρ) et de centre C admet le côté AB comme diamètre.** On appelle α l'angle ABA' et δ l'angle $B'BA'$.
On demande d'établir, par les méthodes de la géométrie synthétique, l'aire du secteur de cercle défini par l'angle au centre $A'CB'$ en fonction de AB et de l'angle α. Pour vous aider, étudiez d'abord la relation liant l'angle δ à l'angle α.

Solution proposée par Fabienne Zoetard





Aire recherchée : $A = \frac{\pi a^2}{360°}.\underset{\text{en °}}{\hat{\gamma}} = \frac{\pi a^2}{2\pi}.\underset{\text{en rad}}{\hat{\gamma}}$ où a est le demi côté de la base de la pyramide.

Le $\Delta AA'B$ est rectangle en A', donc $\alpha = 90° - AA'B = 90° - B'BA \; = 90° - (\alpha + \hat{\delta})$ car CK est un axe de symétrie. $\Rightarrow 2\alpha = 90° - \hat{\delta}$.

Le $\Delta BCB'$ est isocèle en C, ainsi

$\overline{B'CB} = 180° - 2.\overline{CBB'} = 180° - 2(\widehat{\alpha + \hat{\delta}}) = 180° - 2(\widehat{90° - \alpha}) = \widehat{2\alpha}$

D'autre part : $\hat{\gamma} = 2.\overline{KCB'} = 2(\overline{90° - BC'B}) = 2(\widehat{90° - 2\alpha}) = \widehat{180° - 4\alpha}$

Conclusion : $A = \frac{\pi a^2}{360°}.(\widehat{180° - 4\alpha}) = \frac{\pi a^2}{90°}(\widehat{45° - 4\alpha})$

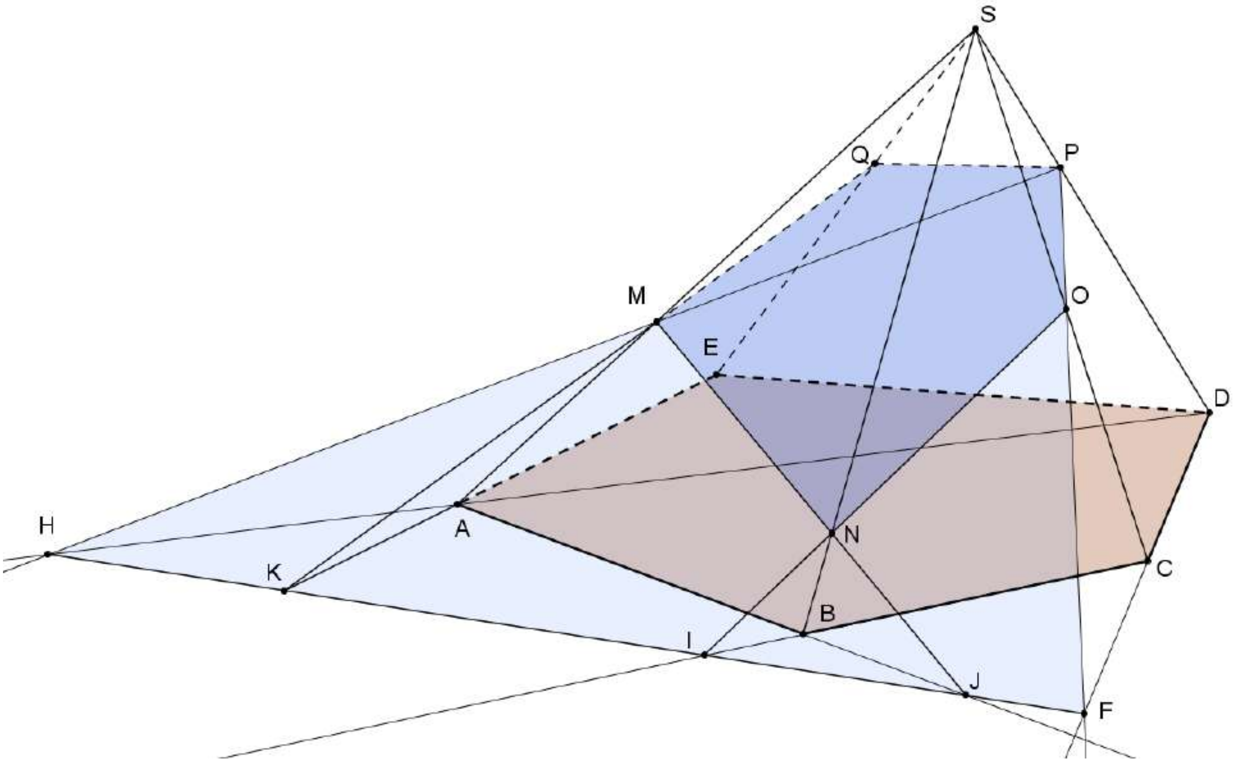
Remarque: La pyramide n'intervient que pour définir le trapèze $AA'B'B$

---

12 novembre 2013

EXGSE121 - POLYTECH, Umons, Mons, Juillet 2013

Soit un pyramide de sommet S et de base non régulière $ABCDE$. Soient les trois points M, O et P respectivement sur les arêtes SA, SC et SD.
Ces points déterminent un plan π.
Construire la figure géométrique.
Déterminer par construction les points N et Q, intersections du plan π respectivement sur les arêtes SB et SE, afin de définir complètement la section plane passant par les trois points M, O et P.



P et O $\in$ face $SCD \Rightarrow F = PO \cap DC$ et donc $F \in$ à la base $ABCDE$.
Faisons passer un plan par S, P et M qui coupe la base en $DA \Rightarrow H = PM \cap DA$ et donc H est aussi à la base. Traçons alors HF qui est l'intersection du plan π et de la base. HF coupe les arêtes AB et $BC \Rightarrow I = HF \cap CB$ et $J = HF \cap AB$.
Mais I est aussi dans la base $SAB \Rightarrow N = IO \cap SB$. De même J est dans la base SAB et $N = JM \cap SB$.
D'autre part soit $K = AE \cap HF$. $K \in \pi$ et à la face SAE. On a alors $Q = KM \cap SE$.
$MNOPQ$ est l'intersection de la pyramide et du plan π.

EXGSE122 - – FACS, ULB, Bruxelles, septembre 2013

On considère un point P et un plan π situés à une distance 2 l'un de l'autre. Soit S la sphère de centre P et de rayon 3.

a) Déterminer le rayon R du cercle C formé par l'intersection entre le plan et la sphère.

b) Calculer le volume du cône dont la base est le cercle C et le sommet est le point P.

c) Un plan ρ parallèle à π coupe ce cône en deux parties ayant le même volume. Déterminer la distance entre les plans π et ρ

Solution proposée par Dominique Druez

Pythagore : $R = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

Volume cône : $\frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{10}{3}\pi$

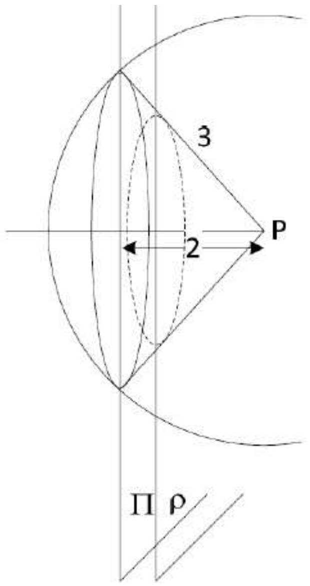
$Vol_{\pi P} = 2Vol_{\rho P}$

Soit x la hauteur du cône section de ρ et r le rayon de section, exprimons l'égalité des volumes:

$\frac{10}{3}\pi = 2\frac{1}{3}\pi r^2 x \to 5 = r^2 x \ (1)$

Thalès : $\frac{R}{2} = \frac{r}{x} \to r = \frac{\sqrt{5}}{2}x$, remplaçons dans (1) :

$5 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right)^2 x = \frac{5}{4}x^3 \to x = \sqrt[3]{4}$



---

7 février 2014

EXGSE123 - EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 1.

Dans le plan XY, un demi-cercle de centre O et de rayon $R > 0$ est tel sue son centre et son diamètre sont sur l'axe Y. A l'intérieur du demi-cercle, un triangle ABC est tel que A et B sont situés sur l'axe Y, O est le milieu du côté AB et les côtés CA et CB sont de même longueur. On note $a > 0$ la longueur de la base AB et $h \in \left]0, R\right[$ la hauteur du triangle.
On effectue une révolution autour de l'axe Y. Soit V_e le volume engendré par le demi-cercle, et V_i celui engendré par le triangle.

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

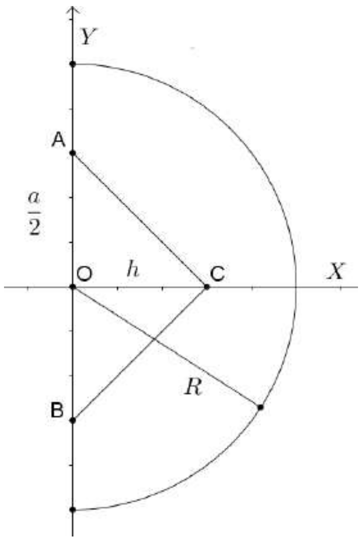
(2) Exprimer le rapport $\dfrac{V_i}{V_e}$ en fonction de a, h et R uniquement.

(3) Calculer la valeur maximale du rapport $\dfrac{V_i}{V_e}$ quand les côtés CA et AB ont :

- la même longueur,
- des longueurs différentes.

N.B. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Michel Goffin



On supposera R constant, tandis que $a/2$ et h varient dans $]0, R[$.

$(2)\, V_e =$ volume d'une sphère $= \frac{4}{3}\pi R^3$

$V_i =$ 2 fois le volume d'un cône de rayon h et de hauteur $a/2$

$= 2 \times \frac{1}{3}\pi h^2 \frac{a}{2} \Rightarrow \boxed{\frac{V_i}{V_e} = \frac{h^2 a}{4R^3}}$

$(3)\,(a)$ Si $\overline{CA} = \overline{AB},$ le triangle est équilatéral et dans le ΔAOC on a :

$$h^2 + \frac{a^2}{4} = a^2 \Rightarrow h = a\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } a = \frac{2h}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{V_i}{V_e} = \frac{2h^3}{4\sqrt{3}R^3} = \frac{\sqrt{3}}{6}.\left(\frac{h}{R}\right)^3$$

$\boxed{\text{Le maximum est obtenu pour } h = R \text{ et vaut } \frac{\sqrt{3}}{6}}$

Le a correspondant vaut alors : $a = \frac{2R}{\sqrt{3}} < 2R$

(b) Si $\overline{CA} \neq \overline{AB},$ $\frac{V_i}{V_e}$ est maximal pour $h = R$ et $a = 2R \Rightarrow \boxed{\frac{V_i}{V_e} = \frac{2R^3}{4R^3} = \frac{1}{2}}$

2 octobre 2014

EXGSE124 - EPL, UCL, LLN, juillet 2014 série 2.

Dans le plan XY, un rectangle (A, B, C, D) est tel que A et D sont situés sur l'axe des Y, la longueur des côtés AB et CD est l, et celle des côtés AD et BC est h. Le rectangle est coupé par une droite qui l'intercepte aux points M_1 situé sur le côté AB à une distance x_1 de A, et M_2 sur DC à une distance x_2 de D. On suppose $x_1 > x_2$. On effectue une révolution autour de l'axe Y. Soit V_R le volume engendré par le rectangle et V_T celui engendré par la révolution du trapèze (A, M_1, M_2, D).

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

Pour toute la suite, on considère uniquement le cas : $V_T = \dfrac{V_R}{2}$

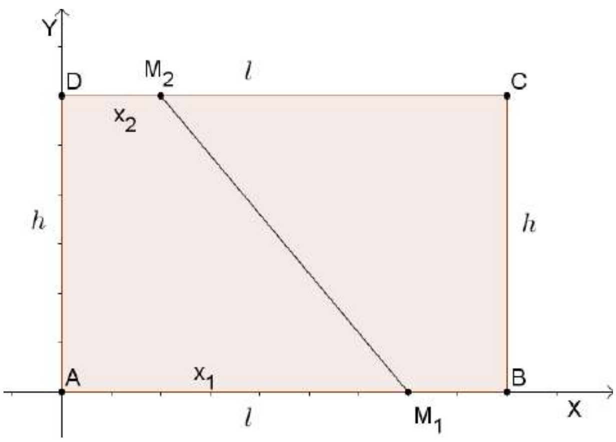
(2) Trouver l'équation liant x_1, x_2 et l.

(3) Calculer les valeurs -si elles existent- de x_2 dans les cas $x_1 = 2x_2$ et $x_1 = 3x_2$

(4) On pose $x_1 = \alpha x_2$. Trouver l'ensemble des valeurs admissibles de α. En déduire l'ensemble des valeurs possibles de x_2.

N.B. Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Michel Goffin



(1) Conditions : $0 \leq x_2 < x_1 \leq l \Rightarrow 0 \leq x_2^2 < x_1^2 \leq l^2$

(2) Cylindre : $V_R = \pi l^2 h$

Tronc de cône : $V_T = \dfrac{1}{3}\pi h\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2\right)$

$$V_T = \frac{V_R}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}\pi h\left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2\right) = \frac{1}{2}\pi l^2 h \Rightarrow \boxed{x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 = \frac{3}{2}l^2} \qquad (éq\,1)$$

(3) $\underline{\text{Si } x_1 = 2x_2}$, $(éq\,1)$ devient $7x_2^2 = \dfrac{3l^2}{2} \Rightarrow x_2 = \sqrt{\dfrac{3}{14}}.l$

On vérifie que : $0 < x_2 < l$ et $x_1^2 = 4x_2^2 = \dfrac{4 \times 3}{14} l^2 < l^2$

$\underline{\text{Si } x_1 = 3x_2}$, $(éq\,1)$ devient $13x_2^2 = \dfrac{3l^2}{2} \Rightarrow x_2^2 = \dfrac{3}{23} l^2$

Qui est à rejeter car alors : $x_1^2 = 9x_2^2 = \dfrac{27}{26} l^2 > l^2$

(4) $\underline{x_1 = \alpha x_2}$ Comme $x_1 > x_2$, il faut $\alpha > 1$

$$(éq\,1) \Rightarrow x_2^2\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right) = \frac{3l^2}{2} \Rightarrow x_2^2 = \frac{3l^2}{2\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right)}$$

Cette expression doit rester inférieure à l^2. Ce qui est évident pour $\alpha = 1$.

$$x_1^2 = \alpha^2 x_2^2 = \frac{3\alpha^2 l^2}{2\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right)} \leq l^2 \Rightarrow 3\alpha^2 \leq 2\alpha^2 + 2\alpha + 2 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 2 \leq 0$$

Les racines de cette dernière équation sont $\alpha = 1 \pm \sqrt{3}$.

On en déduit : $\boxed{1 < \alpha \leq 1 + \sqrt{3}}$

On a alors

$$\begin{array}{ccccc}
1 & < & \alpha^2 & \leq & 4 + 2\sqrt{3} \\
3 & < & \alpha^2 + \alpha + 1 & \leq & 6 + 3\sqrt{3} \\
2 & < & \dfrac{2}{3}\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right) & \leq & 2\left(2 + \sqrt{3}\right) \\
\dfrac{1}{2\left(2 + \sqrt{3}\right)} & \leq & \dfrac{3}{2\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right)} & < & \dfrac{1}{2} \\
\dfrac{l^2}{2\left(2 + \sqrt{3}\right)} & \leq & \dfrac{3l^2}{2\left(\alpha^2 + \alpha + 1\right)} = x_2^2 & < & \dfrac{l^2}{2} \\
\dfrac{l}{\sqrt{2\left(2 + \sqrt{3}\right)}} & \leq & x_2 & < & \dfrac{l}{2}
\end{array}$$

Conclusion : $\boxed{\dfrac{l}{2}\sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \leq x_2 < \dfrac{l\sqrt{2}}{2}}$

EXGSE125 - FACSA, ULG, Liège, juillet 2013.

(a) Démontrer que si un point P est équidistant de deux droites sécantes en un point A, alors les projections orthogonales de P sur ces deux droites sont équidistantes de A.

(b) En déduire que si les six arêtes d'un tétraèdre $ABCD$ sont tangentes à une même sphère, alors on a

$$|AB|+|CD|=|AC|+|BD|=|AD|+|BC|$$

où $|XY|$ désigne la longueur du segement $|XY|$

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) : http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/

(a) Notons P' et P'' les projections orthogonales respectives de P sur les deux droites. Par hypothèse, on a $PP' \perp P'A$, $PP'' \perp P''A$ et $|PP'| = |PP''|$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles $PP'A$ et $PP''A$, on obtient

$$|P'A| = \sqrt{|PA|^2 - |PP'|^2}$$

et

$$|P''A| = \sqrt{|PA|^2 - |PP''|^2},$$

dont on déduit $|P'A| = |P''A|$, étant donné que l'on a $|PP'| = |PP''|$.

(b) Notons respectivement E, F, G, H, I et J les points de tangence de la sphère aux arêtes $[AB]$, $[AC]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$ et $[CD]$ du tétraèdre. Ces points correspondent aux projections orthogonales du centre O de la sphère sur ces arêtes. Puisqu'ils appartiennent à cette sphère, ils sont également équidistants de O.

En appliquant le résultat établi au point (a), on obtient

$$\begin{aligned}|AE| &= |AF| = |AG|,\\ |BE| &= |BH| = |BI|,\\ |CF| &= |CH| = |CJ|,\\ |DG| &= |DI| = |DJ|,\end{aligned}$$

dont on déduit

$$\begin{aligned}|AB| + |CD| &= |AE| + |BE| + |CJ| + |DJ|\\ &= |AF| + |CF| + |BI| + |DI| = |AC| + |BD|\\ &= |AG| + |DG| + |BH| + |CH| = |AD| + |BC|.\end{aligned}$$

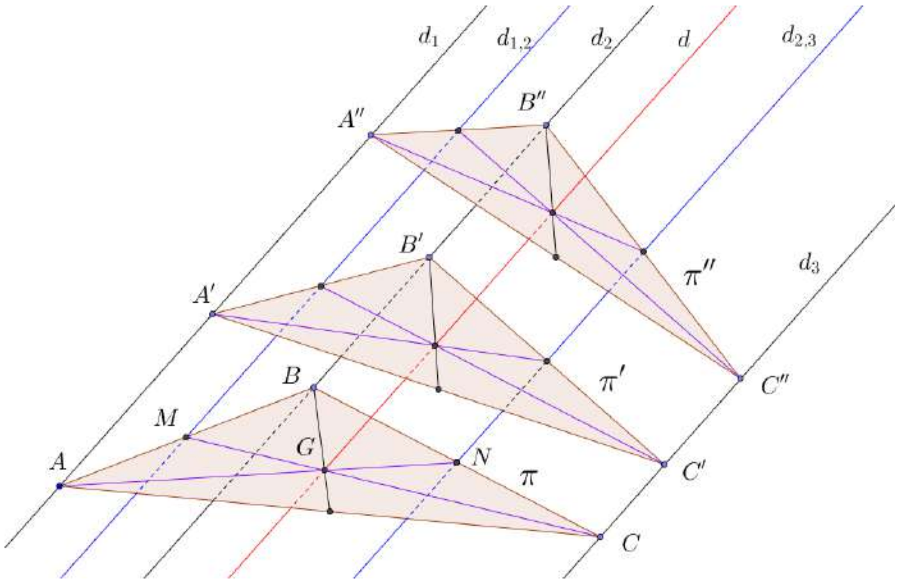
Le 3 février 2015

EXGSE126 - FACSA, ULG, Liège, septembre 2013.

On note d_1, d_2 et d_3 trois droites parallèles de l'espace disctinctes et non coplanaires, et π, π' et π'' trois plans sécants à ces droites. Les points de percée de d_1 dans π, π' et π'' sont respectivement notés A, A' et A''. De même les points de percée de d_2 et d_3 dans ces plans sont respectivement B, B', B'' et C, C', C''. Démontrer que les centres de gravité des triangles ABC, $A'B'C'$ et $A''B''C''$ sont alignés

---

Nous reprenons la solution proposée par l'université (Bernard Boigelot, Françoise Bastien) :
http://www.montefiore.ulg.ac.be/~boigelot/cours/adm/



Appelons $d_{1,2}$ la droite parallèle à d_1 et de d_2 dans le plan formé par ces deux droites, et située à égale distance de d_1 et de d_2. La droite $d_{1,2}$ coupe le segment $[AB]$ en son milieu M. De même, elle coupe $[A'B']$ et $[A''B'']$ en leurs milieux.

De la même manière, on définit la droite $d_{2,3}$ située à égale distance de d_2 et de d_3 dans le plan formé par ces deux droites. Cette droite $d_{2,3}$ coupe les segments $[BC]$, $[B'C']$ et $[B''C'']$ en leurs milieux. On note N le milieu de $[BC]$.

Le centre de gravité G du triangle ABC est situé à l'intersection des médianes AN et CM de ce triangle. La droite AN correspond à l'intersection du plan π avec le plan α formé par les deux droites parallèles d_1 et $d_{2,3}$, car les points A et N appartiennent tous les deux à ces deux plans. De même, la droite CM correspond à l'intersection du plan π avec le plan β formé par les deux droites parallèles d_3 et $d_{1,2}$. Etant donné que G appartient aux plans α et β, il appartient à leur intersection, que l'on note d.

Le même raisonnement dans les triangles $A'B'C'$ et $A''B''C''$ permet d'établir que les centres de gravité de ces triangles sont également situés sur la droite d. Ces trois points sont donc bien alignés.

Le 16 septembre 2013

EXGSE127 - EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 1

Un cône de révolution a pour demi angle au sommet $\frac{\pi}{6}$ et pour hauteur H. On place à l'intérieur deux boules sphériques dont les centres sont situés sur l'axe de cône.

On souhaite maximiser la somme des volumes des boules.

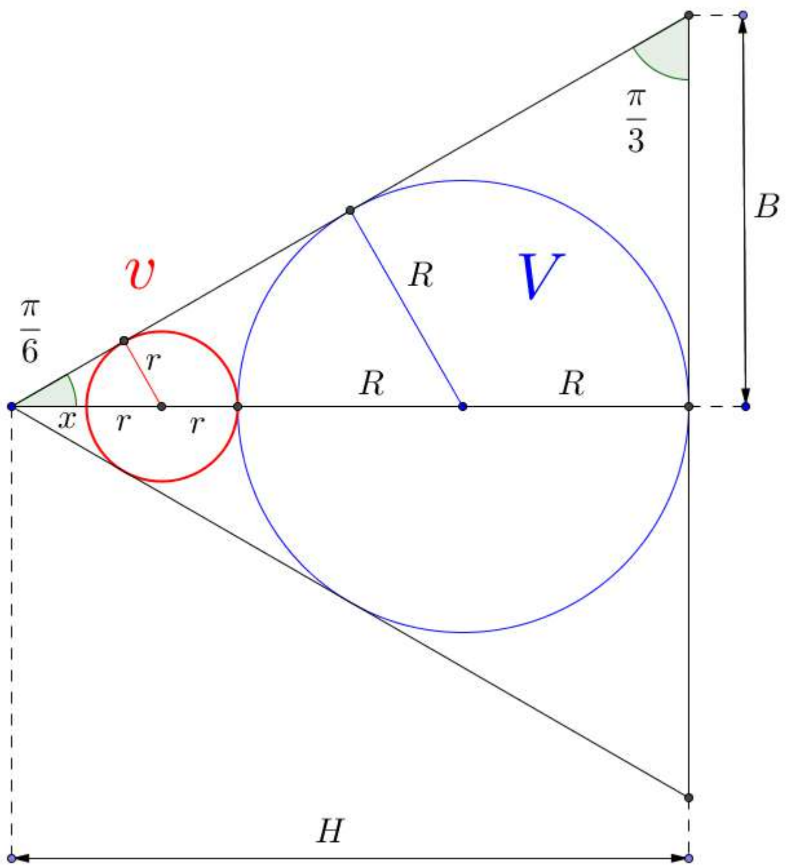
(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

(2) Calculer les rayons des boules en fonction H uniquement.

(3) Calculer le rapport de la somme des volumes des boules par le volume du cône.

NB: Des mesures sur un dessin ne constituent pas une démonstration.

Solution proposée par Nicole Berckmans



On a : $x+2r+2R=H$ et $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\overset{(1)}{=}\frac{r}{x+r}\overset{(2)}{=}\frac{R}{x+2r+R}$

De (1), on tire $x=r$ et de (2) $\frac{R}{3r+R}=\frac{1}{2}\Rightarrow R=3r$

Dès lors : $H=3r+6r=9r\Rightarrow\begin{cases} r=\frac{H}{9} \\ R=\frac{H}{3}\end{cases}$

D'autre part, $v=\frac{4}{3}\pi r^3$ et $V=\frac{4}{3}\pi R^3\Rightarrow v+V=\frac{4}{3}\pi\left(r^3+R^3\right)$

On a aussi $V_{cône}=\frac{1}{3}\pi B^2H$ or $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{B}{H}$. Donc :$V_{cône}=\frac{1}{9}\pi H^3$

Ce qui donne : $\frac{v+V}{V_{cône}}=\frac{\frac{4}{3}\pi\left(r^3+R^3\right)}{\frac{1}{9}\pi H^3}=\frac{12\left(r^3+R^3\right)}{H^3}=\frac{12\left(\frac{1}{9^3}+\frac{1}{3^3}\right)H^3}{H^3}=\frac{112}{243}\simeq 0.461$

Le 26 septembre 2015

EXGSE128 - EPL, UCL, LLN, juillet 2015 série 2

Une sphère de rayon R est coupée par un plan horizontal, créant ainsi une calotte sphérique de hauteur $H < R$. On considère un cylindre de hauteur y et rayon x, inscrit dans la calotte, et d'axe vertical passant par le pôle de celle-ci. On note V_i le volume du cylindre et V_e celui de la calotte, qui est donné par l'expression suivante (que l'on ne demande pas de démontrer) :

$$V_e = \frac{\pi}{3} H^2 (3R - H).$$

(1) Illustrer l'énoncé par un dessin clair.

(2) Exprimer V_i en fonction de R, H et y uniquement.

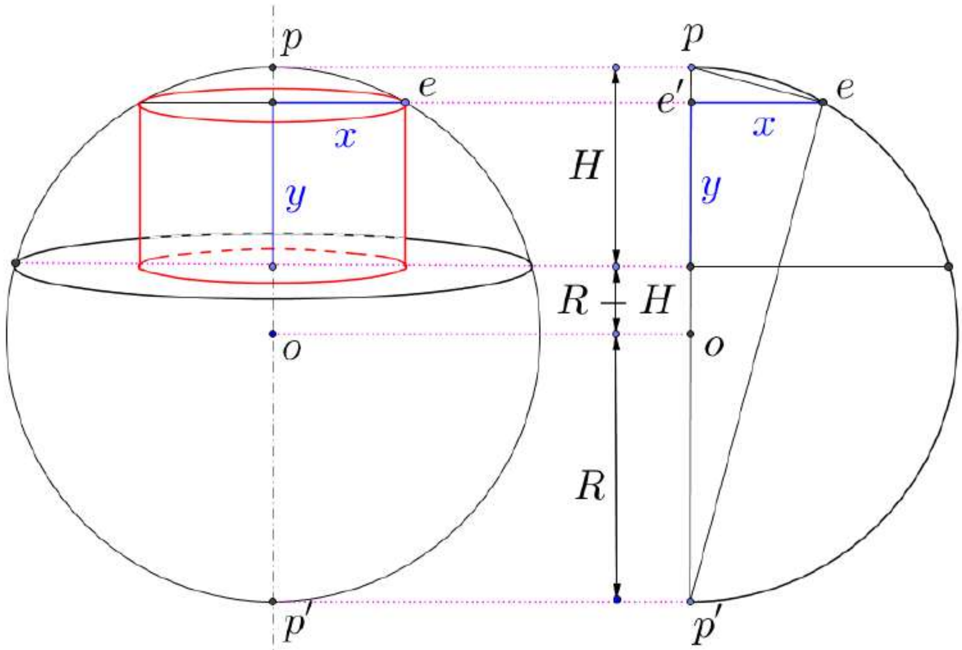
Pour la suite, on considère que $H = \dfrac{R}{2}$

(3) Exprimer en fonction de H uniquement la valeur de y pour laquelle V_i est maximal.

(4) Calculer la valeur correspondant du rapport $\dfrac{V_i}{V_e}$.

Note : Les calculs doivent se faire sans machine

Solution proposée par Louis François



(2) Le triangle (p,e,p') est rectangle en e : x est moyenne géométrique en $\|pe'\|$ et $\|e'p'\|$.

$$\begin{cases} \|pe'\| = H - y \\ \|e'p'\| = R + R - H + y \end{cases} \Rightarrow x^2 = (H-y)(2R-H+y)$$

Donc : $\boxed{V_i = \pi x^2 y = \pi(H-y)(2R-H+y)y}$

Et pour $R = 2H \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_i = \pi(3H+y)(H-y)y}$

(3) $\dfrac{dV_i}{dy} = \pi\left[(H-y)y-(3H+y)y+(3H+y)(H-y)\right]$

$$= \ldots = \pi\left(-3y^2-4Hy+3H^2\right)$$

$\dfrac{dV_i}{dy} = 0 \;:\; y = \dfrac{2H \pm \sqrt{13}H}{-3} = \begin{cases} y_1 < 0 \\ y_2 > 0 \end{cases}$

y	y_1		0		y_2		H
$\dfrac{dV_i}{dy}$	$-$ 0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	
V_i			0	$\nearrow$	Max	$\searrow$	0

Le V_i maximum est obtenu pour :

$\boxed{y = y_2 = \dfrac{\sqrt{13}-2}{3}H}$ et vaut alors $V_i = \dfrac{2\pi}{27}\left(13\sqrt{13}-35\right)H^3 \simeq 2.763H^3$

(4) $\dfrac{V_i}{V_e} = \dfrac{\dfrac{2\pi}{27}\left(13\sqrt{13}-35\right)H^3}{\dfrac{\pi}{3}H^2(3R-H)} = \dfrac{2\left(13\sqrt{13}-35\right)}{45}.\dfrac{1}{H}$

Si on dispose d'une machine à calculer : $\dfrac{V_i}{V_e} \cong \dfrac{0.528}{H}$. Ce calcul a peu d'intérêt.

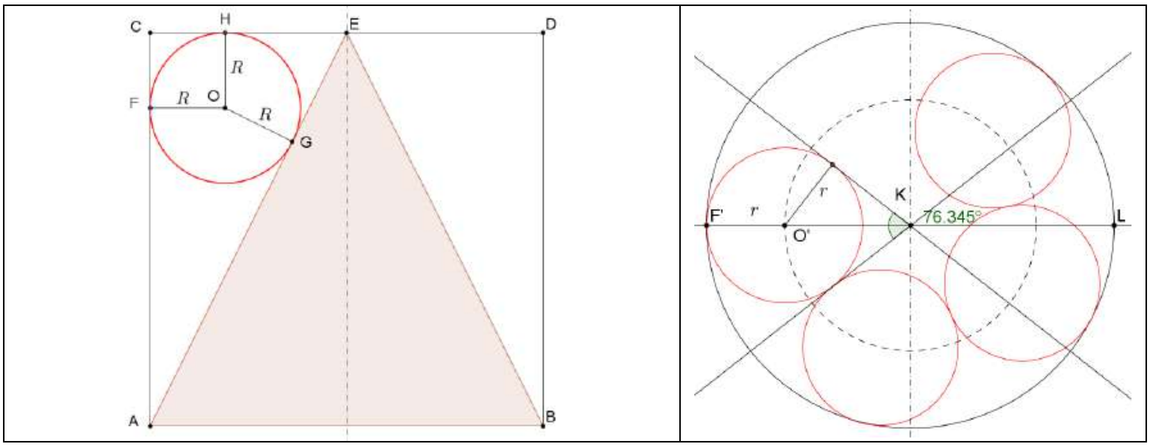
Le 26 septembre 2015

EXGSE129 - Polytech, Umons, Mons, juillet 2015

Soit un récipient cylindrique $(h=10 \text{ et } r=5)$ à l'intérieur duquel on vient déposer un cône de même hauteur et de même base que le cylindre. Le cône est déposé sur sa base.

On demande :

1. Que vaut le diamètre d maximum de la sphère qu'il est possible d'insérer intégralement entre le cylindre et le cône? Faire un dessin.
2. Combien de ces sphères de diamètre d peut-on placer au maximum dans le cylindre contenant le cône?
3. Que vaut le volume intérieur résiduel du cylindre contenant le cône et le nombre maximum de sphère de rayon $\frac{d}{2}$?



1) Le rayon de la sphère correspond au rayon du cercle inscrit au triangle rectangle ACE.

Ce rayon est donné par : $R = \dfrac{\overline{AC}.\overline{CE}}{\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{AB}}$ (Voir en annexe la justification)

$$\Rightarrow R = \frac{10\times 50}{10+5+\sqrt{10^2+5^2}} = \frac{10}{3+\sqrt{5}} = \frac{5}{2}\left(3-\sqrt{5}\right) \Rightarrow \boxed{d = 5\left(3-\sqrt{5}\right) \simeq 3.8197}$$

2) Déterminons l'angle α sous lequel on voit une sphère à partir de l'axe du cylindre.

$$\Rightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{\overline{F'K}-\overline{F'O'}} = \frac{\frac{5}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)}{5-\frac{5}{2}\left(3-\sqrt{5}\right)} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 38.1727° \Rightarrow \alpha = 76.3454°$$

Le nombre maximum de sphère est alors : $\left\lfloor \dfrac{360}{76.3454°} \right\rfloor = \boxed{4}$

Rappel : $\left\lfloor \dfrac{a}{b} \right\rfloor$ donne l'entier immédiatement inférieur au résultat de $\dfrac{a}{b}$

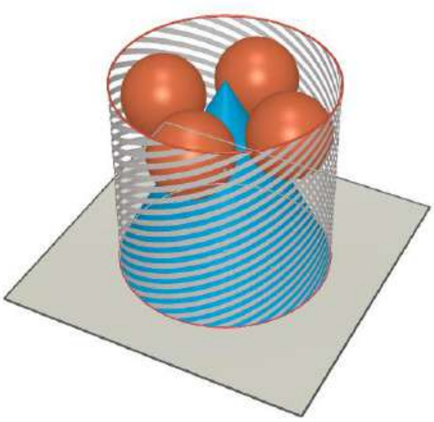
3) Si le rayon vaut $d/2$ alors on a 4 sphères.

Il reste à calculer le volume :

$$V = V_{cylindre} - V_{cône} - 4V_{sphère} = \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h - 4.\frac{\pi d^3}{6} = \frac{2\pi}{3} r^2 h - 4.\frac{\pi d^3}{6}$$

En tenant compte que $2r = h$, on obtient :

$$V = \frac{2\pi}{3}\left(h^3 - d^3\right) = \frac{2\pi}{3}\left[10^3 - \left(5\left(3-\sqrt{5}\right)\right)^3\right] \cong 1977.68 \text{ uv}$$



Dessin fournit par Hugues Vermeiren

Rayon du cercle inscrit à un triangle : voir

http://le-castillon.etab.ac-caen.fr/sites/le-castillon.etab.ac-caen.fr/IMG/pdf/Calcul_du_rayon_du_cercle_inscrit_a_un_triangle_rectangle.pdf

Le 10 octobre 2015